

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ОБЪЕДИНЁННЫЙ ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

МЕДВЕДЕВ ЮРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПАДАХ
РАЗРЫВОВ ПЛОТНОСТИ В
БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность: 01.04.08 – физика плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2015 г.

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Основные уравнения и методы их решений	23
1.1 Кинетическое приближение	24
1.2 Уравнения для моментов	28
1.3 Квазинейтральные течения	31
1.3.1 Инварианты Римана	32
1.3.2 Простые волны	33
1.3.3 Произвольное движение квазинейтральной плазмы	35
1.3.4 Задача Гурса	38
1.4 Стационарные течения	42
1.4.1 Уравнения стационарного течения	42
1.4.2 Решение уравнения Пуассона	45
1.4.3 Влияние ионной температуры	47
1.5 Двухпоточковая неустойчивость	51
Глава 2 Ионно-звуковой солитон	56
2.1 Солитоны в плазме с холодными ионами	57
2.2 Влияние ионной температуры и отражённых ионов	63
2.3 Численное моделирование солитонов	67
2.4 Сравнение с экспериментом	74
Глава 3 Расширение плазмы в вакуум	77
3.1 Аналитическое решение	78
3.2 Численные решения	82
3.2.1 Автомодельное кинетическое приближение	82
3.2.2 Постановка задачи для численного моделирования	83
3.2.3 Численные эксперименты	88
3.3 Область неквазинейтральности и ионный фронт	92

3.3.1	Плазма с холодными ионами	94
3.3.2	Влияние ионной температуры	105
3.3.3	Электронное облако	110
3.4	Волна охлаждения и обмен энергией	112
3.5	Перенос частиц и энергии	118
3.5.1	Плазма с холодными ионами	118
3.5.2	Плазма с конечной температурой ионов	120
3.5.3	Сравнение с численным экспериментом	122
Глава 4	Расширение плазмы в плазму	125
4.1	Постановка задачи	125
4.2	Плазма с холодными ионами	126
4.2.1	Общая характеристика течения	126
4.2.2	Фронт волны и отражённые ионы	133
4.2.3	Учет электронного движения	143
4.3	Расширение плазмы в плазму при $T_{i0} \neq 0$	147
4.3.1	Случай $T_{i0} \ll 1$	147
4.3.2	Большие значения T_{i0}	149
4.3.3	Сравнение с экспериментом	153
Глава 5	Задачи с двумя разрывами плотности	156
5.1	Расширение слоя плазмы в вакуум	157
5.1.1	Постановка задачи	157
5.1.2	Аналитическое решение в случае $T_{i0} = 0$	163
5.1.3	Численные решения в случае $T_{i0} = 0$	165
5.1.4	Конечная температура ионов	168
5.2	Обтекание тел разреженной плазмой	171
5.2.1	Постановка задачи	172
5.2.2	Численное моделирование	176
5.3	Эволюция возмущения плотности	184
5.3.1	Постановка задачи	184
5.3.2	Плазма с холодными ионами	185

5.3.3	Влияние ионной температуры	193
Глава 6	Разрывы в плазме с отрицательными ионами	198
6.1	Основные уравнения и типы движения	199
6.2	Расширение в вакуум плазмы с холодными ионами	205
6.2.1	Аналитическая модель течения	205
6.2.2	Основные свойства течений	209
6.2.3	Влияние плотности отрицательных ионов на течение	211
6.2.4	Структура фронта БУВР	215
6.2.5	Учёт электронного движения	217
6.3	Неустойчивость расширяющейся плазмы с холодными ионами	219
6.3.1	Возбуждение и развитие неустойчивости	219
6.3.2	Энергия волны	223
6.3.3	Неустойчивость, нелинейность и дисперсия	226
6.4	Плазма с конечными температурами ионов	229
6.4.1	Влияние температуры положительных ионов	229
6.4.2	Отражённые ионы и неустойчивость	232
6.4.3	Одинаковые температуры всех сортов частиц	233
6.4.4	Сравнение с экспериментом, $T_{i0} = 1, T_{j0} = 0,25$	236
6.5	Расширение слоя плазмы в вакуум	237
6.5.1	Начальная стадия	238
6.5.2	Явление опрокидывания	240
6.5.3	Поздние стадии	246
6.5.4	Влияние ионных температур	248
6.6	Расширение ион-ионной плазмы в вакуум	252
6.6.1	Постановка задачи и частные решения	253
6.6.2	Сравнение аналитического и численного решений	258
6.6.3	Случай $T_{i0} = 1, T_{j0} = 0$	260
6.6.4	Одинаковые ионные температуры	261
6.6.5	Волна охлаждения	265
	Заключение	269
	Список литературы	275

Введение

Плазма, космическая или лабораторная, как правило, распределена в пространстве неоднородно. Вблизи границ лабораторной плазмы, особенно в начальные моменты времени после её образования, имеются области больших градиентов физических величин. Нередко пространственный размер, на котором происходит резкое изменение той или иной физической величины, оказывается значительно меньшим, чем характерный пространственный размер последующего движения. В таком случае большой градиент величины можно приближенно рассматривать как её разрыв. Разрыв является удобным и во многих случаях вполне допустимым приближением.

Существенной особенностью возникающего при распаде разрыва движения является развитие нелинейных явлений. В бесстолкновительной плазме образующееся при этом течение может включать в себя волну разрежения, волну охлаждения, бесстолкновительную ударную волну, устойчиво движущийся разрыв, ионно-звуковой солитон или кавитон. Некоторые процессы сопровождаются появлением ускоренных частиц, образованием многопоточкового движения и развитием неустойчивости. По сути дела, эволюция практически любого произвольного разрыва представляет собой процесс формирования, развития, движения и нередко взаимодействия друг с другом нелинейных структур.

В физике бесстолкновительной плазмы имеется целый ряд важных задач, каждую из которых можно сформулировать как задачу о распаде начального разрыва некоторой величины. На практике конкретные задачи могут быть достаточно разнообразными и возникать, например, при исследованиях плазмы в экспериментальных установках для управляемого термоядерного синтеза, в плазме ионных источников, в лазерной и в газоразрядной плазме. В космической плазме могут возникать большие градиенты плотности, например, при сбросе оболочки сверхновой, при обтекании плазмой космических тел или искусственных спутников Земли.

Тема исследований. В представленной работе рассматриваются нелинейные явления в бесстолкновительной плазме, развитие которых инициируется разрывами плотности частиц.¹ Характерные особенности и закономерности развития нелинейных явлений продемонстрированы на ряде важных задач, решения которых, сами по себе, представляют несомненный интерес для приложений. Эти задачи характеризуются не только подобием в их постановке, но и подобием протекающих процессов, а также общностью проявления нелинейных эффектов. Анализируя решения рассматриваемых задач, можно выделить общие свойства того или иного нелинейного явления как такового, независимо от конкретного процесса.

Изучение распадов разрывов и нелинейных движений бесстолкновительной плазмы ведётся достаточно давно. Обсудим кратко известные из научных публикаций результаты исследований.

Очевидно, что распады разрывов в бесстолкновительной плазме следует изучать в кинетическом приближении [1]. Решение задач заметно упрощается, если считать, что плазма при движении сохраняет квазинейтральность [2–5]. Такое предположение хорошо подтверждается в ряде случаев, как например, при расширении плазмы в вакуум. Исключения составляют только отдельные области течения. Естественно, полное решение задач без упрощений может быть получено численными методами. Наиболее подходящим методом для этих целей оказалось численное моделирование с помощью частиц [6–9].

Естественным упрощением, которое позволяет получить некоторые аналитические решения или оценки, является переход к уравнениям для моментов функций распределения частиц. При этом открывается возможность использовать хорошо разработанные методы решения задач в газодинамике [10–13] и в математической физике [14–16].

В бесстолкновительной плазме весьма важна роль волновых явлений. В частности, в течениях могут возникать нелинейные структуры типа солитона или бесстолкновительной ударной волны (БУВ) [17–19], при определённых условиях могут развиваться неустойчивости [20–22]. Особого внимания заслу-

¹Распады разрывов не только плотности, но и потоковой скорости и температуры ионов рассмотрены в книге автора [206]

живает ионно-звуковой солитон, поскольку его свойства в ряде случаев оказываются определяющими для понимания рассматриваемых здесь процессов. К примеру, фронт БУВ описывается солитонным решением. Поэтому интерес к исследованиям ионно-звукового солитона сохраняется на протяжении многих лет. Первоначально рассматривался случай плазмы с холодными ионами. В работах [17, 18] была определена зависимость скорости солитона от его амплитуды и было установлено, что эти величины не могут превышать определённые критические значения. Было показано, что в случае малых амплитуд распределение потенциала в солитоне может быть представлено аналитической формулой, которая имеет вид, близкий к стационарному решению уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ). Подобное уравнение для плазмы с холодными ионами было выведено в [23]. Позже к уравнению КдВ в случае малых амплитуд пришли, используя масштабированные особым образом переменные [24].

Эффект захвата электронов в поле волны был описан в [25, 26]. Ионно-звуковые солитоны численно изучались в гидродинамическом приближении [27], в работах [28, 29] рассматривалось влияние небольшой ионной температуры, а учитывающее её уравнение КдВ обсуждалось в статьях [30, 31].

Отраженные от солитона ионы могут существенно изменить характер движения волны [19]. Образование ионов, отраженных от волны большой амплитуды изучалось в [32]. В [33] на качественном уровне влияние отражённых ионов учитывалось с помощью поправки к уравнению КдВ.

Изложению теории нелинейных волн в средах с дисперсией и диссипацией посвящена книга [34]. Эффекты взаимодействия ионно-звуковых солитонов с резонансными частицами плазмы исследованы в [35]. Газодинамические особенности солитонных решений обсуждаются в [36]. В [37] численно решается дифференциальное уравнение для нахождения профиля волны. Значительное число работ посвящено исследованию ионно-звуковых солитонов, образующихся в плазме, имеющей более сложный (по сравнению с двухкомпонентной электрон-ионной плазмой) состав [38–48]. Обзор ранних экспериментов с солитонами в плазме представлен в [49]. Эксперименты описаны также в статьях [50–53], где измерялись зависимости ширины и скорости ионно-звукового солитона от его амплитуды.

Что касается конкретных задач о движении бесстолкновительной плазмы, содержащей начальные разрывы плотности, то основы их теоретических исследований были заложены в работах [2–4]. Здесь было показано, что в квазинейтральном приближении плазма расширяется автомодельно, и был обнаружен эффект ускорения ионов с одновременным уменьшением их температуры. Подробное описание квазинейтрального течения плазмы приведено в обзорах [5, 26]. Отметим, что сильно ускоренные ионы, выходящие из плазмы, наблюдались и ранее в экспериментах [54–57]. Автомодельность движения и явление ускорения ионов при расширении плазмы в вакуум были подтверждены последующими численными расчетами [58–61], численным моделированием [62, 63] и экспериментальными наблюдениями [62, 64–68].

Результаты экспериментов с лазерной плазмой стимулировали изучение расширяющейся в вакуум плазмы, электронная компонента которой состоит из двух сортов частиц; электроны первой группы имеют высокую температуру, второй группы — низкую [59, 60, 69–74]. Также рассматривался случай плазмы, состоящей из электронов и несколько сортов ионов [59, 60, 72, 75, 76].

Ускорение ионов осуществляется за счет тепловой энергии электронов. В плазме конечного объёма полная энергия электронов определяет величину максимально достижимой ионной скорости. Поэтому существенный интерес приобрели исследования расширения в вакуум плазмы конечного пространственного размера. Разнообразные случаи были рассмотрены в [76–93]. Влияние высокочастотного поля на ускорение ионов в плазме, расширяющейся в вакуум или в фоновую плазму небольшой плотности, рассматривалось в [94].

Рост интереса к получению ускоренных ионов при расширении плазмы тесно связан с развитием лазерной техники. С ростом интенсивности лазеров появляется возможность генерировать потоки частиц с энергиями в десятки мегаэлектронвольт. Оказалось, что лазерная плазма может служить эффективным источником многозарядных ионов. Такие источники могут применяться в инжекторах ускорителей, в экспериментах по инерциальному синтезу, для зондирования плотной плазмы, для ионной имплантации и даже для биологических и медицинских целей. По сути дела, лазерное генерирование стало весьма важным направлением в методах получения потоков быстрых частиц.

При исследовании этих процессов классическая постановка задачи о расширении плазмы в вакуум трансформировалась в сторону более полного учёта тех или иных особенностей лазерной плазмы, а также возможных приложений генерируемых потоков частиц. Ряд важных вопросов о лазерном генерировании ускоренных ионов рассматривался в статьях [95–107] (теория и численное моделирование) и [108–112] (эксперимент). Основное внимание в этих работах уделяется процессам перехода энергии от электронов к ионам.

Значительный интерес представляет задача о затекании плазмы в вакуумную полость. Важнейшим примером такого течения является обтекание ионосферной плазмой искусственных спутников Земли. Этому посвящены книга [113] и обзорные работы [26, 114]. Теоретические вопросы и данные численного моделирования обсуждаются в статьях [115–119]. Был поставлен реальный эксперимент об обтекании плазмой пластинки [62]. Здесь же представлены результаты численного моделирования. Об экспериментах по обтеканию цилиндра сообщается в [120], а в [121] описаны эксперименты с пластинкой и цилиндром. Значительное внимание было уделено изучению следа, оставляемого Луной в потоке солнечного ветра. При этом аналитические и численные результаты были дополнены экспериментальными данными, полученными с помощью космических аппаратов [122–127].

Не меньший интерес представляет задача о расширении плазмы не в вакуум, а в плазму меньшей плотности, то есть распад конечного разрыва плотности. Такой процесс также может сопровождаться ускорением ионов. В некоторых случаях течение описывается монотонными зависимостями [3]. Вместе с тем, нередко могут наблюдаться новые элементы течения, такие как, например, БУВ. За фронтом волны образуется расширяющаяся со временем область осцилляций. Некоторая часть ионов может отразиться от фронта БУВ, и течение в этом случае становится двухпоточковым.

Режимы немонотонного расширения, при которых формируется БУВ, рассматривались в ряде работ. Изучались эволюция БУВ и возможные механизмы диссипации. Теоретические и численные исследования представлены в работах [19, 27, 32, 33, 43, 128–139]. Эксперименты с БУВ описаны в [140–144], а монотонное расширение разрыва экспериментально изучалось в [145–148].

В настоящее время наблюдается возрождение интереса к БУВ и процессам, происходящим при распаде разрыва плотности. Это связано, в основном, с проводимыми во все возрастающем масштабе исследованиями лазерной плазмы. Образование БУВ и её последующая эволюция наблюдались в ряде лазерных экспериментов [149–151]. Распад разрыва плотности и возникающие при этом структуры изучались с помощью численных методов, главным образом с помощью численного моделирования [152–159].

В лабораторных условиях, в технических устройствах и в космосе плазма часто оказывается состоящей из электронов и нескольких сортов ионов. Из большого разнообразия многокомпонентных плазм весьма важным является случай плазмы с отрицательными ионами, то есть трехкомпонентной плазмы, в состав которой, кроме электронов и положительных ионов, входят отрицательно заряженные ионы. В естественных условиях отрицательные ионы наблюдаются в D -слое и в нижней части E -слоя ионосферы. В экспериментальных устройствах плазму с отрицательными ионами получали с помощью термической ионизации [160] или инъекции электроотрицательного газа, например, SF_6 , в область, занятую двухкомпонентной плазмой [161]. Эксперименты проводились в двухплазменных устройствах [162, 163], в специально сконструированных разрядных камерах [164] или в Q -машинах [165].

Плазма, содержащая отрицательные ионы водорода H^- и дейтерия D^- , может найти применение в источниках высокоэнергичных пучков нейтральных частиц для термоядерных исследований [166]. Плазма с отрицательными ионами может использоваться в устройствах для накачки газовых лазеров [167], применяется для обработки материалов [168, 169]. В работе [170] была продемонстрирована её эффективность при производстве материалов, основанных на фуллеренах. Получение плазмы с отрицательными ионами из фуллерена C_{60} и с положительными ионами K^+ обсуждается в [165, 170–173].

Бесстолкновительная плазма с отрицательными ионами представляет значительный интерес как физический объект с необычными волновыми свойствами [163, 174–176]. Различные нелинейные структуры могут существовать в такой плазме. Здесь можно наблюдать солитоны и ударные волны, причём не только сжатия, но и разрежения [162, 177–181].

Изучение движений плазмы с отрицательными ионами может дать начальное представление о возможных процессах в более сложной плазме — плазме с пылевыми частицами [182, 183]. В одной из первых работ [184], посвящённых расширению пылевой плазмы в вакуум, предполагалось, что все пылинки одинаковы по размеру, массе и заряду, то есть пылинки описывались так же, как и отрицательные ионы. Расширение в вакуум плазмы, в состав которой, помимо электронов и положительных ионов, входят пылинки двух сортов, изучалось в [185]. В [186, 187] учитывается переменный заряд пылинок.

Практическую важность решения задачи об эволюции начального разрыва плотности отрицательных ионов демонстрирует работа [188], где моделируется методика определения параметров плазмы, при которой с помощью облучения плазмы лазером вызывают диссоциацию отрицательных ионов на атомы и свободные электроны. Из анализа возникающего возмущения электронной компоненты можно извлечь информацию о параметрах плазмы с отрицательными ионами. Расширение бесстолкновительной плазмы с отрицательными ионами в вакуум для случая очень малого сгустка (толщиной 12 дебаевских длин) рассматривалось в [81] с применением метода [80]. В работе [189] решение задачи о расширении плазмы в вакуум находилось численно в гидродинамическом приближении. Представлены результаты для начальной стадии процесса (в пределах одного плазменного периода).

Важным частным случаем плазмы с отрицательными ионами является плазма с очень малой долей электронов, ион-ионная плазма. Примером может служить плазма, полученная в [161], где отношение плотности отрицательных ионов к плотности положительных ионов было равно 0,999. Это отношение составляло 0,9996 в эксперименте [190] (ионы Ar^+ и SF_6^-), а в плазме, созданной в Q -машине (ионы K^+ и SF_6^-), достигало еще большего значения, 0,9999 [165]. Ион-ионная плазма может образовываться не только в специальных устройствах, но и возникать при уходе значительного числа электронов из области плазмы при некоторых процессах. Такие процессы описаны в статьях [191–195]. Ион-ионная плазма может использоваться при обработке материалов [196]. Значительный интерес привлекает парно-ионная плазма, важным частным случаем которой является плазма, состоящая из

ионов фуллерена C_{60}^+ и C_{60}^- , произведенных в равных количествах [197, 198].

Заметим, что волновые процессы в ион-ионной плазме заметно отличаются от таковых в обычной электрон-ионной плазме [161, 190]. То же самое имеет место и в парно-ионной плазме. Анализ волн, в том числе и уединенных, а также неустойчивостей, возникающих в такой плазме содержится в ряде работ [198–205]. Эти исследования, помимо общего понимания, способствуют, в частности, обоснованию соответствующих диагностических методов.

Актуальность темы исследования. Приведенный краткий обзор литературы свидетельствует о широком интересе к рассматриваемым проблемам. Актуальность их изучения определяется не только научными, но и практическими приложениями. Как уже упоминалось, исследование ускорения ионов при расширении плазмы привело к развитию целого направления в методах ускорения частиц. Здесь интерес представляет расширение плазмы не только в вакуум, но и в плазму меньшей плотности. Эволюция «горба» плотности конечного размера может служить удобной моделью лазерной плазмы. Этот же эффект ускорения ионов в других устройствах, например, в установках для инерциального термоядерного синтеза, может приводить и к нежелательным последствиям. Если плазма граничит с вакуумом, то значительная доля энергии может быть унесена из объёма плазмы относительно небольшим числом ускоренных ионов, и это надо учитывать при проектировании устройств.

Интерпретация проводимых с помощью космических аппаратов измерений параметров плазмы вблизи Луны должна учитывать процесс обтекания Луны солнечным ветром. Решения соответствующих задач позволяет объяснить структуру возникающего следа, возбуждение волн и развитие неустойчивости. Результаты исследования расширения плазмы в плазму могут быть полезными при объяснении процессов, проходящих в космической плазме, например, при вспышках на Солнце. Эти же исследования, как видно из литературы, представляют интерес и для лазерной плазмы.

Большое научное и практическое значение имеет изучение плазмы с отрицательными ионами. В частности, расширение такой плазмы, обусловленное градиентом плотности частиц, является неотъемлемым элементом течения практически во всех лабораторных установках. Расширяющаяся плазма, в том

числе и плазма с отрицательными ионами, широко используется в процессах обработки материалов. Понимание потоковой динамики и данные об основных параметрах течения весьма важны для оптимизации того или иного процесса. Литературные источники показывают, что всё возрастающий интерес проявляется к ион-ионной, и особенно, к парно-ионной плазме.

Отмеченные примеры научной и практической важности исследований процессов, происходящих при распадах разрывов плотности, а также возникающих при этом нелинейных явлений подтверждают необходимость изучения рассматриваемых ниже задач и их актуальность.

Цель и задачи работы. Целью представленных исследований является нахождение аналитических и численных решений ряда задач о течениях бесстолкновительной плазмы, порождаемых разрывом (разрывами) плотности частиц, и выявление на их основе свойств и закономерностей нелинейных явлений, включая вопросы генерации, эволюции и взаимодействия друг с другом нелинейных структур.

В диссертации изучалась задача о расширении плазмы в вакуум. Исследованы случаи электрон-ионной плазмы, трёхкомпонентной плазмы с отрицательными ионами и ион-ионной плазмы. Рассматривались задача о расширении плазмы в плазму меньшей плотности, задача об обтекании плазмой быстро движущегося тела и задача об эволюции сильного возмущения плотности плазмы. Полученные решения сравнивались с известными экспериментальными данными и с результатами других исследователей.

Научная новизна. В диссертации были предложены новые подходы к решению задач, введены и обоснованы новые определения и понятия, а также получены и обсуждены новые научные результаты.

1. Предложен метод описания движения квазинейтральной плазмы с применением инвариантов Римана. С его помощью получены новые результаты: найдено аналитическое решение для простых волн при любой температуре ионов, выведено линейное уравнение для описания произвольного движения квазинейтральной плазмы, изучена задача Гурса для такой плазмы и найдено её аналитическое решение в случае плазмы с холодными ионами.

2. Описан метод для определения профиля стационарно движущихся

нелинейных структур в плазме с произвольной температурой ионов. С помощью этого метода получены новые результаты о движении ионно-звукового солитона и БУВ.

3. Выведено уравнение для определения критических значений величин, характеризующих стационарно движущиеся структуры при конечной температуре ионов и изучена их зависимость от ионной температуры.

4. При исследовании расширения плазмы в вакуум:

а) Получено аналитическое решение задачи в области квазинейтральности при любой температуре ионов.

б) Введено новое понятие — граница области квазинейтральности и уточнено понятие ионного фронта, а также предложены формулы, описывающие их движение во времени, что позволило определить области применимости аналитических решений.

в) Изучена область неквазинейтральности (область положительного пространственного заряда) и найдено её аналитическое описание в случае плазмы с холодными ионами.

г) Введено новое понятие — автомодельная волна охлаждения. Волна развивается в лёгкой компоненте расширяющейся плазмы. Используя это понятие, изучен обмен энергией между электронами и ионами.

д) Предложено при численном моделировании процесса использовать новые граничные условия, учитывающие уход частиц из счётной области.

5. Представлена аналитическая модель, позволяющая оценить основные параметры течения при расширении плазмы в плазму меньшей плотности.

6. Решена в законченном аналитическом виде задача о расширении в вакуум слоя плазмы с холодными ионами.

7. Рассмотрен механизм образования небольших областей пониженной плотности, «кавитонов», на нелинейной стадии двухпоточковой неустойчивости, развивающейся в следе за быстро движущимся в плазме телом.

8. Установлено, что бесстолкновительная ударная волна с течением времени трансформируется в цепочку ионно-звуковых солитонов, которые упорядочены в пространстве по амплитуде.

9. При изучении расширения в вакуум плазмы с отрицательными ионами:

а) Найдено, что в течении может возникать бесстолкновительная ударная волна разрежения, и определены условия её существования.

б) Установлено, что в течении может образовываться ограниченная в пространстве область неустойчивости, определены условия её возникновения.

в) Изучено расширение слоя плазмы, описаны последовательные стадии процесса и явление опрокидывания, приводящее к образованию областей многопоточкового движения с сильной неоднородностью.

10. Впервые изучена задача о расширении в вакуум ион-ионной плазмы и рассмотрено образование волны охлаждения в расширяющейся плазме.

Научная и практическая значимость работы. Значимость проведенных исследований определяется тем, что здесь найдены решения ряда важных задач и описаны основные закономерности развития нелинейных явлений. Целесообразность практического использования полученных результатов видна из того, что они хорошо описывают соответствующие эксперименты.

Новый подход к изучению квазинейтрального движения бесстолкновительной плазмы, выведенное линейное уравнение для произвольного движения и полученные решения для простых волн могут быть использованы при изучении других задач. То же самое можно сказать и о предложенном методе определения профиля стационарно движущейся структуры.

Полученные в работе результаты о расширении плазмы в вакуум или в плазму меньшей плотности могут быть полезны для имеющих практическую направленность исследований о сильном ускорении ионов в лазерной плазме, в задачах об обтекании ионосферной плазмой искусственных спутников Земли или солнечным ветром Луны, при изучении таких явлений в космической плазме, как вспышки на Солнце.

Важность задачи о расширении плазмы с отрицательными ионами в вакуум видна, в частности, из того, что при этом трёхкомпонентный состав плазмы может быть нарушен в значительной области пространства, а в другой области может развиться неустойчивость. Эти явления надо учитывать при работе с такой плазмой.

Изучение нелинейных движений ион-ионной плазмы не только само по себе представляет интерес, но и может быть полезным для понимания явлений,

происходящих в электрон-позитронной плазме. Такая плазма может находиться в некоторых астрофизических объектах.

В работе предложен и опробован в численном эксперименте метод диагностики плазмы, основанный на измерениях ряда зависимостей для потока выходящих из плазмы ионов при её расширении. Метод не вносит возмущений в плазму и не сложен для практического применения.

Метод исследования. Основным способом решения рассматриваемых в работе задач является численное моделирование по широко известному методу частиц в ячейке. Был разработан комплекс программ, реализующий разные модели плазмы, начиная с той, в которой частицами моделируется только один сорт ионов, а электроны предполагаются распределенными по закону Больцмана, и оканчивая моделью, в которой модельными частицами представлено несколько разных сортов частиц. Это дает возможность одну и ту же задачу рассматривать в разных приближениях. Кроме того, для уяснения тех или иных особенностей движения нередко физические частицы одного сорта моделировались двумя или тремя сортами модельных частиц, каждый из которых соответствовал выделенной некоторым образом группе физических частиц.

Практическое применение метода частиц в ячейке показало его высокую эффективность для решения нелинейных задач. Его универсальность позволяет изучать разные задачи, сохраняя при этом единые стандарты в отношении точности и степени разрешения по пространству и по скоростям. Имеющиеся аналитические решения некоторых задач были все с высокой точностью подтверждены численными расчётами, что служит дополнительной гарантией достоверности полученных результатов. Универсальность метода даёт возможность корректно проводить сравнение решений разных задач. При таком сравнении можно выделить общие закономерности и важные частные особенности возникающих течений, а также всесторонне рассмотреть нелинейные явления.

Научные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие научные положения.

1. Для описания квазинейтральных течений плазмы с произвольной температурой ионов можно использовать полученные в работе аналитическое решение для простых волн, линейное уравнение второй степени для

произвольного движения, а также решение задачи Гурса. В случае плазмы с холодными ионами задача Гурса решается в законченном аналитическом виде.

2. Критические значения величин, характеризующих стационарно движущуюся нелинейную волну типа ионно-звукового солитона или бесстолкновительной ударной волны, существенно зависят от температуры ионов и могут быть рассчитаны по выведенному в работе уравнению. Доля отраженных от волны ионов резко возрастает в относительно небольшом диапазоне амплитуд вблизи критического значения.

3. При расширении плазмы в вакуум образуются области: квазинейтральности, положительного пространственного заряда и электронного облака. Первые две области разделяются границей квазинейтральности, вторая и третья — ионным фронтом. Область квазинейтральности при любой температуре ионов, а также две другие области и разделяющие их границы в случае плазмы с холодными ионами хорошо описываются предложенными в работе аналитическими зависимостями. В электронной компоненте плазмы развивается автомодельная волна охлаждения.

4. Расширение плазмы в плазму меньшей плотности в случае холодных ионов происходит с образованием волны разрежения, платоподобной области и бесстолкновительной ударной волны. Фронт волны описывается солитонным решением. Если отношение меньшей начальной плотности к большей начальной плотности ниже определённого критического значения, то в течении появляются отражённые ионы. При очень малом отношении плотностей диссипация за счёт отражения ионов способствует тому, что фронт волны принимает вид резкого разрыва, за которым следует однородная область. С ростом ионной температуры происходит переход к монотонному распределению потенциала.

5. Расширение в вакуум слоя плазмы с холодными ионами описывается представленным в работе аналитическим решением. Подобие процессов, происходящих при разных пространственных размерах слоя, позволяет записать универсальное при заданной температуре ионов решение для слоя любого размера.

6. В следе за быстро движущимся в плазме телом за счёт двухпоточковой неустойчивости происходит образование небольших областей пониженной

плотности частиц, кавитонов. В результате, образованное телом возмущение плотности плазмы со временем дробится на ряд кавитонов, которые уходят на периферию с дозвуковой скоростью.

7. Возмущение плотности плазмы конечного размера в виде «горба» на однородном фоне со временем трансформируется в два новых возмущения, распространяющихся в противоположных направлениях. В плазме с холодными ионами каждое новое возмущение содержит бесстолкновительную ударную волну, которая со временем трансформируется в цепочку ионно-звуковых солитонов, упорядоченных в пространстве по амплитуде. С ростом температуры ионов амплитуды ионно-звуковых солитонов уменьшаются, и при больших температурах пространственные распределения величин становятся гладкими.

8. Расширение в вакуум плазмы с отрицательными ионами сопровождается возникновением бесстолкновительной ударной волны разрежения при условии, что отношение невозмущенных плотностей отрицательных и положительных ионов превосходит определённое критическое значение, а ионы плазмы — холодные. За фронтом волны образуются осцилляторная структура, небольшая платоподобная область без отрицательных ионов и область волны разрежения. На границе осцилляторной структуры с плато за счёт двухпоточковой неустойчивости возникают коротковолновые осцилляции. Их распространение на фоне движущейся длинноволновой осцилляторной структуры ограничено в пространстве за счёт дисперсии.

9. При расширении в вакуум плоского слоя плазмы с отрицательными ионами за счёт явлений опрокидывания и неустойчивости происходит образование областей многопоточкового движения с сильной неоднородностью и пиковыми увеличениями ионных плотностей, превышающими начальные значения во много раз. С ростом начальных ионных температур амплитуды пиков плотности уменьшаются, а профили плотностей становятся более гладкими.

10. Ион-ионное приближение при расширении в вакуум плазмы с отрицательными ионами с очень малой долей электронов является справедливым в течение всего процесса, если масса положительного иона превосходит массу отрицательного иона. В ряде случаев расширение ион-ионной плазмы может быть описано формулами для расширяющейся в вакуум системы нейтраль-

ных частиц. Процесс сопровождается возникновением автомоделльной волны охлаждения в среде легких ионов.

Достоверность результатов. Представленные здесь численные решения с высокой точностью совпадают с соответствующими аналитическими решениями, как найденными ранее другими авторами, так и полученными в этой работе. Проводится сравнение численных и аналитических решений с соответствующими экспериментальными результатами других авторов. Все экспериментальные данные хорошо соответствуют полученным решениям. Это свидетельствует о достоверности представленных результатов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на XIX Международной конференции по явлениям в ионизованных газах в г. Белграде в 1989 г., на конференции «Физика и техника плазмы» в г. Минске в 1994 г., на III, IV, V и VI Международных конференциях «Plasma Physics and Plasma Technology» в г. Минске в 2000, 2003, 2006 и 2009 годах, на конференциях по физике низкотемпературной плазмы ФНТП-95 и ФНТП-98 в г. Петрозаводске в 1995 и 1998 годах, на III Всесоюзной научной конференции «Молекулярная физика неравновесных систем» в г. Иваново в 2001 г., на 6-ой Международной научной конференции «Молекулярная биология, химия и физика неравновесных систем» в г. Иваново в 2002 г., на Международной конференции по физике низкотемпературной плазмы PLTP-03 в г. Киеве в 2003 г., на Международных (Звенигородских) конференциях по физике плазмы и УТС в г. Звенигороде в 2004–2015 годах, на Всероссийской (с международным участием) конференции «Физика низкотемпературной плазмы» ФНТП-2014 в г. Казань в 2014 г.

Результаты исследований докладывались на научных семинарах в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, в Институте космических исследований РАН, в Объединенном институте высоких температур РАН.

Личный вклад автора. Диссертация обобщает результаты, изложенные в научных публикациях автора, написанных как в соавторстве с другими авторами, так и без соавторов. Вклад автора в совместно написанные работы состоит в следующем.

- 1) Во всех работах автор проводил численные расчёты, включая раз-

работку, отладку и тестирование программ для численного моделирования течений плазмы, проведение конкретных расчетов и обработку результатов.

2) Автор участвовал в совместных обсуждениях постановок задач и результатов расчетов, а также в подготовке рукописей к публикации.

По теме диссертации автором единолично опубликованы 1 монография, 14 статей, 1 препринт и 32 доклада.

Публикации. Материалы диссертации основаны на научных публикациях автора. В список литературы включены работы автора: 1 монография [206], 25 статей в реферируемых ведущих научных журналах [207–231], из которых 11 работ [207–217] представлены в отечественных научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов докторских диссертаций, а также отдельные препринты [232, 233] и доклады [234–240]. Всего автором по теме диссертации было опубликовано 7 препринтов (ИАЭ им. И. В. Курчатова, ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН) и 32 доклада на Всесоюзных, Всероссийских и Международных научных конференциях.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации занимает 297 страниц, включая 138 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 256 наименований.

Краткое содержание. Основные уравнения и методы их решения рассматриваются в **главе 1**. Здесь обсуждается применение методов газодинамики к исследованию квазинейтральных течений, анализируются уравнения и решения, описывающие простые волны, произвольное движение плазмы и задачу Гурса. В главе выведено уравнение для описания стационарно движущихся структур в плазме с произвольной температурой ионов и предложен метод для его численного решения. Выведено уравнение для определения критических значений величин, характеризующих такие структуры, рассмотрена их зависимость от ионной температуры. Кроме того, здесь кратко обсуждается двухпоточковая неустойчивость.

Одной из важнейших нелинейных структур является ионно-звуковой солитон. Поскольку солитонные решения появляются в ряде задач о распаде разрыва, прежде чем переходить к последним, в **главе 2**

излагаются основные свойства ионно-солитона. Рассмотрены свойства ионно-звукового солитона в плазме с холодными ионами, показаны их отличия от свойств солитонов, описываемых уравнением КдВ, предложено физически обоснованное определение ширины ионно-звукового солитона, учитывающее разделение зарядов. Кроме того, в главе дана количественная оценка влияния отражённых ионов, определена их максимальная доля и установлены области их влияния на движение ионно-звукового солитона при разных ионных температурах. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными зависимостями и показано их хорошее согласие.

В **главе 3** рассматривается расширение в вакуум двухкомпонентной плазмы. Получено аналитическое решение задачи в квазинейтральном приближении при произвольной температуре ионов, проведено сравнение этого решения с результатами численного моделирования и установлена область его применимости. Введено понятие границы области квазинейтральности и обоснован способ её определения. Подробно исследуется область неквазинейтральности и движение ионного фронта. Введено понятие волны охлаждения электронов при расширении плазмы в вакуум, изучено её влияние на процесс. Рассмотрен перенос частиц и энергии, и обсуждена возможность использования полученных зависимостей для диагностических целей.

Задача о расширении плазмы в плазму меньшей плотности рассматривается в **главе 4**. Дано подробное описание процесса при разных значениях скачка плотности и температуры ионов. В зависимости от этих параметров можно классифицировать возникающие течения. Исследуется формирование и движение БУВ, а также эволюция осцилляторной структуры за фронтом волны. Обсуждается роль отражённых от волны ионов. Для оценки основных параметров течения и расчёта фронта волны предложена аналитическая модель. Установлено, что возможны течения с монотонно изменяющимися параметрами. Полученные для таких течений решения достаточно хорошо описывают известные экспериментальные зависимости.

В **главе 5** рассмотрены три задачи, в каждой из которых имеется два начальных разрыва плотности плазмы. В первой задаче изучается расширение в вакуум слоя плазмы конечной ширины. В квазинейтральном

приближении в случае плазмы с холодными ионами найдено решение в законченном аналитическом виде. Здесь также представлены результаты численного моделирования и проанализировано влияние ионной температуры на процесс. Обсуждено подобие течений при разных значениях ширины слоя. Во второй задаче рассмотрено затекание следа за быстро движущимся телом в разреженной плазме. Изучено взаимодействие возникающих потоков ионов и развитие неустойчивости, приводящее к образованию таких нелинейных структур, как «дыры» на фазовой плоскости ионов. «Дырам» соответствуют области пониженной плотности, кавитоны. В третьей задаче исследуется эволюция возмущения плотности, сосредоточенного в ограниченной области пространства. Показано, что со временем возмущение распадается на два новых возмущения, распространяющихся в противоположных направлениях от центра начального возмущения. В плазме с холодными ионами каждое новое возмущение содержит платоподобную область и БУВ. Последняя с течением времени превращается в цепочку ионно-звуковых солитонов, упорядоченных в пространстве по амплитуде. С ростом начальной ионной температуры пространственные распределения величин становятся гладкими.

В **главе 6** обсуждаются основные уравнений и типы движения плазмы с отрицательными ионами и изучается её расширение в вакуум. Рассматривается образование бесстолкновительной ударной волны разрежения (БУВР) (разрежение испытывают положительные ионы). Предложена аналитическая модель для оценки основных параметров течения. Обсуждается развитие неустойчивости и её особенности. Изучено расширение конечного слоя плазмы с отрицательными ионами в вакуум и описано явление опрокидывания, которое приводит к резкому повышению плотностей частиц в узких областях. Результаты численного моделирования сопоставляются с экспериментальными данными. Здесь также рассмотрено расширение ион-ионной плазмы в вакуум. Обсуждается формирование автомодельной волны охлаждения в среде легких ионов.

В **Заключении** приведены основные результаты выполненных в работе исследований.

Глава 1

Основные уравнения и методы их решений

Настоящая глава имеет целью изложить ряд вопросов общего характера, составляющих основу для изучения нелинейных движений плазмы, рассматриваемых в диссертации. В главе обсуждаются исходные уравнения для кинетического описания изучаемых явлений, а также более простые подходы, позволяющие получить аналитические решения и оценки. Здесь обосновывается выбор метода численного решения.

Важной целью представленных в главе исследований является поиск как можно более полного описания движений квазинейтральной плазмы, которые развиваются при расширении плазмы в вакуум. В результате, в главе получено выражение для волны разрежения в плазме с конечной температурой ионов и выведено линейное уравнение для произвольного движения квазинейтральной плазмы. Кроме того, в законченном аналитическом виде решена задача Гурса для плазмы с холодными ионами.

В главе выведено уравнение для описания нелинейных волн типа ионно-звукового солитона или бесстолкновительной ударной волны, стационарно движущихся в плазме с произвольной температурой ионов, и предложен метод для его численного решения. Здесь также выведено уравнение для определения критических значений величин в случае плазмы с ненулевой температурой ионов, и рассмотрена зависимость этих значений от ионной температуры. Изложение следует работам автора [206, 216, 221, 228].

1.1 Кинетическое приближение

Плазма, в которой средняя длина свободного пробега частиц велика по сравнению с характерными длинами исследуемых процессов, может рассматриваться в бесстолкновительном приближении. В этом случае в кинетических уравнениях для функций распределения частиц можно пренебречь интегралами столкновений. Поведение плазмы при этом описывается системой уравнений Власова [1]. Последняя принята здесь в качестве исходной.

В каждой из рассматриваемых ниже задач имеется физически выделенное направление. Вдоль этого направления изучается движение плазмы в одномерной постановке в предположении, что в поперечной плоскости плазма распределена однородно, и поперечное движение не влияет существенно на продольное. Влияние магнитного поля на течение плазмы не рассматривается.

Система уравнений Власова состоит из набора кинетических уравнений и уравнения Пуассона для потенциала $\varphi(x, t)$ электрического поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \quad n_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x, v, t) dv. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Число кинетических уравнений в (1.1) равно числу сортов частиц. Каждое такое уравнение описывает эволюцию функции распределения $f_\alpha(x, v, t)$ частиц сорта α , которые имеют заряд e_α и массу m_α и в каждый момент времени распределены в пространстве с плотностью $n_\alpha(x, t)$. В двухкомпонентной плазме $\alpha = \{i, e\}$ индекс α заменяется на индекс i и e_α — на $Z_i e$ в случае ионов. Для электронов используется индекс e , и заряд полагается равным $-e$. Здесь Z_i — зарядовое число ионов, а e — абсолютная величина заряда электрона. В случае трёхкомпонентной плазмы $\alpha = \{i, j, e\}$ индексом j обозначается дополнительный сорт ионов. Для координаты, скорости и времени используются стандартные обозначения x , v и t , соответственно.

Систему уравнений (1.1) можно упростить, используя то обстоятельство, что характерные времена движения тяжелых и легких частиц отличаются больше, чем на порядок. В ряде случаев, в том числе и в ниже рассматри-

ваемых задачах, основной интерес представляет движение ионов, а для описания электронной компоненты можно не прибегать к решению кинетического уравнения для $f_e(x, v, t)$. Весьма важным является приближение, при котором предполагается, что электроны находятся в равновесии с электрическим полем, и их плотность определяется больцмановским распределением. Тогда исходная система уравнений для двухкомпонентной плазмы принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{Z_i e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -4\pi e (Z_i n_i - n_e), \\ n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_e = n_{e0} \exp(e\varphi/T_{e0}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где через n_{e0} и T_{e0} обозначены, соответственно, плотность электронов и их температура (в энергетических единицах) в невозмущённой области.

Дальнейшее упрощение системы уравнений (1.2) возможно для течений, при которых характерный пространственный масштаб L достаточно велик:

$$L \gg \lambda_{De} = \sqrt{T_{e0}/4\pi e^2 n_{e0}}, \quad (1.3)$$

где λ_{De} — электронная дебаевская длина. В этом случае, как известно [1], величина нескомпенсированного заряда в плазме по порядку величины составляет $(\lambda_{De}/L)^2 \ll 1$, то есть на рассматриваемых пространственных масштабах можно пренебречь разделением зарядов и считать плазму квазинейтральной: $n_e = Z_i n_i$ (в невозмущенной области всегда предполагается квазинейтральность $n_{e0} = Z_i n_{i0}$). При этом может оказаться, что в решении уравнения Пуассона нет необходимости. Так, в случае максвелл-больцмановского распределения электронов из соотношения квазинейтральности $n_e = Z_i n_i$ легко определяется потенциал, и система (1.2) преобразуется к виду [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{Z_i e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \varphi = \frac{T_{e0}}{e} \ln \frac{Z_i n_i}{n_{e0}}, \quad n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_e = Z_i n_i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Система (1.4) описывает течение плазмы в *квазинейтральном кинетическом приближении*. В этом приближении исчезает единственный параметр

размерности длины — дебаевская длина. Поэтому возможно её дальнейшее упрощение для таких задач, в которых начальные и граничные условия также не содержат параметров размерности длины. В таких случаях движение становится автомодельным, то есть с течением времени сохраняется подобие в распределении всех величин. Их зависимости от координаты x и времени t выражаются только в виде функции от автомодельной переменной $\tau = x/t$. Это позволяет понизить число независимых переменных в системе уравнений (1.4) до двух. Если предположить, что функция распределения ионов зависит только от τ и v , а остальные величины — только от τ , то из (1.4) имеем [2–4]:

$$\begin{aligned} (v - \tau) \frac{\partial f_i}{\partial \tau} - \frac{Z_i e}{m_i} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \varphi(\tau) &= \frac{T_{e0}}{e} \ln \frac{Z_i n_i(\tau)}{n_{e0}}, \\ n_i(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau, v) dv, \quad n_e(\tau) = Z_i n_i(\tau). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Система (1.5) представляет собой *автомодельное кинетическое приближение*. Она описывает движения, которые устанавливаются в плазме после небольшого по длительности процесса выхода на автомодельный режим.

Почти всегда для решения задач в кинетическом приближении приходится прибегать к численным методам. Численные исследования, как правило, предполагают использование безразмерных уравнений. Согласованная система единиц для обезразмеривания уравнений представляет собой набор величин:

$$\begin{aligned} m_*, \quad n_*, \quad Z_* T_{e0}, \quad (m_*/4\pi Z_* e^2 n_*)^{1/2}, \\ (T_{e0}/4\pi e^2 n_*)^{1/2}, \quad (Z_* T_{e0}/m_*)^{1/2}, \quad T_{e0}/e, \\ (4\pi n_* T_{e0})^{1/2}, \quad n_*(m_*/Z_* T_{e0})^{1/2}, \\ \frac{1}{2} n_* Z_* T_{e0}, \quad \frac{1}{2} n_* Z_* T_{e0} (Z_* T_{e0}/m_*)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

которые служат единицами массы, плотности, температуры, времени, длины, скорости, потенциала, электрического поля, функции распределения, а также энергии единичного объёма и потока энергии через единичную площадь за единицу времени, соответственно. Значение величин, обозначенных звёздочкой, зависит от рассматриваемой задачи. Так, при учёте электронного

движения удобно положить $m_* = m_e$, $n_* = n_{e0}$ и $Z_* = 1$. Такой выбор единиц измерения будем для краткости называть электронной нормировкой. В этой нормировке система уравнений (1.1) для двухкомпонентной плазмы имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{Z_i}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial f_e}{\partial t} + v \frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_e}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -(Z_i n_i - n_e), \\ n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_e = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(x, v, t) dv, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где для безразмерных величин использованы те же обозначения, которые применяются в (1.1) для размерных величин.

При обезразмеривании системы уравнений (1.2), описывающей задачи, в которых интересуются, в основном, ионным движением, надо выбрать $m_* = m_i$, $n_* = n_{e0}$, $Z_* = Z_i$. Нормировку с такими единицами измерения будем называть ионной. Как правило, везде ниже численные результаты будут представлены в этой нормировке. Сохраняя для безразмерных величин обозначения, используемые в (1.2) для размерных величин, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(Z_i n_i - n_e), \quad n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_e = \exp \varphi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

После нормировки систем уравнений (1.4) и (1.5) коэффициенты перед последними членами в кинетических уравнениях обращаются в единицу, а выражение для потенциала приобретает вид:

$$\varphi = \ln Z_i n_i. \tag{1.9}$$

Рассмотренные уравнения решаются при заданных начальных и граничных условиях, определяемых конкретной постановкой задачи.

Для решения задач в кинетической постановке наиболее удобным представляется широко известный метод частиц в ячейке [6–9]. С его помощью мож-

но создать как численные модели плазмы, соответствующие системам уравнений (1.7) или (1.8), так и более сложные многокомпонентные модели плазмы. Материальная среда в этом методе моделируется частицами, каждая из которых описывается её координатой и скоростью. Частицы движутся под действием электромагнитного поля, которое определяется на эйлеровой сетке в соответствии с распределением зарядов и токов. Связь между частичными и сеточными величинами осуществляется с помощью интерполяционных процедур.

Метод частиц в ячейке был реализован в комплексе программ, разработанных для нескольких моделей плазмы, начиная с той, в которой частицами моделируется только один сорт ионов, а электроны предполагаются распределенными по закону Больцмана, и оканчивая моделью, в которой модельными частицами представлено несколько сортов частиц. Это дает возможность одну и ту же задачу рассматривать в разных приближениях. Кроме того, нередко физические частицы одного сорта моделировались двумя или тремя сортами модельных частиц, каждый из которых соответствовал выделенной некоторым образом группе физических частиц.

Разработанные программы были многократно проверены на разных задачах. Полученные численные решения при наличии соответствующих аналитических решений совпадали с последними с высокой точностью. Практическое применение метода частиц в ячейке показало его высокую эффективность для решения нелинейных задач и его универсальность. Последнее позволяет использовать базовую программу для разных задач, внося необходимые изменения и сохраняя при этом единые стандарты в отношении точности и степени разрешения по пространству и по скоростям.

1.2 Уравнения для моментов

Более простой подход к описанию процессов в плазме основан на уравнениях для моментов функции распределения. Стандартная процедура вывода уравнений для моментов состоит в интегрировании по скоростям кинетического уравнения, умноженного поочередно на 1 , v , v^2 , \dots . Выполняя эту процедуру для ионного кинетического уравнения из (1.8), можно получить

для случая двухкомпонентной плазмы три следующих уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x} (n_i T_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + 2T_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

в которые, кроме плотности n_i , входят еще ионная потоковая скорость V_i , температура T_i и тепловой поток \mathcal{G}_i . Эти и другие часто используемые величины: энергия \mathcal{E}_i , поток частиц J_i и поток энергии Q_i выражаются через функцию распределения ионов $f_i = f_i(x, v, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{n_i} \int_{-\infty}^{\infty} v f_i dv, & T_i &= \frac{m_i}{n_i} \int_{-\infty}^{\infty} (v - V_i)^2 f_i dv, \\ \mathcal{G}_i &= m_i \int_{-\infty}^{\infty} (v - V_i)^3 f_i dv, & \mathcal{E}_i &= m_i \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_i dv, \\ J_i &= n_i V_i, & Q_i &= m_i \int_{-\infty}^{\infty} v^3 f_i dv. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Энергия \mathcal{E}_i относится к единице объёма, а все потоки (J_i , Q_i и \mathcal{G}_i) характеризуют перенос соответствующих величин через единичную площадь за единицу времени. Введённые величины связаны между собой соотношениями:

$$\mathcal{E}_i = m_i n_i V_i^2 + n_i T_i, \quad Q_i = \mathcal{G}_i + m_i n_i V_i^3 + 3n_i T_i V_i. \quad (1.12)$$

Для удобства использования (1.11) и (1.12) при другой нормировке в случае трёхкомпонентной плазмы здесь явно записана величина m_i , равная единице.

Система уравнений (1.10), дополненная уравнением Пуассона, не является замкнутой. В аналогичной ситуации при описании сплошной среды к системе уравнений для моментов добавляется уравнение состояния, и система газодинамических уравнений становится замкнутой. В случае бесстолкновительной плазмы для ряда задач, в том числе и для рассматриваемых здесь, можно без большой ошибки пренебречь последним членом в левой части последнего уравнения (1.10), как это предложено в [5], и прервать цепочку уравнений для моментов. Сравнивая полученное при этом уравнение для изменения

температуры с первым уравнением в (1.10), можно найти интеграл [5]:

$$T_i/n_i^2 = T_{i0}/n_{i0}^2 = \text{const.} \quad (1.13)$$

Заменяя этим соотношением последнее уравнение в (1.10), запишем систему уравнений для двухкомпонентной плазмы в *приближении трёх моментов*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x} (n_i T_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= n_e - Z_i n_i, \\ T_i &= T_{i0} (n_i/n_{i0})^2, \quad n_e = \exp \varphi. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Легко видеть, что если сделать замену $\hat{n}_i = Z_i n_i$, то система уравнений (1.14) с переменной \hat{n}_i вместо n_i будет иметь точно такой же вид, как и при подстановке в (1.14) $Z_i = 1$. Поэтому решение при $Z_i = 1$ легко распространяется и на другие значения Z_i . Ниже в численных расчётах всегда принимается $Z_i = 1$.

Сравнение двух последних членов во втором уравнении системы (1.14) показывает, что при ионных температурах, близких к температуре электронов $T_i \sim 1$, электрическое поле и тепловое движение ионов вносят примерно одинаковый вклад, а при $T_i \ll 1$ влиянием давления ионов вообще можно пренебречь, положив $T_i = 0$. В этом случае (1.14) переходит в систему уравнений, которые образуют *гидродинамическое приближение*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= n_e - Z_i n_i, \quad n_e = \exp \varphi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Это приближение эквивалентно выбору функции распределения ионов в односкоростном виде: $f_i(x, v, t) = n_i(x, t) \delta(v - V_i(x, t))$, где через δ обозначена дельта-функция.

Как и в кинетике, уравнения для моментов упрощаются в квазинейтральном случае. Используя соотношение квазинейтральности $n_e = Z_i n_i$, можно

преобразовать систему уравнений (1.14) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x} n_i (T_i + 1) &= 0, \\ T_i = T_{i0} (n_i/n_{i0})^2, \quad \varphi = \ln Z_i n_i, \quad n_e = \exp \varphi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Эта система представляет собой *квазинейтральное приближение трёх моментов*:

Отметим важную особенность квазинейтральных течений. Квазинейтральные приближения (1.4) и (1.16) могут быть записаны в виде соответствующих автомодельных приближений (в частности, из (1.4) получаем (1.5)). Однако применение последних возможно лишь для тех задач, в которых начальные и граничные условия не содержат параметров размерности длины. Наличие в задаче даже одного характерного пространственного размера L приводит к тому, что течение не будет самоподобным. Но можно ожидать, что оно будет подобно другому течению с другим значением L .

Чтобы убедиться в этом, достаточно в уравнениях квазинейтральных приближений перейти, например, к таким переменным

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L}. \quad (1.17)$$

Важно, чтобы в новых переменных исходные уравнения сохраняли свой вид, а характерный размер, хотя и не исчезал, но принимал равное единице значение. При этом задача становится универсальной, не зависящей от L .

При подобии течений с разными значениями L нет необходимости решать задачу многократно. Имея решение для некоторого L в переменных (\bar{x}, \bar{t}) , легко найти решение в исходных переменных (x, t) для любого другого L .

1.3 Квазинейтральные течения

Важным классом движений плазмы в рассматриваемых ниже задачах являются квазинейтральные течения. Для их исследования воспользуемся уравнениями для моментов, которые аналогичны уравнениям газодинамики.

В газодинамике имеется ряд хорошо разработанных методов решения. Некоторые из них оказываются удобными при изучении наших задач.

1.3.1 Инварианты Римана

Рассмотрим движение квазинейтральной плазмы, используя систему уравнений квазинейтрального приближения трёх моментов (1.16) [228]. Поскольку в этой системе величины T_i , φ и n_e непосредственно определяются через n_i , задача, по сути дела, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными, которая может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{c_i^2}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{1.18}$$

где величина $c_i = c_i(n_i)$ представляет собой скорость звука и определяется по формуле:

$$c_i^2 = 1 + 3T_i = 1 + 3T_{i0} \frac{n_i^2}{n_{i0}^2}.\tag{1.19}$$

Вводя переменную

$$u = \int_{n_{i0}}^{n_i} \frac{c_i}{n_i} dn_i,\tag{1.20}$$

запишем систему уравнений (1.18) в характеристической форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(V_i + u) + (V_i + c_i) \frac{\partial}{\partial x}(V_i + u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(V_i - u) + (V_i - c_i) \frac{\partial}{\partial x}(V_i - u) &= 0.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Заметим, что между величиной u и плотностью n_i имеется однозначное соответствие, устанавливаемое выбором значения нижнего предела интегрирования в (1.20), то есть $u = u(n_i)$. Видно, что вдоль характеристик C_p и C_q , определяемых, соответственно, уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = V_i + c_i, \quad \frac{dx}{dt} = V_i - c_i,\tag{1.22}$$

сохраняют свое значение, соответственно, величины

$$p = V_i + u, \quad q = V_i - u, \quad (1.23)$$

которые представляют собой некоторые функции от переменных n_i и V_i .

В газодинамике величины p и q называются *инвариантами Римана*. Для их вычисления надо найти u . Из формул (1.19) и (1.20) можно установить, что

$$u = c_i - c_{i0} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} - \ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} \right), \quad (1.24)$$

где

$$c_{i0} = \sqrt{1 + 3T_{i0}}. \quad (1.25)$$

В случае холодных ионов $T_{i0} \rightarrow 0$ из (1.19), (1.24) и (1.25) получим

$$u = \ln \frac{n_i}{n_{i0}}, \quad c_i = c_{i0} = 1. \quad (1.26)$$

1.3.2 Простые волны

Инварианты Римана удобно использовать для описания простых волн (волн Римана). Стандартное описание таких волн в газодинамике [11], применённое к нашему случаю, будет выглядеть следующим образом. Рассмотрим движение, при котором один из инвариантов Римана, p или q , сохраняет свое значение в некоторой пространственно-временной области течения. Пусть

$$q = \text{const}. \quad (1.27)$$

Тогда, раскрывая в этом уравнении выражение для q из (1.23), нетрудно убедиться, что любая из величин n_i , c_i , V_i и p может рассматриваться как функция от любой другой из них. При этом нет явной зависимости от независимых переменных x и t . В этих условиях вдоль каждой характеристики C_p , где по определению постоянен инвариант p , постоянными будут и однозначно определяемые через p значения V_i и c_i . В результате мы получаем, что в правой части уравнения для характеристик C_p (1.22) стоит постоянная величина, и поэтому характеристики C_p являются прямыми линиями:

$$x = (V_i + c_i)t + x_0(p). \quad (1.28)$$

Функция $x_0(p)$ определяется начальными и граничными условиями задачи, ее же аргументом может быть не только p , но и любая из величин n_i , c_i или V_i . Уравнения (1.27) и (1.28) в неявном виде представляют зависимости скорости потока V_i и скорости звука c_i от координаты x и времени t .

Аналогичным образом можно получить другое решение:

$$p = \text{const}, \quad (1.29)$$

$$x = (V_i - c_i)t + x_0(q), \quad (1.30)$$

содержащее определяемую условиями задачи функцию $x_0(q)$.

Из полученных соотношений видно, что значения V_i , c_i , n_i , как и значение соответствующего инварианта Римана, переносятся вдоль оси x с постоянной скоростью, равной $V_i + c_i$ в первом случае и $V_i - c_i$ во втором, то есть течение действительно имеет вид волны.

Как и в газодинамике, здесь можно различать волны сжатия и волны разрежения, соответствующие увеличению или уменьшению плотности в каждом элементе среды при распространении простой волны. В волне сжатия с течением времени прямолинейные характеристики на плоскости (x, t) сходятся. Сходящиеся характеристики при этом пересекаются, создавая тем самым неопределенность в значениях параметров. Это разрешается появлением разрыва, после чего волна сжатия перестает быть простой. В волне разрежения характеристики расходятся, и разрывы не образуются.

В невозмущенной области 0 величина u , согласно (1.24), равна нулю. Используя (1.23), можно установить, что константы в (1.27) и (1.29) имеют значения, равные скорости ионов в невозмущенной области V_{i0} . Поэтому (1.27) и (1.29) могут быть переписаны в виде:

$$V_i - V_{i0} = \pm \left[c_i - c_{i0} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} - \ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} \right) \right]. \quad (1.31)$$

При $T_{i0} \rightarrow 0$ (1.31) упрощается:

$$V_i - V_{i0} = \pm \ln \frac{n_i}{n_{i0}}. \quad (1.32)$$

В соотношениях (1.31) и (1.32) верхний знак соответствует (1.27), нижний — (1.29). Таким образом, в простой волне два значения скорости ионов

V_i и V_{i0} в двух точках пространства оказываются связаны определёнными соотношениями с двумя значениями плотности ионов n_i и n_{i0} в тех же самых точках.

Несмотря на то, что решения в виде простой волны представляют собой всего лишь особый интеграл газодинамических уравнений [10], они являются важнейшим элементом при построении полного решения газодинамических задач. В самом деле, хорошо известно утверждение о том, что если в непрерывном течении имеется прямолинейная характеристика с постоянными значениями параметров вдоль нее, то к этой характеристике примыкает либо течение с постоянными параметрами, либо простая волна [11]. Поэтому область постоянного течения может граничить со своим продолжением или переходить непрерывным образом через прямолинейную характеристику только в область простой волны. Любое же иное течение должно быть отделено от области постоянного течения областью простой волны.

Аналитические выражения для простой волны при $T_{i0} \rightarrow 0$ (формулы (1.32) совместно с (1.28) или (1.30)) впервые были найдены в [2] и широко использовались на протяжении многих лет. Выражение (1.31), описывающее совместно с (1.28) или (1.30) простую волну в случае конечной температуры ионов $T_{i0} \neq 0$, было впервые получено автором в [221]. Использование инвариантов Римана для изучения простых волн в бесстолкновительной плазме рассматривалось в статьях автора [222, 228].

1.3.3 Произвольное движение квазинейтральной плазмы

Кроме решения в виде простых волн, удаётся найти решения в законченном виде и в некоторых более общих случаях [228]. Запишем (1.21) в виде, при котором в качестве искомым функций приняты инварианты Римана (1.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{1}{2}(p + q) + c_i \right] \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \left[\frac{1}{2}(p + q) - c_i \right] \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Здесь величина c_i может рассматриваться как функция от p и q , не содержащая явной зависимости от x и t . В самом деле, из уравнений (1.23) и (1.24) следует:

$$p - q = 2 \left[c_i - c_{i0} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} - \ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} \right) \right], \quad (1.34)$$

то есть величина $p - q$ является функцией от c_i . Поскольку эта функция монотонно возрастает с ростом c_i , она может быть обращена, и обратная функция $c_i = c_i(p - q)$ будет однозначно зависеть от $p - q$.

В результате мы получили однородную систему двух квазилинейных уравнений, коэффициенты которых не зависят явно от x и t . Как известно [12, 14], такую систему можно существенно упростить, преобразовав её в систему линейных уравнений. Это достигается путем перемены ролей зависимых и независимых переменных (преобразование годографа). При этом для взаимно однозначного соответствия между областью переменных x, t и областью переменных p, q необходимо, чтобы оба функциональные определители (якобианы)

$$\frac{D(x, t)}{D(p, q)} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial t}{\partial p}, \quad \frac{D(p, q)}{D(x, t)} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (1.35)$$

были отличны от нуля. В противном случае двумерный элемент площади в области одних переменных может преобразовываться в линию или даже в точку в области других переменных, а исходная и преобразованная системы уравнений уже не будут эквивалентными.

Рассмотрим, например, чему соответствует равенство нулю второго якобиана в (1.35). Используя уравнения (1.33), получим

$$\frac{D(p, q)}{D(x, t)} = 2c_i \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Поскольку $c_i \neq 0$, то хотя бы один из инвариантов Римана принимает постоянное значение в рассматриваемой области. Очевидно, что постоянство обоих инвариантов Римана имеет место в однородном потоке, а при $q = const$ или $p = const$ течение представляет собой простую волну (1.27), (1.28) или (1.29), (1.30), соответственно. Таким образом, простая волна есть особое решение, соответствующее равенству нулю якобиана преобразования, и оно

непосредственно не будет содержаться в общем решении преобразованных уравнений. Этот факт хорошо известен в газодинамике [13].

Рассмотрим (1.33), следуя стандартной процедуре, применяемой при изучении подобных систем уравнений [14]. Выполним сначала преобразование годографа и получим систему линейных уравнений для зависимых x, t и независимых p, q переменных в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial q} - \left[\frac{1}{2}(p+q) + c_i \right] \frac{\partial t}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial p} - \left[\frac{1}{2}(p+q) - c_i \right] \frac{\partial t}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Из этой системы легко установить, что выражение

$$dB = \left\{ x - \left[\frac{1}{2}(p+q) + c_i \right] t \right\} dp + \left\{ x - \left[\frac{1}{2}(p+q) - c_i \right] t \right\} dq$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции B , для которой

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial p} &= x - \left[\frac{1}{2}(p+q) + c_i \right] t, \\ \frac{\partial B}{\partial q} &= x - \left[\frac{1}{2}(p+q) - c_i \right] t.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Функции x и t выражаются через производные от B :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2c_i} \left\{ \left[\frac{1}{2}(p+q) + c_i \right] \frac{\partial B}{\partial q} - \left[\frac{1}{2}(p+q) - c_i \right] \frac{\partial B}{\partial p} \right\}, \\ t &= \frac{1}{2c_i} \left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} \right),\end{aligned}\tag{1.38}$$

а сама функция B удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p \partial q} + \frac{1}{4c_i^3} \left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} \right) = 0.\tag{1.39}$$

При выводе этого уравнения, кроме уравнений (1.36)–(1.38), мы использовали также выражение (1.34) при вычислении производной от функции $c_i = c_i(p-q)$.

Подстановка

$$B = G \exp \left[- \int_0^{p-q} \frac{d\eta}{4c_i^3(\eta)} \right],\tag{1.40}$$

приводит уравнение (1.39) к более простому виду для функции G :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial q} + bG = 0, \quad (1.41)$$

где

$$b = \frac{7 - 6c_i^2}{16c_i^6}.$$

Очевидно, что для любой конкретной задачи решение уравнения (1.41), удовлетворяющее соответствующим начальным и граничным условиям, совместно с формулами (1.38) и (1.40) даёт полное решение задачи.

Коэффициент b зависит от величины c_i , которая является достаточно сложной и неявной функцией от $p - q$. Это затрудняет изучение произвольного движения при $T_{i0} \neq 0$. Однако в случае $T_{i0} = 0$ указанный коэффициент превращается в число $b = 1/16$, и это упрощает как связь между V и G :

$$V = G \exp \left[-\frac{1}{4}(p - q) \right], \quad (1.42)$$

так и само уравнение (1.41). Для некоторых задач появляется возможность найти решение в законченном виде. Пример такого решения дан ниже.

1.3.4 Задача Гурса

Как было выше отмечено, область произвольного течения должна быть отделена от однородного потока областью простой волны. При этом граница между этими областями будет проходить по характеристикам, а значения величин на этих пограничных характеристиках могут служить естественными граничными условиями для задачи в области произвольного течения. Так может возникнуть одна из типичных задач для произвольного движения плазмы — задача с данными на характеристиках. Такая задача именуется задачей Гурса.

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1.41), задав в качестве граничных условий значения функции G или ее производных на характеристиках. Пограничные характеристики отделяют рассматриваемую область от областей простых волн, в которых они согласно (1.27) и (1.29) имеют вид прямых линий, соответственно, $q = q_0$ и $p = p_0$ в плоскости переменных (p, q) (рисунок 1.1). Пусть на них заданы значения функции:

$$\begin{aligned} G(p_0, q) &= \mathcal{Q}(q), & G(p, q_0) &= \mathcal{P}(p), \\ G(p_0, q_0) &= \mathcal{Q}(q_0) = \mathcal{P}(p_0). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Последнее условие в (1.43) соответствует непрерывности G в точке пересечения характеристик p_0, q_0 .

Для решения задачи воспользуемся методом Римана [15]. Для этого составим выражение

$$K(p, q) = R \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial q} + bG \right) - G \left(\frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} + bR \right), \quad (1.44)$$

где $G(p, q)$ и $R(p, q)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции, и проинтегрируем обе его части по некоторой области в плоскости (p, q) . В отличие от задачи Коши с начальными данными на нехарактеристической кривой (например, на штриховой линии BD на рисунке 1.1), при изучении которого интеграл берется по криволинейному треугольнику $\triangle BCD$ [15, 16], здесь мы выбираем область интегрирования в виде прямоугольника $ABCD$, образованного отрезками характеристик AB и AD , на которых заданы граничные условия, и параллельными им отрезками CD и CB , проходящих через произвольную точку C . На рисунке 1.1 показан один из четырех возможных вариантов области интегрирования, соответствующий случаю $p < p_0, q > q_0$.

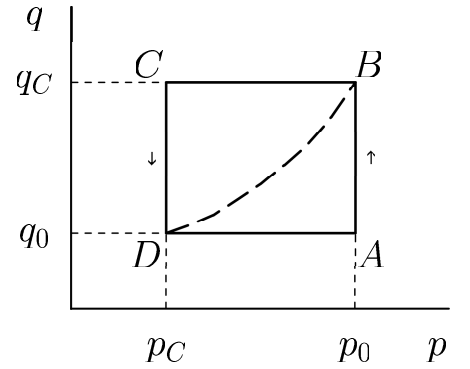


Рисунок 1.1. Область интегрирования в плоскости (p, q) .

Получим

$$\iint_{ABCD} K dp dq = \frac{1}{2} \iint_{ABCD} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(R \frac{\partial G}{\partial q} - G \frac{\partial R}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(G \frac{\partial R}{\partial p} - R \frac{\partial G}{\partial p} \right) \right] dp dq.$$

С помощью формулы Грина правая часть этого соотношения может быть преобразована в интеграл по контуру Γ , состоящему из четырех отрезков AB , BC , CD и DA , параллельных координатным осям:

$$\iint_{ABCD} K dp dq = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(G \frac{\partial R}{\partial p} - R \frac{\partial G}{\partial p} \right) dp + \left(R \frac{\partial G}{\partial q} - G \frac{\partial R}{\partial q} \right) dq.$$

После простых преобразований находим

$$GR|_C = GR|_A + \int_A^B R \frac{\partial G}{\partial q} dq + \int_A^D R \frac{\partial G}{\partial p} dp - \int_C^B G \frac{\partial R}{\partial p} dp - \int_C^D G \frac{\partial R}{\partial q} dq - \iint_{ABCD} K dpdq.$$

Пусть функция G — решение поставленной выше задачи Гурса с граничными условиями на отрезках характеристик AB и AD , а функция R — решение другой задачи Гурса для того же уравнения, но с граничными условиями, поставленными на других отрезках, на CB и CD , и имеющими вид:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial p} \right|_{CB} = 0, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial q} \right|_{CD} = 0, \quad R|_C = 1. \quad (1.45)$$

Тогда по (1.44) K равно нулю, а приведенная выше связь между функциями G и R превращается в простую формулу для решения исходной задачи Гурса:

$$G|_C = GR|_A + \int_A^B R \mathcal{Q}'(q) dq + \int_A^D R \mathcal{P}'(p) dp, \quad (1.46)$$

определяющей значение $G|_C$ в точке C . (Заметим, что $G|_A = \mathcal{Q}(q_0) = \mathcal{P}(p_0)$.)

Задача свелась к определению функции R , называемой функцией Римана, зависящей не только от p и q , но и от координат p_C и q_C точки C , то есть $R = R(p, q; p_C, q_C)$. Граничные условия (1.45) можно представить как

$$R|_{CB} = R|_{CD} = 1, \quad (1.47)$$

а соответствующее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} + bR = 0. \quad (1.48)$$

Возможность нахождения функции Римана зависит от вида функции $b = b(p - q)$. Для плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ эта функция принимает постоянное значение $b = 1/16$, и уравнение (1.48) допускает аналитическое решение [15], которое можно искать в виде $R = R(y)$, где

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\pm(p - p_C)(q - q_C)}.$$

Верхний знак выбирается при $(p - p_C)(q - q_C) \geq 0$, а нижний — в противоположном случае. Подстановка $R(y)$ в (1.48) даёт обыкновенное

дифференциальное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$R''(y) + \frac{1}{y}R'(y) \pm R(y) = 0$$

с тем же условием на выбор знака. Его решение, принимающее конечное значение при $y = 0$, выражается следующим образом:

$$R = \begin{cases} J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(p-p_C)(q-q_C)}\right) & \text{при } (p-p_C)(q-q_C) \geq 0, \\ I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-(p-p_C)(q-q_C)}\right) & \text{при } (p-p_C)(q-q_C) < 0, \end{cases} \quad (1.49)$$

где $J_0(y)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а $I_0(y)$ — модифицированная функция Бесселя (функция мнимого аргумента) нулевого порядка. В общем случае решение (1.49) должно содержать произвольный постоянный множитель. Согласно (1.47) этот множитель надо положить равным единице.

Запишем (1.46) в окончательном виде для решения уравнения (1.41) с постоянным $b = 1/16$, удовлетворяющее условиям (1.43) на характеристиках:

$$G(p, q) = G(p_0, q_0)Y_0(y_1) + \int_{q_0}^q Y_0(y_2)\mathcal{Q}'(\eta) d\eta + \int_{p_0}^p Y_0(y_3)\mathcal{P}'(\xi) d\xi, \quad (1.50)$$

где в случае $(p-p_0)(q-q_0) \geq 0$ обозначено $Y_0(y) = J_0(y)$, а также

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(p_0-p)(q_0-q)}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(p_0-p)(\eta-q)}, \quad y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi-p)(q_0-q)}.$$

В противоположном случае $(p-p_0)(q-q_0) < 0$ те же обозначения имеют несколько иной смысл: $Y_0(y) = I_0(y)$, а y_k ($k = 1, 2, 3$) записываются как

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(p-p_0)(q_0-q)}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(p-p_0)(\eta-q)}, \quad y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi-p)(q-q_0)}.$$

Используя эти формулы и уравнения (1.38) и (1.42), можно найти функции $x(p, q)$ и $t(p, q)$. Кроме того, плотность ионов может рассматриваться как неявная функция $n_i = n_i(p, q)$, что следует из (1.19) и (1.34), а из (1.23) имеем $V_i = (p+q)/2$. В результате, все величины x, t, n_i и V_i являются функциями от p и q , что означает параметрическое представление зависимостей $n_i(x, t)$ и $V_i(x, t)$. Параметрами выступают инварианты Римана p и q .

Таким образом, задача о произвольном движении плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$, определяемом исходными данными на характеристиках (задача Гурса), может быть решена в законченном аналитическом виде.

Рассмотренный метод описания произвольного движения квазинейтральной плазмы и его применение для решения задачи Гурса были предложены автором в [228].

1.4 Стационарные течения

1.4.1 Уравнения стационарного течения

Важным классом движений бесстолкновительной плазмы являются стационарные течения. Параметры таких течений в каждой точке пространства остаются неизменными во времени. В частности, движение волны, при котором её пространственный профиль перемещается как целое с постоянной скоростью D , будет стационарным в её системе отсчета. Связь между координатами в исходной системе отсчёта x и в системе отсчёта волны z имеет вид:

$$z = x - Dt. \quad (1.51)$$

Запишем уравнения стационарного движения ионов в приближении трёх моментов (1.14). Полагая, что все величины зависят от координаты x и времени t в виде комбинации (1.51), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [n_i (V_i - D)] &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} (V_i - D)^2 + \varphi + \frac{3}{2} T_i \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= n_e - Z_i n_i, \\ T_i &= T_{i0} (n_i / n_{i0})^2, \quad n_e = \exp \varphi. \end{aligned} \quad (1.52)$$

При этом дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения.

При записи первых двух уравнений из (1.52) в виде соотношений между параметрами в двух точках, значения величин в одной из этих точек $z = z_a$

будем отмечать индексом a и считать заданными, а величины в произвольной точке z будем считать искомыми. Приравнивая значения квадратных скобок в первых двух уравнениях (1.52) в точках с координатами z и $z = z_a$, получим

$$\begin{aligned} n_i (D - V_i) &= n_{ia} (D - V_{ia}), \\ \frac{1}{2} (D - V_i)^2 + \varphi + \frac{3}{2} T_{i0} \frac{n_i^2}{n_{i0}^2} &= \frac{1}{2} (D - V_{ia})^2 + \varphi_a + \frac{3}{2} T_{i0} \frac{n_{ia}^2}{n_{i0}^2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Считая, что кроме значений величин в точке $z = z_a$ задано также значение D , нетрудно найти из (1.53) зависимости плотности и потоковой скорости ионов от потенциала в точке z :

$$\begin{aligned} n_i &= n_{ia} (2\theta)^{-1/2} \left[1 + \theta - \psi - \sqrt{(1 + \theta - \psi)^2 - 4\theta} \right]^{1/2}, \\ V_i &= D \mp 2 \left[\frac{\kappa\theta}{1 + \theta - \psi - \sqrt{(1 + \theta - \psi)^2 - 4\theta}} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где

$$\psi = \frac{\varphi - \varphi_a}{\kappa}, \quad \theta = \frac{3T_{i0} n_{ia}^2}{2\kappa n_{i0}^2}, \quad \kappa = \frac{1}{2} (D - V_{ia})^2. \quad (1.55)$$

Перенормированный потенциал ψ представляет собой отношение величины, на которую изменится энергия иона при прохождении разности потенциалов $\varphi - \varphi_a$, к кинетической энергии иона относительно волны.

Перед корнем в квадратных скобках в обеих формулах (1.54) выбран знак минус, так как знак плюс дает физически бессмысленный результат: $n_i \rightarrow \infty$ при $T_{i0} \rightarrow 0$. На самом деле, в этом предельном случае из (1.54) получаем

$$\begin{aligned} n_i &= n_{ia} (1 - \psi)^{-1/2}, \\ V_i &= D \mp \sqrt{2\kappa(1 - \psi)}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

В формулах для V_i (1.54) и (1.56) верхний знак соответствует случаю $D - V_{ia} > 0$, а нижний знак — случаю $D - V_{ia} < 0$.

В (1.54) и (1.56) ионная плотность представлена в виде зависимости от перенормированного потенциала ψ . Обозначим для краткости эту зависимость через $n_i(\psi)$ и подставим ее в уравнение Пуассона из (1.52). Получим для перенормированного потенциала ψ следующее уравнение:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{1}{\kappa} [\exp \varphi_a \exp(\kappa\psi) - Z_i n_i(\psi)]. \quad (1.57)$$

Здесь нет явной зависимости от z , и уравнение нетрудно проинтегрировать от $z = z_a$ до текущего значения z , учитывая, что перенормированный потенциал при этом изменяется от $\psi = \psi_a = 0$ до текущего значения ψ . Имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 = \mathcal{K}(\psi), \quad (1.58)$$

где

$$\mathcal{K}(\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 \Big|_{z_a} + \frac{Z_i n_{ia}}{\kappa^2} \{ s_a [\exp(\kappa\psi) - 1] - \kappa \mathcal{N}(\psi) \},$$

$$\mathcal{N}(\psi) = \int_0^\psi \frac{n_i(\xi)}{n_{ia}} d\xi, \quad s_a = \frac{\exp \varphi_a}{Z_i n_{ia}}.$$

Величина s_a характеризует степень квазинейтральности плазмы в точке z_a . В частности, в невозмущённой плазме $s_a = 1$.

Комбинируя производные от величины $(\xi - (\xi^2 - 1)^{1/2})^{1/2}$ и от произведения этой величины на $(\xi^2 - 1)^{1/2}$, можно установить, что

$$\int (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^{1/2} d\xi = \frac{2}{3} (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^{1/2} (\sqrt{\xi^2 - 1} + 2\xi) + const.$$

Используя это выражение для вычисления $\mathcal{N}(\psi)$ в случае $T_{i0} \neq 0$ и проводя несложное интегрирование в предельном случае $T_{i0} = 0$, получим

$$\mathcal{N}(\psi) = \begin{cases} 2 \left[1 + \frac{1}{3}\theta - \frac{1}{3\sqrt{2\theta}} \Upsilon(\psi) \right] & \text{при } T_{i0} \neq 0, \\ 2 (1 - \sqrt{1 - \psi}) & \text{при } T_{i0} = 0, \end{cases} \quad (1.59)$$

где

$$\Upsilon(\xi) = \left[1 + \theta - \xi - \sqrt{(1 + \theta - \xi)^2 - 4\theta} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[2(1 + \theta - \xi) + \sqrt{(1 + \theta - \xi)^2 - 4\theta} \right].$$

В конечном итоге, мы пришли к системе уравнений (1.54) (или (1.56) при $T_{i0} = 0$), (1.55), (1.58) и (1.52), где из последней системы уравнений определяются n_e и T_i . Видно, что задача об описании стационарного движения фактически сводится к необходимости решить уравнение Пуассона (1.58).

1.4.2 Решение уравнения Пуассона

Ниже мы будем полагать, что точка $z = z_a$ находится в невозмущенной области, и $d\psi/dz|_{z_a} = 0$. В этой области потенциал φ в общем случае не должен равняться нулю (невозмущенная область с нулевым потенциалом здесь оговаривается особо и обозначается индексом 0). Поэтому величина $Z_i n_{ia} = \exp \varphi_a$ может отличаться от единицы.

При выводе (1.58) мы фактически использовали точку $z = z_a$ как границу с граничным условием $\psi = \psi_a = 0$. Для выбора второго граничного условия будем исходить из следующих соображений. Стационарное движение описывается некоторой зависимостью $\psi = \psi(z)$. Функция ψ может принимать одно и то же значение при разных z , как это имеет место, например, в осцилляторной структуре бесстолкновительной ударной волны. Это означает, что обратная функция z от ψ может быть неоднозначной. При этом z не входит явно в уравнение (1.58) и второе граничное условие надо задавать в точно определенном месте стационарной структуры, например, в точке экстремума $z = z_m$, где экстремальное значение $\psi = \psi_m$. Кроме того, рассмотрение ограничивается ближайшей к точке z_a областью монотонного изменения ψ от $\psi = 0$ до $\psi = \psi_m$ и, соответственно, z от z_a до z_m . Такой областью, в частности, может быть фронт волны, представляющий переход от невозмущенной области к точке первого экстремума стационарно движущейся волны. Значение $z_m = x_m - Dt$ может быть принято равным нулю, если считать, что x_m — это координата точки экстремума, движущейся равномерно в соответствии с уравнением $x_m = Dt$ в лабораторной системе координат. Предложенная постановка граничных условий соответствует задаче Дирихле для одномерного случая. Значение $\psi = \psi_m$ в точке экстремума определяется как корень уравнения

$$\mathcal{K}(\psi_m) = 0. \quad (1.60)$$

Второе граничное условие учтем, проинтегрировав (1.58) от $z = z_m = 0$ до текущего значения z :

$$\pm \sqrt{2}z = \int_{\psi_m}^{\psi} \frac{d\xi}{[\mathcal{K}(\xi)]^{1/2}}. \quad (1.61)$$

Выбор знака в (1.61) зависит от взаимного положения волны и невозмущенной области a : при $z_a - z_m = z_a > 0$ берем знак плюс, при $z_a < 0$ — знак минус. Полученное соотношение представляет собой неявную зависимость ψ от отклонения текущей координаты от координаты экстремума. Используя её, можно найти пространственные распределения для n_i , V_i , T_i и n_e .

Зависимость $\psi(z)$ может быть определена с помощью численного интегрирования (1.61) при условии, что $\mathcal{K}(\psi) > 0$. Однако точка экстремума $z_m = 0$ является особой для несобственного интеграла (1.61). При численном интегрировании область вблизи этой точки должна быть исключена. Для выделения особенности представим (1.61) в виде суммы двух интегралов. Первый из них берется по малой области, в которой находится особенность, и вычисляется аналитически с любой требуемой точностью. Вторым интеграл берется по оставшейся, не содержащей особенностей области стандартным методом. Интеграл (1.61) можно представить в виде:

$$\int_{\psi_m}^{\psi} \frac{d\xi}{[\mathcal{K}(\xi)]^{1/2}} = \int_{\psi_m + \Delta\psi}^{\psi} \frac{d\xi}{[\mathcal{K}(\xi)]^{1/2}} + 2 \left[\frac{\Delta\psi}{\mathcal{K}'(\psi_m)} \right]^{1/2} - \frac{1}{6} \mathcal{K}''(\psi_m) \left[\frac{\Delta\psi}{\mathcal{K}'(\psi_m)} \right]^{3/2}, \quad (1.62)$$

где $\Delta\psi$ — малое отклонение ψ от особой точки, и в правой части стоит собственный интеграл. Зная экстремальное значение $\psi = \psi_m$ и определив производные от $\mathcal{K}(\psi)$ по ψ , взятые в этой точке, можно вычислить $\psi(z)$.

Значение ψ_m определяется из (1.60), которое представляет собой связь между ψ_m и κ , то есть связь между амплитудой волны и скоростью ее движения. Поскольку точку z_a мы выбираем в невозмущенной области ($d\psi/dz|_{z_a} = 0$ и $s_a = 1$), то уравнение (1.60) можно записать в виде:

$$\exp(\kappa\psi_m) - 1 - \kappa\mathcal{N}(\psi_m) = 0. \quad (1.63)$$

При $T_{i0} = 0$ соотношение (1.63) удобно переписать в исходных переменных:

$$D - V_{ia} = \pm \frac{\exp(\varphi_m - \varphi_a) - 1}{\sqrt{2} [\exp(\varphi_m - \varphi_a) - (\varphi_m - \varphi_a) - 1]}, \quad (1.64)$$

где $\varphi_m = \kappa\psi_m + \varphi_a$ — экстремальное значение φ . Такая формула при $\varphi_a = 0$ была выведена в [17, 18] для скорости ионно-звукового солитона, движущегося с амплитудой φ_m в плазме с холодными ионами. Отметим, что здесь при выводе формулы использовалось только условие стационарности движения.

Таким образом, мы имеем возможность определить профиль потенциала на фронте стационарно движущейся сверхзвуковой волны.

1.4.3 Влияние ионной температуры

Стационарно движущаяся волна характеризуется амплитудой и скоростью движения, которые связаны соотношением (1.63). При этом оказывается, что диапазон возможных значений этих величин ограничен, и здесь важную роль играет третий параметр — температура ионов T_{i0} , которая задаёт значение введённой в (1.55) величины θ . Из (1.54) и (1.59) можно установить, что при $T_{i0} \neq 0$ значения перенормированного потенциала ψ ограничены сверху некоторым значением, которое принято называть критическим:

$$\psi_{cr} = (1 - \sqrt{\theta_{cr}})^2. \quad (1.65)$$

Полагая для простоты $V_{ia} = 0$ и обозначая индексом cr также те значения θ , κ и D , которые соответствуют ψ_{cr} , получим из (1.55):

$$\theta_{cr} = \frac{3T_{i0}}{2\kappa_{cr}}, \quad \kappa_{cr} = \frac{1}{2}D_{cr}^2. \quad (1.66)$$

Соотношение (1.65) даёт связь между тремя величинами: φ_{cr} , κ_{cr} (или D_{cr}) и T_{i0} . Его можно записать в виде:

$$\varphi_{cr} = \kappa_{cr} \left(1 - \sqrt{\frac{3T_{i0}}{2\kappa_{cr}}}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(D_{cr} - \sqrt{3T_{i0}}\right)^2. \quad (1.67)$$

При $\varphi > \varphi_{cr}$ решения не существуют.

Воспользуемся соотношением (1.63), устанавливающим связь между амплитудой волны φ_m и скоростью её движения D . Подставляя в (1.63) выражение для ψ_{cr} из (1.65), получим уравнение для определения критического значения κ_{cr} :

$$\exp \left[\kappa_{cr} \left(1 - \sqrt{\frac{3T_{i0}}{2\kappa_{cr}}}\right)^2 \right] - (1 + T_{i0}) - 2\kappa_{cr} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3T_{i0}}{2\kappa_{cr}}\right)^{1/4} \right] = 0. \quad (1.68)$$

Это уравнение можно решить численно для любого значения T_{i0} . После определения κ_{cr} вычисляются остальные критические величины по (1.66) и

(1.67). Нетрудно также найти плотность и потоковую скорость ионов при $\psi = \psi_{cr}$ (эти величины также обозначим индексами cr):

$$n_{icr} = n_{ia} \theta_{cr}^{-1/4}, \quad V_{icr} = D_{cr} \mp \sqrt{2\kappa_{cr}} \theta_{cr}^{1/4}, \quad (1.69)$$

где в выражении для потоковой скорости ионов верхний знак соответствует волне, движущейся в положительном направлении, а нижний — волне, движущейся в отрицательном направлении.

В предельном случае плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ уравнение (1.68) принимает вид

$$\exp \kappa_{cr} - 1 - 2\kappa_{cr} = 0. \quad (1.70)$$

При этом $\psi_{cr} = 1$, а ненулевое численное решение уравнения (1.70) дает следующие значения (с точностью до 6 знаков):

$$\varphi_{cr} = \kappa_{cr} = 1,256431, \quad D_{cr} = \mathcal{M}_{cr} = 1,585201. \quad (1.71)$$

Здесь $c_{i0} = 1$, и мы отметили, что D_{cr} совпадает с критическим числом Маха

$$\mathcal{M}_{cr} = \frac{D_{cr}}{c_{i0}}.$$

Как следует из (1.56) (или (1.69)), в случае $T_{i0} = 0$ плотность ионов в критической точке $\psi_m = 1$ растет до бесконечности, а их скорость сравнивается со скоростью волны, то есть в системе отсчета волны ионы останавливаются. При $T_{i0} \neq 0$, как видно из (1.69), в критической точке $\psi = \psi_{cr}$ плотность ионов имеет конечное значение, а их потоковая скорость не достигает скорости волны.

Рассмотрим результаты численных решений уравнения (1.68) и вычислений критических значений по вышеприведенным формулам. Рисунки 1.2–1.5 иллюстрируют влияние ионной температуры T_{i0} на критические значения. Шкала температуры на этих рисунках дана в логарифмическом масштабе. Это связано с тем, что уже при весьма малых значениях $T_{i0} \ll 1$ критические значения потенциала, числа Маха волны и других величин оказываются заметно меньшими, чем в случае полного отсутствия теплового движения ионов $T_{i0} = 0$. В экспериментальных устройствах, как правило, температура ионов всего лишь на один–два порядка, а не на пять и более порядков, ниже температуры электронов. Поэтому критические параметры (1.71), вычисленные для случая $T_{i0} = 0$, в таких устройствах не могут быть достигнуты.

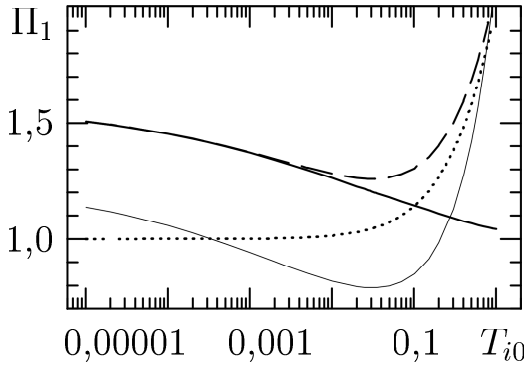


Рисунок 1.2. Критические значения и невозмущённая скорость звука $\Pi_1 = \{\kappa_{cr}, \mathcal{M}_{cr}, D_{cr}, c_{i0}\}$, показанные, соответственно, тонкой сплошной, сплошной, штриховой и пунктирной кривыми как функции от T_{i0}

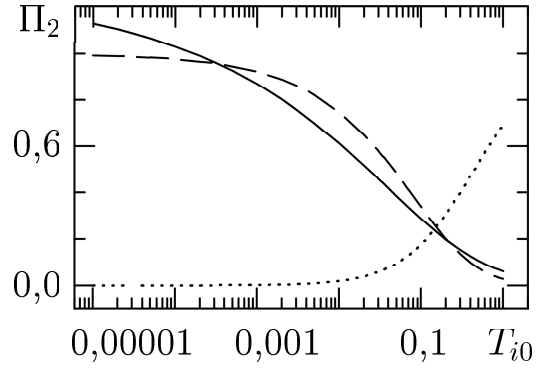


Рисунок 1.3. Критические значения $\Pi_2 = \{\varphi_{cr}, \psi_{cr}, \theta_{cr}\}$, представленные, соответственно, сплошной, штриховой и пунктирной кривыми как функции от T_{i0}

Как видно из рисунка 1.3, θ_{cr} возрастает с увеличением T_{i0} , а ψ_{cr} падает. Они сравниваются $\theta_{cr} = \psi_{cr} = 0,25$ при $T_{i0} \approx 0,15322$. Критическая скорость волны D_{cr} также сначала падает с ростом ионной температуры, а затем, после минимального значения $D_{cr} \sim 1,257$ при $T_{i0} \sim 0,032$, растёт. При этом критическое число Маха \mathcal{M}_{cr} продолжает монотонно падать: с ростом T_{i0} скорость звука c_{i0} увеличивается быстрее, чем D_{cr} , и \mathcal{M}_{cr} падает. Немонотонность зависимости $D_{cr}(T_{i0})$ проявляется и на рисунке 1.5. Здесь построены скорости волны D как функции от φ_m при разных T_{i0} . Скорости лежат в диапазоне от c_{i0} до D_{cr} . Видно, что этот диапазон скоростей с ростом T_{i0} смещается в сторону более высоких значений. Такое смещение соответствует нарастающему участку кривой $D_{cr}(T_{i0})$ (рисунок 1.2). При этом диапазон возможных амплитуд сужается (φ_{cr} падает, рисунок 1.3). Чем выше амплитуда волны, тем уже температурный диапазон для её существования.

Отметим, что описанное поведение зависимости $D_{cr}(T_{i0})$ было интерпретировано в статье [40] как наличие запретных областей ионных температур в плазме с двумя электронными компонентами — холодной и горячей. В этих областях не может существовать такая волна, как ионно-звуковой солитон. Запретная область значений T_{i0} получается, если рассматривать ионно-звуковые солитоны, движущиеся с одной и той же скоростью D (в [40] эта величина

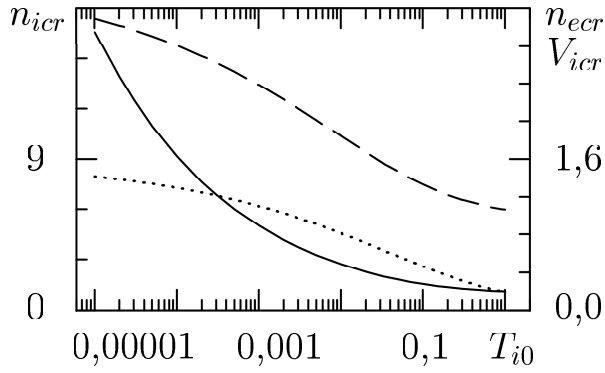


Рисунок 1.4. Зависимости плотностей n_{icer} (сплошная кривая) и n_{ecr} (штриховая кривая, правая ось ординат), а также потоковой скорости ионов V_{icer} (пунктирная кривая, правая ось ординат) в точке $\psi = \psi_{cr}$ от T_{i0}

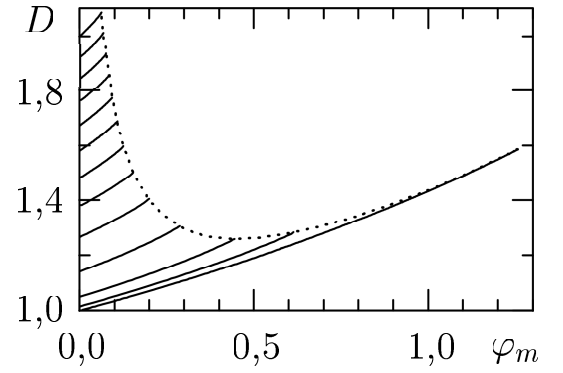


Рисунок 1.5. Зависимость $D(\varphi_m)$ при разных T_{i0} (сплошные кривые снизу вверх): 0, 0,01, 1/30, 0,1 и далее с шагом 0,1 до 1. Пунктирная кривая соединяет точки (φ_{cr}, D_{cr}) в диапазоне ионных температур $0 \leq T_{i0} \leq 1$

именуется числом Маха) при разных температурах T_{i0} . Если D больше, чем минимальное критическое значение скорости солитона, и меньше, чем D_{cr} при $T_{i0} = 0$, то кривая $D = const$, где $(1,257 < const < 1,585201)$, пересечёт кривую $D_{cr}(T_{i0})$ (рисунок 1.2) в двух точках. В диапазоне ионных температур между этими точками скорость D оказывается закритической, и волна существовать не может. По сути дела, в этой интерпретации любое значение температуры ионов можно рассматривать как запретное для волн, скорости которых превышают критическое значение, соответствующее данной температуре ионов.

В работе [28] рассматривался случай заданной ионной температуры $T_{i0} = 1/30$, и для этого случая были определены критические значения потенциала и числа Маха, которые оказались равными, соответственно, 0,443 (в используемых здесь единицах) и 1,199. При расчете этих же величин из решения уравнения (1.68) было получено: $\varphi_{cr} = 0,442882$ и $\mathcal{M}_{cr} = 1,198863$, то есть имеется полное совпадение полученных здесь решений с результатами [28].

Представленный метод для вычисления параметров стационарно движущейся волны, уравнение для определения критических значений, а также влияние на эти значения ионной температуры были обсуждены в статье автора [216].

1.5 Двухпоточковая неустойчивость

При рассмотрении некоторых задач бывает удобно выделить отдельные группы частиц и рассматривать каждую такую группу как определённый «сорт» частиц (например, в системе плазма–пучок). Часто само развитие процесса приводит к образованию двух или большего числа отличающихся потоков частиц. Кроме того, плазма изначально может состоять из нескольких сортов частиц. Возникает задача описания многокомпонентной плазмы. Для этого надо обобщить полученные ранее системы уравнений для двухкомпонентной плазмы. Ограничиваясь случаем плазмы, состоящей из двух сортов ионов и электронов, подчиняющихся бoльцмановскому распределению, дополним (1.8) уравнением и величинами, характеризующими второй сорт ионов, идентифицируемый индексом j . В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial f_j}{\partial t} + v \frac{\partial f_j}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -(Z_i n_i + Z_j n_j - n_{e0} \exp \varphi), \\ n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, v, t) dv, \end{aligned} \tag{1.72}$$

где параметр

$$\mu = \frac{Z_j m_i}{Z_i m_j} \tag{1.73}$$

характеризует ионный состав плазмы. Здесь изменена нормировка: вместо n_{e0} за единицу плотности принята плотность ионов в невозмущённой области n_{i0} . В системе единиц измерения (1.6) в качестве m_* и Z_* выбраны, соответственно, размерное значение массы иона m_i и его зарядовое число Z_i . В дальнейшем для определённости будем полагать, что $Z_i > 0$ и $Z_i n_{i0} \geq |Z_j| n_{j0}$.

В многокомпонентной и в многопоточковой плазме весьма важны вопросы устойчивости движения. Поскольку ниже эти вопросы возникают достаточно часто, представляется уместным привести некоторые результаты изучения неустойчивости двух потоков. Такая неустойчивость давно изучается [20–22].

Здесь мы ограничимся случаем взаимодействия двух потоков, описываемых системой уравнений (1.72). Изложение следует статье автора [226].

Рассмотрим бесстолкновительную плазму, состоящую из электронов и двух сортов ионов, однородно распределенных в пространстве с плотностями n_{ep} , n_{ip} и n_{jp} . Их температуры обозначим через T_{ep} , T_{ip} и T_{jp} , а потоковые скорости ионов — через V_{ip} и V_{jp} . Мы полагаем, что электроны не имеют направленной потоковой скорости, а их температура T_{ep} имеет постоянное значение, равное Z_i^{-1} в наших безразмерных единицах. Здесь невозмущенная область, потенциал которой не обязательно равен нулю, отмечается индексом p . В этой области соблюдается квазинейтральность $Z_i n_{ip} + Z_j n_{jp} = n_{ep}$.

Для исследования устойчивости движения необходимо получить дисперсионное уравнение. Стандартная процедура для нахождения продольной диэлектрической проницаемости плазмы ϵ как функции частоты ω и волнового числа k включает в себя линеаризацию исходных уравнений и их решение для плоской волны [1]. Применяя ее к системе уравнений (1.72) и ограничиваясь случаем, когда фазовые скорости волн заметно отличаются от потоковых скоростей обоих сортов ионов, и температуры ионов невелики ($T_{ip} \rightarrow 0$ и $T_{jp} \rightarrow 0$), можно получить дисперсионное уравнение $\epsilon = 0$ в виде:

$$\epsilon = 1 + \frac{n_{ep}}{k^2} - \frac{Z_i n_{ip}}{(\omega - kV_{ip})^2} \left[1 + \frac{3T_{ip}k^2}{(\omega - kV_{ip})^2} \right] - \frac{Z_j \mu n_{jp}}{(\omega - kV_{jp})^2} \left[1 + \frac{3(T_{jp}/m_j)k^2}{(\omega - kV_{jp})^2} \right] = 0. \quad (1.74)$$

Заметим, что вклад ионов сорта j в дисперсионное уравнение не зависит от знака заряда ($Z_j \mu > 0$ при $Z_i > 0$).

В предельном случае холодных ионов $T_{ip} = T_{jp} = 0$ дисперсионное уравнение можно записать как ¹

$$\frac{\omega_{is}^2}{(\omega - kV_{ip})^2} + \frac{\omega_{js}^2}{(\omega - kV_{jp})^2} = 1, \quad (1.75)$$

где

$$\omega_{is}^2 = \frac{Z_i n_{ip}}{n_{ep}} \frac{k^2}{1 + k^2/n_{ep}}, \quad \omega_{js}^2 = \frac{Z_j \mu n_{jp}}{n_{ep}} \frac{k^2}{1 + k^2/n_{ep}}. \quad (1.76)$$

¹Обсуждение аналогичного уравнения можно найти, например, в [22].

Видно, что частоты ω_{is} и ω_{js} зависят от волнового числа k так же, как частота ионно-звуковых волн в двухкомпонентной плазме. Характерной особенностью таких волн является то, что в пределе длинных волн $k \rightarrow 0$ исчезает дисперсия, и фазовая скорость волны совпадает со скоростью звука.

Уравнение (1.75) имеет четыре корня для частоты ω при произвольном $k \neq 0$. Фазовые скорости при этом могут быть как больше, так и меньше потоковых скоростей ионов, и по этому признаку имеет смысл различать быстрые и медленные волны. Так, например, в простейшем случае, когда в плазме имеется только один поток ионов сорта i ($\omega_{js} = 0$), фазовые скорости волн согласно (1.75) могут быть определены по соотношениям

$$\frac{\omega}{k} = V_{ip} \pm \frac{\omega_{is}}{k}. \quad (1.77)$$

Точно так же можно установить, что в той области фазовых скоростей, где первым членом в левой части уравнения (1.75) можно пренебречь по сравнению со вторым, фазовые скорости будут определяться уравнением

$$\frac{\omega}{k} = V_{jp} \pm \frac{\omega_{js}}{k}. \quad (1.78)$$

Мы видим, что в каждом потоке в отсутствие взаимодействия с другим потоком существуют две волны с разными фазовыми скоростями, определяемыми параметрами только своего потока. Предположим, что эти потоки движутся навстречу друг другу: $V_{ip} > 0, V_{jp} < 0$. Тогда при $k > 0$ из уравнения (1.77) со знаком плюс и уравнения (1.78) со знаком минус следует, что фазовые скорости волн, распространяющихся в направлении своего потока, превосходят по абсолютной величине скорость потока, то есть такие уравнения описывают быстрые волны. Уравнение (1.77) со знаком минус и уравнение (1.78) со знаком плюс дают фазовые скорости медленных волн.

Характерно, что для медленной волны в потоке ионов сорта i всегда существует область значений k : $-\omega_{is}/V_{ip} < k < \omega_{is}/V_{ip}$, в которой фазовая скорость принимает отрицательные значения. Поэтому длинные волны распространяются против потока, а короткие волны — по потоку. Быстрая же волна вне зависимости от её длины движется по направлению движения потока. Подобная ситуация имеет место и для медленной волны в

потоке ионов сорта j . Именно эта возможность распространения медленных волн против потока может в случае движущихся навстречу потоков привести к тому, что фазовые скорости двух волн при некоторых k будут совпадать. При этом, по крайней мере, одна из волн будет медленной. Между синхронно движущимися волнами может происходить обмен энергией, что в конечном счёте означает взаимодействие потоков, в которых возбуждены волны. Для двух медленных волн условие синхронизма при выбранных знаках потоковых скоростей согласно (1.77) и (1.78) запишется в виде:

$$V_{ip} - \frac{\omega_{is}}{k} = V_{jp} + \frac{\omega_{js}}{k}. \quad (1.79)$$

Равенство фазовых скоростей двух волн, из которых одна является медленной, а другая — быстрой, достигается при выполнении одного из условий:

$$V_{ip} \pm \frac{\omega_{is}}{k} = V_{jp} \pm \frac{\omega_{js}}{k}, \quad (1.80)$$

где одновременно выбираются либо оба знака плюс, либо оба знака минус.

Из соотношений (1.79) и (1.80) можно найти те значения волнового числа $k = k_c$ и частоты $\omega = \omega_c$, при которых может возникать взаимодействие волн. В частности, подставляя в (1.79) выражения для ω_{is} и ω_{js} из (1.76), найдём для $k_c > 0$:

$$k_c = \left\{ \frac{[(Z_i n_{ip})^{1/2} + (Z_j \mu n_{jp})^{1/2}]^2}{(V_{ip} - V_{jp})^2} - n_{ep} \right\}^{1/2}, \quad (1.81)$$

$$\omega_c = k_c V_{ip} - \omega_{is}(k_c) = k_c V_{jp} + \omega_{js}(k_c).$$

Эти значения надо рассматривать как приближённые, поскольку (1.79) и (1.80) получены для невзаимодействующих потоков. Чтобы найти более точное решение, представим частоту в виде $\omega = \omega_c + \omega'$, где $|\omega'| \ll |\omega_c|$ и подставим её в (1.75). В результате найдём, что частота ω принимает комплексные значения

$$\omega = \omega_c \pm i \frac{1}{2} [\omega_{is}(k_c) \omega_{js}(k_c)]^{1/2}, \quad (1.82)$$

и одно из решений имеет положительную мнимую часть

$$\gamma = \text{Im } \omega = \frac{1}{2} [\omega_{is}(k_c) \omega_{js}(k_c)]^{1/2}. \quad (1.83)$$

Это означает, что в системе может развиваться неустойчивость с инкрементом γ и частотой ω_c . Значение γ по (1.83) может быть не малым по сравнению с ω_c , и (1.83) следует рассматривать как весьма приближенную оценку γ .

Аналогичное рассмотрение условий (1.80) показывает, что в этих случаях частота — вещественная величина

$$\omega = \omega_c \pm \frac{1}{2}[\omega_{is}(k_c)\omega_{js}(k_c)]^{1/2},$$

то есть неустойчивости нет. Таким образом, к неустойчивости приводит взаимодействие только медленных волн.

Комплексные решения существуют в ограниченной области по k [214]. Граничные значения волнового числа k_b и соответствующей частоты ω_b , как известно [22], являются корнями системы уравнений:

$$\epsilon(\omega, k) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon(\omega, k) = 0.$$

Подставляя ϵ из (1.74), получим формулы для правой границы по k :

$$k_b = \left\{ \frac{[(Z_i n_{ip})^{1/3} + (Z_j \mu n_{jp})^{1/3}]^3}{(V_{ip} - V_{jp})^2} - n_{ep} \right\}^{1/2}, \quad (1.84)$$

$$\omega_b = k_b \frac{(Z_j \mu n_{jp})^{1/3} V_{ip} + (Z_i n_{ip})^{1/3} V_{jp}}{(Z_i n_{ip})^{1/3} + (Z_j \mu n_{jp})^{1/3}}.$$

Комплексные решения существуют для k , значения которых находятся в области $-k_b < k < k_b$. Из (1.81) и (1.84) видно, что $k_b^2 > k_c^2$ всегда.

Из выражения для k_b следует, что при определённом выборе параметров можно получить $k_b = 0$. В этом случае исчезает область неустойчивости, а с ней и сама неустойчивость. Отсюда легко найти критерий для развития неустойчивости, а именно, разность скоростей потоков по абсолютной величине не должна превышать некоторого верхнего граничного значения ΔV_b :

$$|V_{ip} - V_{jp}| < \Delta V_b = \left\{ \frac{[(Z_i n_{ip})^{1/3} + (Z_j \mu n_{jp})^{1/3}]^3}{Z_i n_{ip} + Z_j n_{jp}} \right\}^{1/2}. \quad (1.85)$$

При этом, разумеется, мы полагаем, что эта разность не равна нулю, то есть потоки различимы, и дисперсионное уравнение (1.75) остаётся уравнением четвёртой степени относительно ω . Отметим, что (1.85) совпадает с найденными из других соображений критериями для развития двухпотоковой неустойчивости, записанными несколько иначе, например, в [20, 21].

Глава 2

Ионно-звуковой солитон

Целью исследований, результаты которых излагаются в данной главе, является нахождение основных свойств и условий существования ионно-звукового солитона.

Ионно-звуковой солитон является важнейшей нелинейной структурой и заслуживает особого внимания, поскольку его свойства в ряде случаев оказываются определяющими для понимания рассматриваемых здесь процессов. К примеру, фронт бесстолкновительной ударной волны описывается солитонным решением. В связи с этим представляется уместным, прежде чем переходить к задачам с начальными разрывами, рассмотреть основные свойства ионно-звукового солитона. В главе изучается ионно-звуковой солитон в плазме с холодными ионами и показывается его отличие от свойств солитонов, описываемых уравнением Кортевега - де Вриза (КдВ). Здесь предложено физически обоснованное определение ширины ионно-звукового солитона. Рассмотрена роль отражённых ионов, определена их максимальная доля и установлены области их влияния на движение ионно-звукового солитона при разных ионных температурах.

Проведено численное моделирование солитонов. Показано, что в плазме с конечной температурой ионов возможно устойчивое движение медленно меняющейся солитоноподобной волны при определённом выборе её амплитуды, описана структура «предвестника» из отражённых ионов. Полученные результаты подробно сравниваются с экспериментами, продемонстрировано хорошее совпадение теории и эксперимента. Изложение основано на работах автора [206, 216].

2.1 Солитоны в плазме с холодными ионами

Рассмотрим основные свойства ионно-звукового солитона, распространяющегося с постоянной скоростью в бесстолкновительной плазме. Начнем со случая плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Для нахождения солитонных решений в общем случае надо обращаться к численному интегрированию уравнения (1.61) с выделением особенности по формуле (1.62). В пределе малых амплитуд $\psi_m \ll 1$ для профиля солитона можно получить приближенное аналитическое выражение. Положим, что в точке $z = z_a$, находящейся в невозмущённой области a , выполняются условия $d\psi/dz|_{z_a} = 0$, $s_a = 1$. Рассматриваем общий случай, когда величина $Z_i n_{ia} \neq 1$, то есть область a не совпадает с невозмущённой областью 0 , для которой здесь всегда принимается $Z_i n_{i0} = 1$ и потенциал $\varphi_0 = 0$. Ограничиваясь разложением до членов третьего порядка по ψ в (1.61), получим простые выражения для зависимости ψ и φ от z :

$$\begin{aligned} \psi &= 6 \cdot \frac{2\kappa - 1}{3 - 4\kappa^2} \operatorname{sech}^2 \left[\left(Z_i n_{ia} \frac{2\kappa - 1}{8\kappa} \right)^{1/2} z \right], \\ \varphi - \varphi_a &= \frac{3D^4}{3 - D^4} \left(1 - \frac{1}{D^2} \right) \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[Z_i n_{ia} \left(1 - \frac{1}{D^2} \right) \right]^{1/2} z \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вторая формула записана в предположении, что в области a отсутствует потоковое движение $V_{ia} = 0$. На самом деле, в этой главе мы будем иметь дело со случаем $Z_i n_{ia} = 1$ и $\varphi_a = 0$, что и будет учитываться в последующих формулах. Кроме того, при вычислениях и при численном моделировании должно быть задано значение Z_i . В этих случаях мы будем принимать $Z_i = 1$.

При малых φ величина $D - 1$ также мала. Если во второй формуле (2.1) положить $D^4 \sim 1$ и $Z_i n_{ia} = 1$, то она приобретает вид формулы (40) в [18]. (Заметим, что в этом месте в [18] имеется опечатка: вместо sech стоит sh .)

Для определенности будем полагать, что волна движется в положительном направлении $D > 0$. Из (2.1) нетрудно получить, что в первом приближении по $D - 1$ профиль потенциала имеет вид

$$\varphi = 3(D - 1) \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{D - 1}{2} \right)^{1/2} (x - Dt) \right], \quad (2.2)$$

причем амплитуда потенциала φ_m соответствует зависимости

$$D \approx 1 + \frac{1}{3}\varphi_m. \quad (2.3)$$

Такая же зависимость получается при малых φ_m из точной формулы (1.64) для стационарно движущейся структуры. Согласно этой формуле при рассматриваемых здесь условиях $V_{ia} = 0$, $\varphi_a = 0$, $D > 0$ скорость ионно-звукового солитона принимает вид:

$$D = \frac{\exp \varphi_m - 1}{\sqrt{2(\exp \varphi_m - \varphi_m - 1)}}. \quad (2.4)$$

Решение (2.2) описывает симметричный «горб» потенциала, характерная ширина которого, так же как и амплитуда, определяются скоростью его движения D .

Если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью звука, то скорость волны составит треть от ее амплитуды, что характерно для солитонов, описываемых уравнением КдВ. Более того, в таком виде выражение для φ действительно удовлетворяет уравнению КдВ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0. \quad (2.5)$$

В отличие от исходной системы уравнений (1.52) при $T_{i0} = 0$, в одном уравнении (2.5) сведены два члена, каждый из которых соответствует определенному характеру изменения формы волны. Нелинейный член здесь описывает эффекты укрупнения, а последний член в левой части (2.5) — дисперсионное расширение. Баланс этих двух эффектов при стационарном движении наглядно отражает уравнение КдВ. Этому уравнению в нашем случае подчиняются одновременно возмущения и потенциала, и плотности ионов, и их скорости. Это свидетельствует о том, что уравнение КдВ значительно упрощает физическую картину. Использование стационарных решений типа (2.2) для описания ионно-звукового солитона возможно только при малых амплитудах. Будем именовать такие решения солитонами КдВ, отличая их от ионно-звуковых солитонов — точных солитонных решений исходной системы уравнений (1.52) для стационарного движения.

Расхождение значений скорости ионно-звукового солитона (2.4) и скорости солитона КдВ (2.3) с ростом φ_m можно видеть на рисунке 2.1, где также

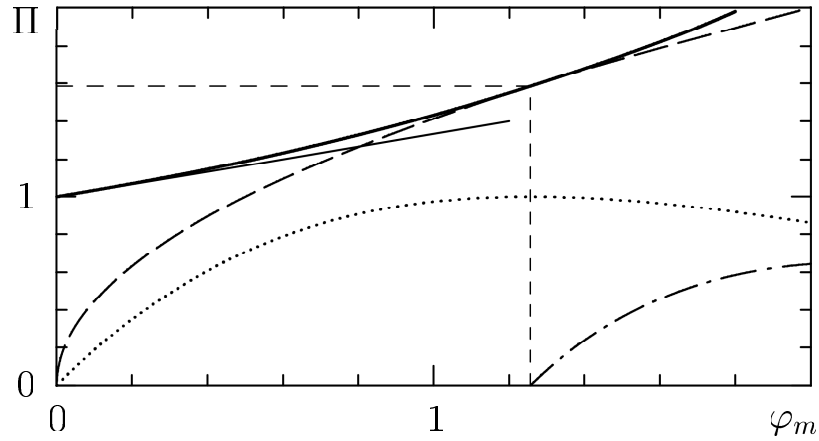


Рисунок 2.1. Параметры солитона $\Pi = \{D, V_r, \psi_m, \mathcal{K}_m\}$ как функции от амплитуды φ_m . Скорость D : формула (2.4) — толстая, формула (2.3) — тонкая сплошные кривые. Параметры V_r , ψ_m и \mathcal{K}_m представлены штриховой, пунктирной и штрихпунктирной кривыми, соответственно. Короткие штрихи показывают критические значения для φ_m и D

представлены другие параметры ионно-звукового солитона в зависимости от φ_m . Здесь приведены «скорость отражения» $V_r = (2\varphi_m)^{1/2}$, а также величины ψ_m и $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(\psi_m)$. Скорость V_r соответствует высоте потенциального барьера солитона. В системе отсчета солитона скорость ионов равна $-D$, и для существования солитона должно выполняться условие $D^2 > V_r^2 = 2\varphi_m$, чтобы налетающие на него ионы преодолевали потенциальный барьер. Это имеет место, как видно из рисунка 2.1, при значениях амплитуды солитона φ_m , меньших найденного выше в (1.71) критического значения φ_{cr} . При $\varphi_m = \varphi_{cr}$ скорость солитона сравнивается с величиной V_r и в соответствии с (1.71) достигает максимально возможного, критического, значения $D = D_{cr} = 1,585201$, а амплитуда перенормированного потенциала ψ_m принимает здесь предельное значение $\psi_m = \psi_{cr} = 1$.

Любопытно отметить, что кривые $D(\varphi_m)$ и $V_r(\varphi_m)$ не пересекаются, а только касаются в точке φ_{cr} . При этом D , вычисленное по формуле (2.4) за точкой касания, снова превосходит величину V_r . Это, однако, не означает, что здесь могут существовать солитоны. Формула (2.4), при выводе которой производилось возведение в квадрат исходного уравнения (1.63), не эквивалентна этому уравнению при $\varphi_m > \varphi_{cr}$. При таких значениях φ_m

величина \mathcal{K}_m , как видно из рисунка 2.1, принимает ненулевые значения, то есть (1.60) не выполняется.

Для нахождения профиля солитона мы можем либо провести численное интегрирование (1.61), воспользовавшись соотношением (1.62), либо применить аналитическую формулу (2.2), если амплитуда солитона мала. На рисунке 2.2 приведены решения (2.2) при малых φ_m в сравнении с точными решениями. Видно, что уже при $\varphi_m = 0,15$ наблюдаются весьма заметные отклонения аналитической зависимости (2.2) от точного решения. Профили солитонов больших амплитуд, при которых формула (2.2) дает значительную погрешность, приведены на рисунке 2.3.

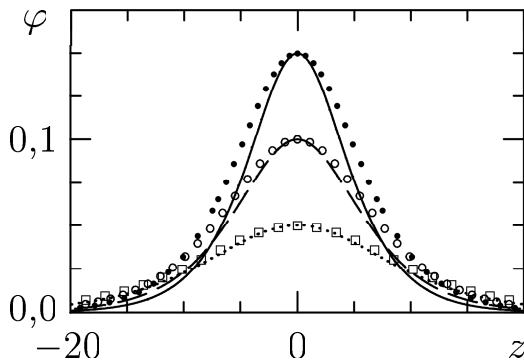


Рисунок 2.2. Профили солитонов, вычисленные по (1.61) (пунктирная, штриховая и сплошная кривые), в сравнении с (2.2) (квадраты, окружности и кружки) при φ_m , равных, соответственно, 0,05, 0,10 и 0,15

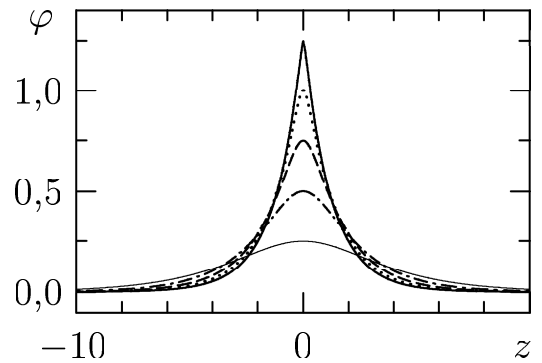


Рисунок 2.3. Зависимости $\varphi(z)$ для солитонов при φ_m , равных 0,25, 0,50, 0,75, 1,00 и 1,25, показанные, соответственно, тонкой сплошной, штриховой, пунктирной, штриховой, пунктирной и сплошной кривыми

Из рисунков 2.2 и 2.3 видно, что с ростом амплитуды солитон становится более узким. Представляется интересным оценить ширину солитона. При исследовании солитонов КдВ пространственный размер солитона определяется из аналитического решения вида (2.2): величина, обратная коэффициенту при $x - Dt$ в аргументе гиперболического секанса, часто называется шириной солитона. На самом деле, эта величина дает полуширину солитона на высоте $\sim 0,42$ от максимального значения. Поскольку

здесь мы будем рассматривать солитоны произвольной амплитуды и численно находить их профили, представляется уместным оперировать не полушириной, а полной шириной солитона Δ . При малых амплитудах приближенное значение ширины солитона, как видно из (2.2), равно

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{2}{D-1}}. \quad (2.6)$$

Чтобы оценить, насколько аналитическое решение отклоняется от точного численного решения, надо и для последнего в качестве ширины солитона выбрать расстояние между двумя точками на оси z , при которых потенциал равен $0,42\varphi_m$. Нетрудно понять, что при этом величина Δ по (2.6) всегда будет превосходить ширину, полученную при точном численном решении, так как для заданного φ_m значение D , вычисленное по формуле (2.3), будет меньше, чем точное значение (рисунок 2.1). Различие в ширине солитона при точном и приближенном решениях хорошо видно на рисунке 2.2. Из (2.2) и (2.6) следует соотношение, связывающее ширину солитона КдВ с его амплитудой φ_m при $D \sim 1$:

$$\Delta^2 \varphi_m = 24. \quad (2.7)$$

Очевидно, что вводимая таким образом ширина подгоняется под удобную форму аналитического решения (2.2), солитона КдВ, точность которого заметно падает при больших φ_m .

Более физически определенной шириной является расстояние между точками перегиба на профиле потенциала. Вторая производная от потенциала в точке перегиба равна нулю, и здесь плотности ионов и электронов сравниваются. В области между двумя точками перегиба, то есть в центре солитона, плотность ионов превышает плотность электронов, что означает наличие нескомпенсированного положительного заряда. В периферийных областях, слева от левой точки перегиба и справа от правой точки перегиба, нескомпенсированный заряд имеет отрицательный знак. Таким образом, ширина солитона, определенная как расстояние между точками перегиба, характеризует пространственный масштаб разделения зарядов и представляет собой ширину области положительного заряда. Интеграл по этой области от разности плотностей ионов и электронов дает значение полного положительного заряда Θ ,

который характеризует степень разделения зарядов в солитоне. Рисунок 2.4 иллюстрирует наличие областей нескомпенсированного заряда, а также дает пример распределения потоковой скорости ионов V_i . Границы между областью положительного заряда и двумя областями отрицательного заряда изображены кружками. Очевидно, что как ширина солитона Δ , так и величина Θ зависят от φ_m . Эти зависимости показаны на рисунке 2.5.

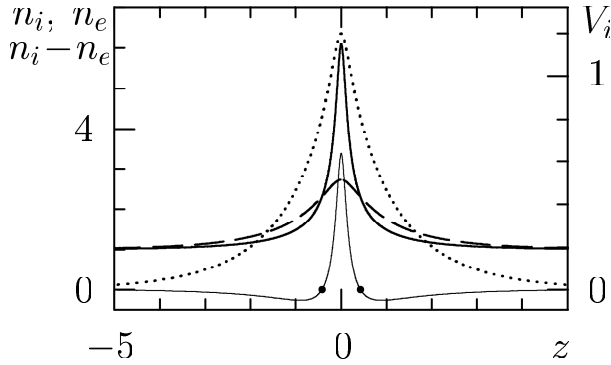


Рисунок 2.4. Пространственные распределения величин в солитоне при $\varphi_m = 1$: n_i — сплошная кривая, n_e — штриховая кривая, $(n_i - n_e)$ — тонкая кривая и V_i — пунктирная кривая, правая ось ординат. На кривой $(n_i - n_e)$ кружками показаны нулевые значения ($n_i = n_e$)

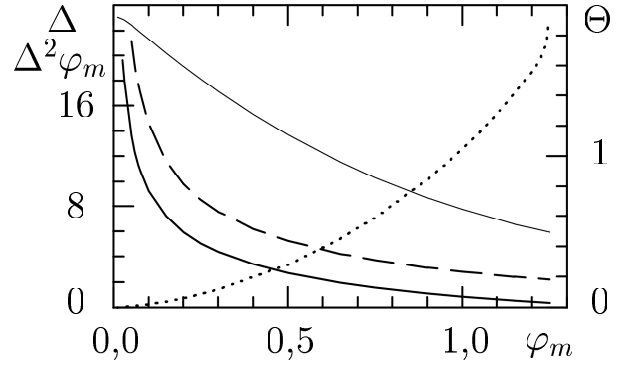


Рисунок 2.5. Ширина солитона Δ на высоте $0,42\varphi_m$ (штриховая кривая) и ширина области положительного заряда (сплошная кривая), а также величина $\Delta^2\varphi_m$ (тонкая кривая) и полный положительный заряд Θ (пунктирная кривая, правая ось ординат) как функции от φ_m

Отметим примечательную особенность. В области малых $\varphi_m < 0,15$ ширина солитона достаточно большая (десятки единиц при $\varphi_m \sim 0,01$) и резко меняется с изменением φ_m . При этом положительный заряд в центре солитона весьма мал. А при $\varphi_m > 0,15$ ширина солитона находится в пределах нескольких единиц и медленно спадает с ростом φ_m . В то же время нескомпенсированный положительный заряд в центре солитона быстро нарастает с увеличением φ_m . В этом смысле солитоны при малых φ_m отличаются от солитонов с большими амплитудами. Первые, по сути дела, являются квазинейтральными образованиями, которые с определенной

погрешностью можно описать стационарным решением уравнения КдВ. Вторые характеризуются заметным разделением зарядов, для их описания надо находить точные решения (1.61).

Из рисунка 2.5 также видно, что характерное для солитонов КдВ постоянство величины $\Delta^2\varphi_m$ не имеет места в случае ионно-звукового солитона. Формула (2.7), по сути дела, отражает баланс между нелинейностью и дисперсией в соответствии с тем, как эти эффекты можно оценить для солитона КдВ из уравнения (2.5). В ионно-звуковом солитоне указанный баланс формируется всей системой связей между физическими величинами в соответствии с исходной системой уравнений (1.52), и его представление в простом виде (2.5) оказывается неверным. Даже при малых φ_m , как показывает рисунок 2.5, происходит быстрое падение $\Delta^2\varphi_m$ с ростом φ_m .

2.2 Влияние ионной температуры и отражённых ионов

В рассмотренном выше случае $T_{i0} = 0$ все свойства ионно-звукового солитона полностью определяются одним параметром — амплитудой потенциала φ_m или скоростью движения D . При учете теплового движения ионов появляется второй определяющий параметр — температура ионов T_{i0} (или величина θ). Влияние ионной температуры на свойства ионно-звукового солитона проявляется, прежде всего, в том, что критические значения параметров волны очень резко зависят от ионной температуры, что подробно обсуждалось в п.1.4.3. Заметное влияние оказывает температура ионов на форму солитона. Расчёты профилей потенциала солитонов по формулам (1.61)–(1.62) показывают, что с ростом T_{i0} ширина солитона уменьшается. И, наконец, при ненулевой температуре ионов возникает весьма важное явление — отражение ионов от волны [19]. В отличие от случая $T_{i0} = 0$, когда налетающий на солитон поток ионов может либо весь отразиться от него, либо весь через него пройти в зависимости от амплитуды солитона и скорости ионов, при $T_{i0} \neq 0$ всегда есть тепловой разброс скоростей ионов. Вследствие этого в потоке ионов имеются частицы, которые движутся недостаточно быстро относительно солитона и будут от него отражены. Остальные ионы преодолеют потенциальный барьер

солитона и пройдут через него. Иными словами, в этом случае возникает два потока частиц, и движение приобретает двухпотоковый характер.

Поток отражённых ионов являются «предвестником» приближающейся основной волны. Плотность ионов перед солитоном возрастает на плотность отражённых ионов в «предвестнике», и образованная таким образом волна плотности движется по невозмущенной области. Строго говоря, движение становится не только двухпотоковым, но и нестационарным. Однако при этом параметры основной волны если и меняются, то не очень быстро, поскольку, как мы увидим ниже, доля отражённых от солитона ионов не превышает нескольких процентов. Поэтому мы будем полагать, что вышеприведенное описание стационарных движений солитона, не учитывающее отражённых ионов, является достаточно хорошим начальным приближением.

Определим диапазон скоростей ионов, которые отразятся при столкновении с «горбом» потенциала, движущимся по невозмущенной области a ($\varphi_a = 0$) со скоростью D . Для иона, имеющего в этой области координату x_a и скорость v_a , условием последующего отражения является то, что его кинетическая энергия в системе отсчета «горба» потенциала не должна превышать потенциальный барьер $\varphi_m - \varphi_a = \varphi_m > 0$. Кроме того, рассматриваемые скорости должны быть таковыми, чтобы со временем данный ион и «горб» потенциала сближались, а не расходились. Исходя из этого можно установить, что отражаются те ионы, чьи скорости v_a лежат в диапазоне

$$\begin{aligned} D < v_a < D + \sqrt{2\varphi_m} & \quad \text{при } x_a - x_m < 0, \\ D - \sqrt{2\varphi_m} < v_a < D & \quad \text{при } x_a - x_m > 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где x_m — положение максимума потенциала φ_m . Диапазон соответствующих скоростей ионов после отражения будет следующим:

$$\begin{aligned} D - \sqrt{2\varphi_m} < \bar{v}_a < D & \quad \text{при } x_a - x_m < 0, \\ D < \bar{v}_a < D + \sqrt{2\varphi_m} & \quad \text{при } x_a - x_m > 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где скорость отражённого иона в лабораторной системе координат

$$\bar{v}_a = 2D - v_a.$$

Теперь мы можем найти весьма важную величину — долю отражённых ионов в общем числе ионов. Значение этой величины определяет степень

влияния отражённых ионов на движение «горба» потенциала. Предполагая, что функция распределения ионов по скоростям в невозмущенной области — максвелловская, проинтегрируем ее по интервалу (2.8) и в результате получим плотность той части движущихся в невозмущенной области ионов, которые затем все отразятся от потенциального барьера. Отношение этой плотности к невозмущенной плотности перед фронтом волны n_{ia} и есть доля отражённых ионов δ . Она зависит от знака D и от знака $x_a - x_m$ для всех отражаемых ионов, и может быть представлена в виде

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{2} [\Phi(y_0) - \Phi(y_-)] & \text{при } (x_a - x_m)D > 0, \\ \frac{1}{2} [\Phi(y_+) - \Phi(y_0)] & \text{при } (x_a - x_m)D < 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-\eta^2) d\eta$$

— интеграл вероятности и введены обозначения

$$y_0 = \frac{|D|}{\sqrt{2T_{i0}}}, \quad y_- = \frac{|D| - \sqrt{2\varphi_m}}{\sqrt{2T_{i0}}}, \quad y_+ = \frac{|D| + \sqrt{2\varphi_m}}{\sqrt{2T_{i0}}}.$$

Верхняя формула соответствует тому, что «горб» потенциала движется в ту сторону, с которой находятся падающие на «горб» ионы. Нижняя формула отвечает движению «горба» потенциала в противоположном направлении. При малых T_{i0} аргумент первого интеграла вероятности в верхней формуле (2.10) будет большим, и первый член в квадратных скобках можно заменить на единицу [219, 233]. При этом в случае большого потенциального барьера $\sqrt{2\varphi_m} \gg |D| \gg \sqrt{2T_{i0}}$ величина δ может достигать единицы, то есть отражаться будут все ионы. При малых T_{i0} нижняя формула (2.10) приводит к очень малым значениям δ .

В общем случае в (2.10) амплитуда и скорость движения «горба» потенциала предполагаются независимыми величинами. В солитоне эти величины однозначно связаны между собой. Полагая, что указанная связь хорошо описывается соотношением (1.63), можно из (2.10) и (1.63) найти зависимость доли отражённых ионов от амплитуды солитона. Результаты

расчета δ при разных T_{i0} представлены на рисунке 2.6. Амплитуда потенциала для каждого заданного T_{i0} выбиралась не выше соответствующего критического значения.

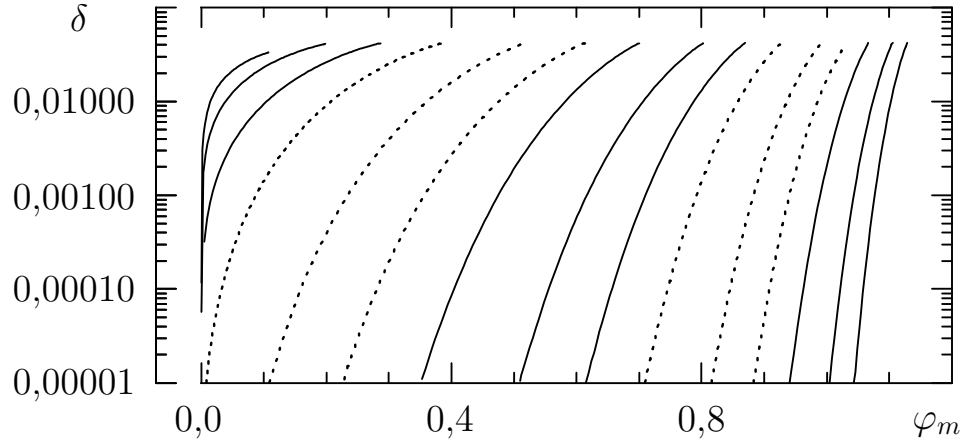


Рисунок 2.6. Доля отражённых ионов в зависимости от амплитуды солитона φ_m при разных значениях T_{i0} (справа налево): 0,00001, 0,00002, 0,00005, 0,0001, 0,0002, 0,0005, 0,001, 0,002, 0,005, 0,01, 0,02, 0,05, 0,1, 0,2 и 0,5. Для удобства три сплошные кривые для значений T_{i0} одного порядка чередуются с тремя пунктирными кривыми для отличающихся на порядок значений T_{i0}

Видно, что доля отражённых ионов не очень велика ($\lesssim 0,04$). Она резко возрастает в относительно небольшом интервале изменения φ_m вблизи φ_{cr} . Отсюда понятно, что солитонные решения вполне возможны в весьма широком диапазоне температур T_{i0} . Для этого надо, чтобы амплитуда солитона φ_m была не только ниже φ_{cr} , соответствующего данному T_{i0} , но и не достигала области, где происходит резкое нарастание доли отражённых ионов. При малом значении последней параметра солитона слабо зависят от отражённых ионов, и он движется как практически устойчивое образование.

При установившемся процессе отражения функция распределения отражённых ионов будет существовать на интервале (2.9) и иметь вид, симметричный к исходной функции распределения относительно скорости $v = D$. Соответственно и плотность отражённых ионов будет определяться произведением δn_{ia} .

2.3 Численное моделирование солитонов

Чтобы убедиться в том, что ионно-звуковые солитоны обладают описанными выше свойствами и могут устойчиво существовать в бесстолкновительной плазме, был проведён ряд численных экспериментов по моделированию движения солитонов. Начальное состояние плазмы задавалось в соответствии с полученными выше численными решениями: положения и скорости модельных ионов выбирались таким образом, чтобы сформировать солитонные распределения n_i и V_i в пространстве, например, такие как на рисунке 2.4 для случая $\varphi_m = 1$. Подчиняющиеся закону Больцмана электроны на первом же шаге распределяются в пространстве в соответствии с солитонным решением. Эволюция такого образования прослеживалась во времени. При моделировании важно было обеспечить достаточное пространственное разрешение для узких пиков солитонов, а также исключить влияние границ счетной области (её длина варьировалась от 200 до 800, пространственный шаг был равен 0,005)

На рисунках 2.7 и 2.8 результаты численного моделирования для случая плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ сравниваются с рассчитанными по (1.61) зависимостями. Видно, что солитон движется так, что его первоначально

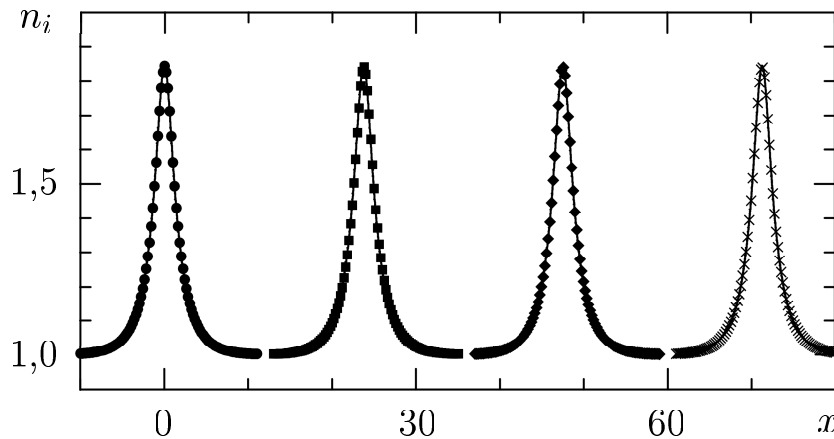


Рисунок 2.7. Профили плотности n_i , полученные в численном эксперименте, в разные моменты времени: 0 (кружки), 20 (квадраты), 40 (ромбы) и 60 (крестики) при $\varphi_m = 0,5$ и $T_{i0} = 0$. Сплошными кривыми для тех же моментов времени, соответственно, слева направо показаны профили плотности, рассчитанные по (1.61)

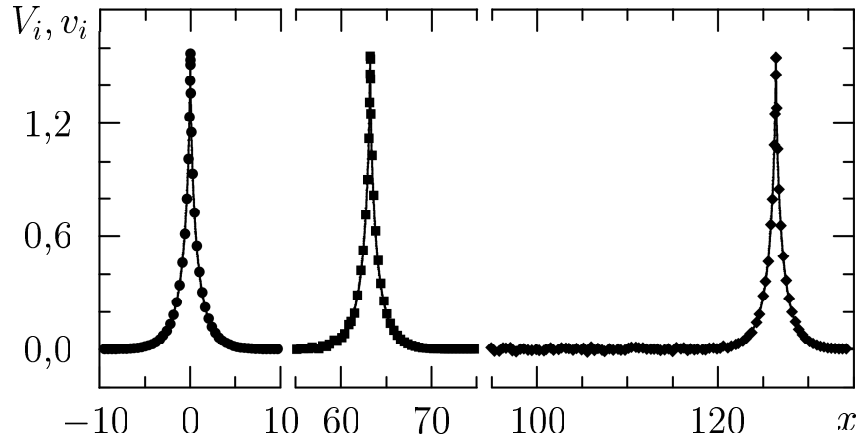


Рисунок 2.8. Фазовые плоскости (x, v_i) , полученные в численном эксперименте, в разные моменты времени: 0 (кружки), 40 (квадраты) и 80 (ромбы) в сравнении с рассчитанными по (1.61) зависимостями $V_i(x)$ для тех же моментов времени (сплошные кривые, соответственно, слева направо) при $\varphi_m = 1,25$ и $T_{i0} = 0$

заданный в соответствии со стационарным решением уравнений (1.14) профиль сохраняется во все последующие моменты времени. Это имеет место как для плотности, так и для скорости ионов. На фазовой плоскости даже в случае, близком к критическому ($\varphi_m = 1,25$ на рисунке 2.8), не видно отражённых ионов, как и должно быть. Вместе с тем в численном эксперименте в области за прошедшим солитоном возникает слабый шум, что демонстрирует рисунок 2.8 при $t = 80$. Аналогичный небольшой шум наблюдается и на зависимости $n_i(x)$.

Поскольку все параметры солитона задавались в соответствии с решением (1.61), можно ожидать, что скорость его движения как целого D также будет соответствовать предсказываемому теорией значению. Из рисунков 2.7 и 2.8 легко установить, что рассматриваемые солитоны движутся равномерно, а также можно оценить скорости их движений при $\varphi_m = 0,5$ и $1,25$. В первом случае получаем $D = 1,189$, во втором — $D = 1,58$. Для выбранных φ_m значения D , вычисленные по формуле (2.4), равны $1,189479$ и $1,581151$ соответственно, то есть солитоны движутся с теоретически предписанными скоростями.

Численные эксперименты, проведенные при других значениях φ_m , также подтверждают основной вывод, что в случае $T_{i0} = 0$ солитон, образованный

в соответствии с решением (1.61), движется равномерно и устойчиво со скоростью, определяемой по (2.4), и как целое сохраняет свою форму.

Более сложная ситуация возникает в случае конечной температуры ионов. Солитонные решения, рассчитанные по (1.61) при $T_{i0} \neq 0$, могут не сохраняться с течением времени, прежде всего, вследствие влияния отражённых ионов.

Воздействие отражённых ионов на движение солитона естественно рассматривать на примере, в котором заданная при $t = 0$ амплитуда φ_m близка к критическому значению, и, соответственно, доля отражённых ионов велика. На рисунках 2.9 и 2.10 представлены результаты численного моделирования варианта, в котором $\varphi_m = 0,5$ и $T_{i0} = 0,02$. В этом случае $\varphi_{cr} = 0,5165$ (рисунок 1.3) не намного превышает φ_m , и доля отражённых ионов весьма велика $\delta \sim 0,038$ (рисунок 2.6). На фазовых плоскостях (рисунок 2.9) хорошо видны потоки отражённых ионов при $t = 30$ и $t = 60$. Из сравнения

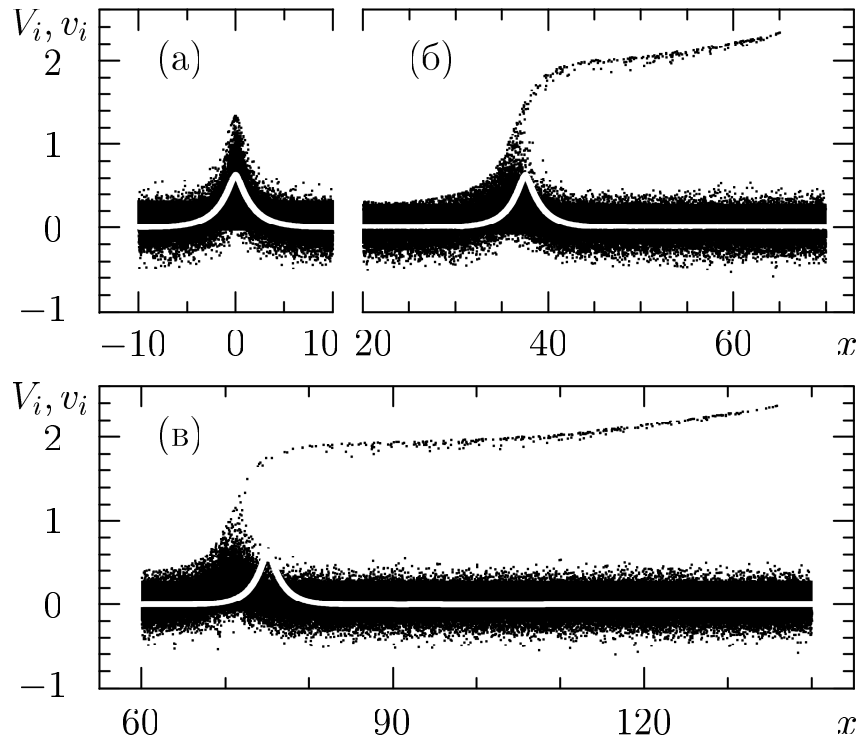


Рисунок 2.9. Фазовые плоскости ионов (x, v_i) (символы), полученные в численном эксперименте, при $t = 0$ (а), $t = 30$ (б) и $t = 60$ (в) в сравнении с соответствующими рассчитанными по (1.61) зависимостями $V_i(x)$ (светлые кривые) для солитона с начальной амплитудой $\varphi_m = 0,5$ при $T_{i0} = 0,02$

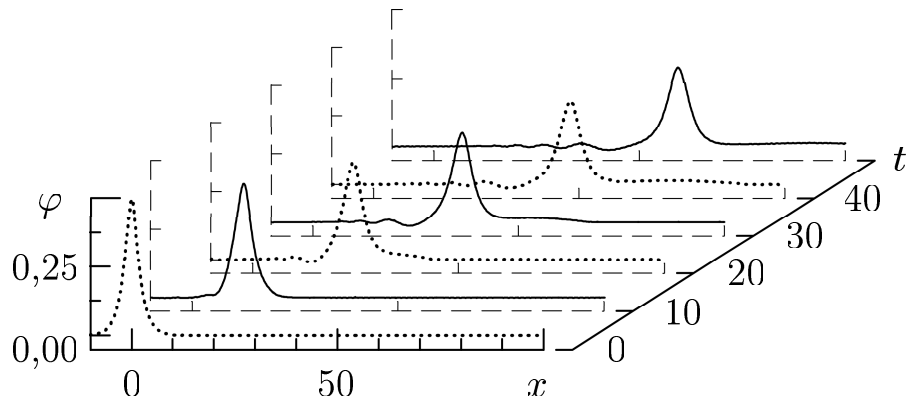


Рисунок 2.10. Профили потенциала $\varphi(x)$, полученные в численном эксперименте, в разные моменты времени для солитона с начальной амплитудой $\varphi_m = 0,5$ при $T_{i0} = 0,02$. Для удобства сплошные кривые чередуются с пунктирными

фазового портрета солитона с теоретическим профилем потоковой скорости $V_i(x)$ можно заключить, что солитоноподобная составляющая двухпотокового движения заметно тормозится. Наряду с этим, с течением времени амплитуда потенциала φ_m достаточно быстро уменьшается, и за структурой образуется осцилляторный след (рисунок 2.10). Торможение солитона отражёнными ионами приводит к рассогласованию между формой, амплитудой и скоростью солитона, и стационарность движения нарушается. Первоначально созданная солитонная структура не сохраняет свою форму и свои параметры.

Весьма интересно посмотреть на эволюцию «предвестника» из отражённых ионов. Рисунок 2.11 показывает, что к моменту времени $t \sim 30$ «предвестник» представляет собой почти платоподобную область повышенного потенциала с небольшим локальным максимумом, ограниченную справа достаточно крутым фронтом, на котором потенциал падает до невозмущенного

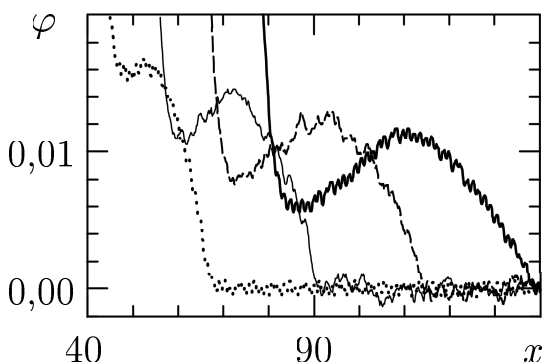


Рисунок 2.11. Зависимость $\varphi(x)$ в «предвестнике», показанная в разные моменты времени: 30, 40, 50 и 60, соответственно, пунктирной, тонкой сплошной, штриховой и сплошной кривыми при $\varphi_m = 0,5$, $T_{i0} = 0,02$

значения. В дальнейшем потенциал в «предвестнике» понижается, а его профиль эволюционирует к колоколоподобному распределению с максимумом в центральной части «предвестника». Это происходит за счет небольшого различия в скоростях отражённых ионов.

Из рисунка 2.9 видно, что почти половину области отражённых ионов занимают те ионы, скорости которых примерно одинаковы. Во второй половине области (например, в интервале $110 < x < 136$ при $t = 60$) скорости отражённых ионов постепенно нарастают с координатой. Здесь же происходит падение потенциала от локального максимума до невозмущённого значения (рисунок 2.11). Это свидетельствует о том, что пространственный заряд отражённых ионов достаточно велик. Он затормаживает движение вновь образующихся отражённых ионов в области нарастающего потенциала в «предвестнике» ($85 < x < 110$ при $t = 60$) и ускоряет отражённые ионы в области падающего потенциала. В результате этого ускорения максимальная скорость отражённых ионов на рисунке 2.9 превышает верхний предел, равный для этого случая 2,2512 согласно формуле (2.9).

Как было показано ранее, доля отражённых ионов и, соответственно, их влияние на движение солитона могут быть существенно снижены при уменьшении φ_m до значений, лежащих вне области резкого нарастания δ . В частности, для случая $T_{i0} = 0,02$ выбор значения $\varphi_m = 0,2$ снижает долю отражённых ионов до величины $\delta \sim 0,0004$. Результаты численного моделирования такого случая даны на рисунке 2.12. Видно, что здесь поток отражённых ионов существенно уменьшается по сравнению со случаем $\varphi_m = 0,5$. (Заметим, что как на рисунке 2.9, так и на рисунке 2.12 представлены координаты модельных частиц на фазовых плоскостях, выданные не для всех частиц, а только для каждой 50-й частицы из их полного числа $8 \cdot 10^6$ во всей счетной области.) Амплитуда «горба» потенциала и его скорость к моменту времени $t = 60$ остались практически неизменными. В следе за «горбом» потенциала нет осцилляторной структуры. Движение в этом случае в течение достаточно большого промежутка времени с неплохой точностью можно трактовать как движение солитона. Подчеркнем, что при этом доля отражённых ионов в 100 раз меньше, чем максимально возможная.

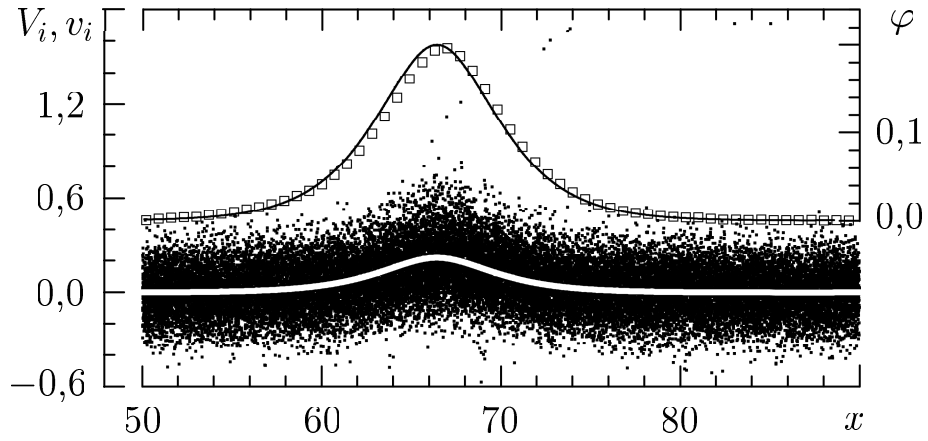


Рисунок 2.12. Фазовая плоскость ионов (x, v_i) (символы) и профиль потенциала $\varphi(x)$ (светлые квадраты, правая ось ординат), полученные в численном эксперименте, в момент времени $t = 60$ в сравнении с рассчитанными по (1.61) зависимостями потоковой скорости $V_i(x)$ (светлая кривая) и потенциала $\varphi(x)$ (сплошная кривая, правая ось ординат) для солитона с первоначально заданной амплитудой $\varphi_m = 0,2$ при $T_{i0} = 0,02$

Влияние ионной температуры демонстрирует рисунок 2.13. Видно, что при одном и том же начальном значении амплитуды потенциала, падение

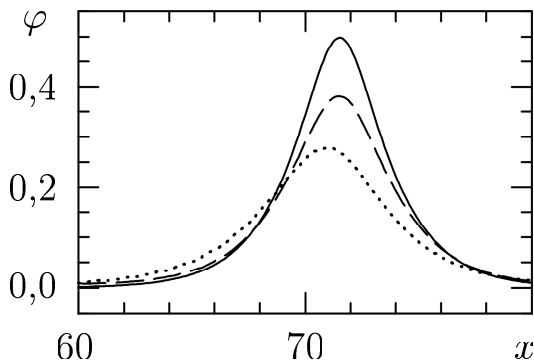


Рисунок 2.13. Профили потенциала $\varphi(x)$ в момент времени $t = 60$ для солитона с начальной амплитудой $\varphi_m = 0,5$ при разных T_{i0} : 0,001, 0,01 и 0,02, показанные, соответственно, сплошной, штриховой и пунктирной кривыми

последней будет тем больше, чем выше температура ионов. Из этого рисунка также следует, что скорость солитоноподобной структуры падает с ростом T_{i0} . На самом деле, теоретическое значение скорости солитона при стационарном движении и заданной амплитуде не падает, а возрастает с увеличением T_{i0} , что можно легко установить из рисунка 1.5. В частности, при $\varphi_m = 0,5$ скорость солитона составляет 1,1925, 1,2196 и 1,2512 для T_{i0} , равных, соответственно,

0,001, 0,01 и 0,02. С учетом этого, понятно, что при увеличении T_{i0} солитон замедляется из-за отражения ионов значительно больше, чем это можно видеть из рисунка 2.13.

С ростом ионной температуры допустимые амплитуды солитонов быстро уменьшаются (рисунок 1.3) и становятся сравнимыми или даже меньшими, чем амплитуда тепловых флуктуаций. Существенную роль тепловое движение играет при $\theta \sim \psi_m$. Численные эксперименты показывают, что в таких случаях падение амплитуды солитона с течением времени даже при весьма малых δ может стать значительным. На рисунке 2.14 представлены результаты численного моделирования случая $T_{i0} = 0,05$, $\varphi_m = 0,075$, при котором $\delta \sim 0,00069$. Видно, что при такой малой доле отражённых ионов скорость

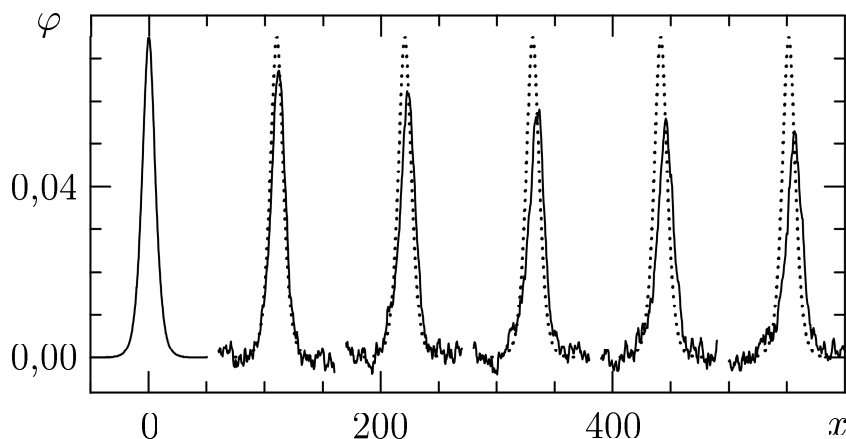


Рисунок 2.14. Профили потенциала $\varphi(x)$, полученные в численном эксперименте, в разные моменты времени от $t = 0$ до $t = 500$ с шагом 100 (сплошные кривые, слева направо) в сравнении с соответствующими рассчитанными по (1.61) зависимостями (пунктирные кривые, слева направо; при $t = 0$ пунктирная и сплошная кривые совпадают) для солитона с начальной амплитудой $\varphi_m = 0,075$ при $T_{i0} = 0,05$

солитона остается примерно одной и той же достаточно длительное время. Но происходит заметное падение амплитуды солитона, сопровождающееся некоторым искажением формы: максимум потенциала смещается немного вперед, слегка укрупняя фронт солитона и уменьшая крутизну его тыльной части. Отметим, что такой же характер изменения профиля потенциала можно

видеть и на рисунке 2.12 для солитона бóльшей амплитуды и при более низкой температуре ионов. Подобная ситуация наблюдается в численных экспериментах и в других случаях с малой долей отражённых ионов, но с заметной ионной температурой.

Таким образом, влияние теплового движения ионов проявляется, в основном, в постепенном уменьшении амплитуды солитона со временем. Если же движение волны сопровождается заметным отражением ионов, то она еще и замедляется. Кроме того, позади волны возникает осцилляторная структура.

2.4 Сравнение с экспериментом

Рассмотрим результаты экспериментов по исследованию ионно-звуковых солитонов, выполненных разными авторами в двухплазменных устройствах примерно при одних и тех же условиях [50–53]. В этих работах измерялись два основных параметра солитонов — число Маха и ширина.

Зависимости этих параметров от амплитуды возмущения плотности представлены в статье [50] и позже одним из ее авторов в работе [51]. При этом данные о ширине солитона в [50] завышены в два раза по сравнению с данными [51] (предположительно, в [51] приведены значения квадрата полуширины солитона $(\Delta/2)^2$, а в [50] — значения $\Delta^2/2$). Здесь будут использоваться результаты более поздней работы [51]. Указанный авторами [50] диапазон температур частиц соответствует значениям T_{i0} в наших единицах $0,0666 \leq T_{i0} \leq 0,1333$. В статье [51] дано одно значение $T_{i0} \simeq 0,0666$. Приведенные в [51] данные мы воспроизводим на рисунке 2.15 с некоторыми изменениями осей. В частности, мы представляем не квадрат полуширины солитона, а просто полную ширину солитона в зависимости от амплитуды плотности ионов n_{im} . Поскольку в экспериментах [50, 51] проводится сравнение с решением вида (2.2), можно предположить, что экспериментальные ширины солитона определялись на высоте 0,42 от амплитуды потенциала. Соответственно и в наших расчетах ширина солитона бралась на той же высоте $0,42\varphi_m$.

Из рисунка 2.15 хорошо видно, что экспериментальные данные заметно отличаются от решений (2.3), (2.6) уравнения КдВ. (Отметим, что на

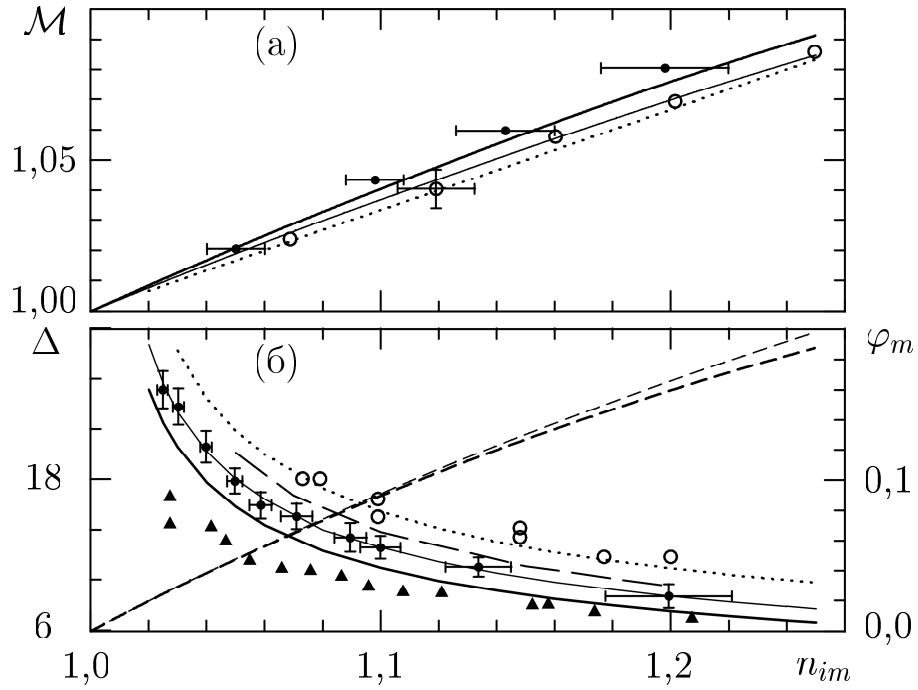


Рисунок 2.15. Экспериментальные значения (символы) как функции от амплитуды плотности ионов n_{im} в сравнении с решениями (1.61) при $T_{i0} = 0,1333$ (сплошные кривые), $T_{i0} = 0,0666$ (тонкие сплошные кривые) и $T_{i0} = 0,025$ (штриховая кривая) и решениями (2.3), (2.6) уравнения КдВ (пунктирные кривые). (а): число Маха \mathcal{M} ; (б): ширина солитона Δ и амплитуда потенциала φ_m (правая ось ординат). Темные кружки построены по данным [51], светлые кружки — по [53], а треугольники (внизу) — по [52]. Амплитуда потенциала φ_m показана короткими штрихами при $T_{i0} = 0,1333$ и тонкими короткими штрихами при $T_{i0} = 0,0666$

это обращено внимание также в статье [241].) Вместе с тем зависимости, полученные по формуле (1.61) для двух предельных значений T_{i0} (0,0666 и 0,1333), близки к экспериментальным данным [51]. При этом с экспериментом лучше согласуются расчеты числа Маха при $T_{i0} = 0,1333$, а расчеты ширины солитона практически ложатся на экспериментальные точки при $T_{i0} = 0,0666$. Точные значения T_{i0} , при которых проводились измерения числа Маха или ширины солитона, не указываются в [50, 51].

В статье [52] приводятся экспериментальные данные, полученные в случае $T_{i0} = 0,0666$. Измеренные значения числа Маха хорошо соответствуют зависимости (2.3), которая описывает солитон КдВ. Поэтому

нет необходимости воспроизводить здесь эти данные. Что же касается ширины солитона, то для этой величины, как видно из рисунка 2.15, существуют более заметные расхождения эксперимента как с точным расчетом по (1.61), так и с соотношением (2.6) для КдВ солитона. Экспериментальная погрешность в [52] не указана. Однако разброс двух значений ширины при одном и том же значении $n_{im} \sim 1,027$ показывает, что погрешность измерений не мала.

Экспериментальные значения ширины солитона, представленные в [53], также имеют достаточно широкий разброс. В целом, они согласуются с зависимостью для КдВ солитонов. В рассматриваемом случае невысокой температуры ионов $T_{i0} = 0,025$ и небольших амплитуд отличие этой зависимости от точного решения примерно такое же, как и экспериментальный разброс. При этом число Маха немного превышает рассчитанные по (2.3) значения (рисунок 2.15).

Укажем, наконец, что авторы [50] несколько ранее [141] на той же экспериментальной установке и в тех же условиях получили зависимость для скорости волны, подобную (2.3), но коэффициент перед амплитудой потенциала (или возмущения плотности) равен не $1/3$, а $0,75 \pm 0,2$ вплоть до возмущений плотности $\sim 0,3$. Строго говоря, в этом случае речь идет о движении не солитона, уединённой волны, а фронта бесстолкновительной ударной волны, то есть ее первого солитона.

Видно, что точный расчет по (1.61) дает близкие к эксперименту значения. Вместе с тем имеется определенный разброс экспериментальных данных. На точность сравнения расчета с экспериментом влияют как экспериментальные погрешности измеряемых величин, так и погрешности в определении ионной и электронной температур.

Отметим, что экспериментально полученные в [50–53] солитоны характеризуются небольшими амплитудами и скоростями, значения которых довольно далеки от критических значений (1.71) при $T_{i0} = 0$. И это при том, что эксперименты проводились при достаточно низких температурах T_{i0} . Вместе с тем параметры экспериментальных солитонов не превышают теоретически предсказанных критических значений, соответствующих рассматриваемым T_{i0} . Эти факты согласуются с высказанным выше предположением, что в реальных экспериментах критические значения (1.71) вряд ли могут быть достигнуты.

Глава 3

Расширение плазмы в вакуум

В этой главе описываются исследования, целью которых было установление основных закономерностей движения плазмы при её расширении в вакуум.

Задача рассматривается в классической постановке с резкой начальной границей между плазмой и вакуумом. Достаточно полную картину течения можно получить только при комплексном подходе, включающем как аналитическое рассмотрение, так и численное моделирование. При численном моделировании необходимо учитывать в граничных условиях такую особенность процесса, как вылет модельных частиц из расчётной области.

В аналитическом виде задача решается в квазинейтральном приближении трёх моментов в общем случае произвольной начальной температуры ионов. Это решение автомодельно, имеет вид волны разрежения и хорошо подтверждается численными решениями в кинетическом приближении. Установлена область его применимости.

Введено понятие границы области квазинейтральности, обоснован способ её определения и найдены формулы для описания её движения. Изучена эволюция области неквазинейтральности (области положительного пространственного заряда) и предложены аналитические формулы для пространственно-временных распределений величин в этой области в случае холодных ионов, а также рассмотрено влияние ионной температуры на эти распределения. Описано движение ионного фронта.

Обсуждена волна охлаждения электронов при расширении плазмы в вакуум и описаны её характеристики. Установлено, что в этой волне происходит почти линейное падение электронной температуры с ростом

координаты. Изучен обмен энергией между электронами и ионами.

Рассмотрены зависимости энергетического распределения выходящих из расширяющейся плазмы ускоренных ионов, а также их полных энергии и числа от координаты точки измерения и времени измерения. Предложено использовать эти зависимости для диагностических целей.

Изложение следует работам автора [206, 208, 211, 221–223, 230].

3.1 Аналитическое решение

Полное решение задачи о расширении бесстолкновительной плазмы в вакуум в строгой кинетической постановке не может быть получено в аналитическом виде, и необходимо использовать численные методы. Вместе с тем, если при постановке задачи исходить из менее строгих приближений, то можно найти некоторые аналитические решения. В частности, такая возможность возникает при рассмотрении задачи в квазинейтральном приближении трёх моментов.

Рассмотрим задачу, используя описанные в п. 1.3 газодинамические решения. Предположим, что плазма распределена однородно с постоянными плотностью n_{i0} , потоковой скоростью V_{i0} и температурой T_{i0} ионов в левом полупространстве $-\infty < x < 0$. Электроны имеют температуру T_{e0} и однородно распределены с плотностью n_{e0} . Их потоковая скорость равна нулю, а распределение плотности в электрическом поле определяется формулой Больцмана. Правое полупространство $0 < x < \infty$ представляет собой вакуумную область. В начальный момент времени $t = 0$ резкая граница (заслонка) между плазмой и вакуумом в точке $x = 0$ мгновенно убирается. Задача состоит в определении эволюции плазмы при $t > 0$. Очевидная идеализация в постановке задачи позволяет исключить влияние момента включения на процесс.

В соответствии с упомянутым в п. 1.3.2 утверждением при $t > 0$ движение плазмы в области, примыкающей к области постоянного течения, должно представлять собой простую волну. Поэтому решение задачи должно состоять из области невозмущенной плазмы и области простой волны, отделённой

от невозмущённой области прямолинейной характеристикой. Рассмотрим, по аналогии с [11], ход характеристик в плоскости (x, t) . На рисунке 3.1 слева от пограничной C_q -характеристики OA находится невозмущенная плазма и здесь все C_q - и C_p -характеристики имеют вид прямых линий. Справа от характеристики OA C_p -характеристики, такие как, например, изображённые линиями BV' и FF' , искривляются. Они все приходят из области невозмущенной плазмы, и в силу однородности последней переносимые из нее в область справа от характеристики OA значения инварианта Римана p имеют одну и ту же величину на всех C_p -характеристиках, то есть p сохраняется во всей этой области. Постоянство инварианта Римана в пространственно-временной области справа от характеристики OA как раз и является необходимым условием, чтобы эта возмущенная область представляла собой простую волну.

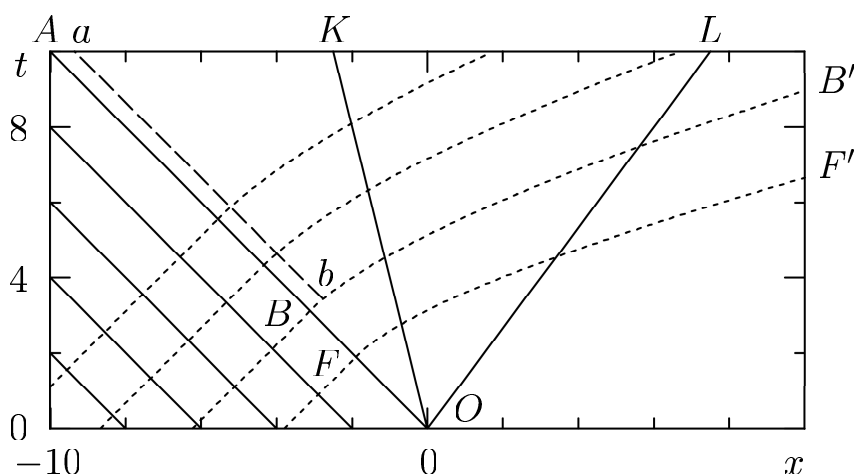


Рисунок 3.1. Характеристики C_q (сплошные кривые) и C_p (пунктирные кривые) на плоскости (x, t)

Что касается C_q -характеристик в возмущенной области, то они «порождаются» движущейся границей. Поскольку мы полагаем, что граница $x = 0$ мгновенно убирается на бесконечность в начальный момент времени $t = 0$, то все возможные C_q -характеристики в области простой волны должны исходить из точки $x = 0, t = 0$, как, например, характеристики, изображенные линиями OK и OL на рисунке 3.1 (смысл линии ba обсуждается ниже в

п. 3.3). При этом C_q -характеристики являются прямолинейными, что видно из уравнений (1.29) и (1.30), которые описывают рассматриваемую простую волну, и в (1.30) надо положить $x_0(q) = 0$. C_q -характеристики выходят из одной точки — центра (центрированная волна по газодинамической терминологии [11]) и расходятся, то-есть рассматриваемая волна представляет собой волну разрежения.

Волна разрежения, как простая волна, может быть описана уравнениями (1.30) и (1.31). Искомое решение задачи о расширении плазмы в вакуум примет вид [221, 222]:

$$\begin{aligned} n_i = n_{i0}, \quad V_i = V_{i0} & \quad \text{при } \tau \leq V_{i0} - c_{i0}, \\ \tau = V_i - c_i, \quad V_i = V_{i0} + c_{i0} - c_i + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} - \ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} \right) & \quad \text{при } \tau > V_{i0} - c_{i0}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученные соотношения совместно с определением c_i по (1.19) описывают неявную зависимость n_i , V_i и c_i от x и t только как от их отношения $\tau = x/t$, то есть здесь мы получили автомодельное решение, не предполагая заранее именно такой его вид.

Для получения решения в важном предельном случае холодных ионов $T_{i0} \rightarrow 0$ можно перейти к пределу в формулах (3.1), либо использовать (1.30) и (1.32). Находим:

$$\begin{aligned} n_i = n_{i0}, \quad V_i = V_{i0} & \quad \text{при } \tau \leq V_{i0} - 1, \\ n_i = n_{i0} \exp(V_{i0} - \tau - 1), \quad V_i = \tau + 1 & \quad \text{при } \tau > V_{i0} - 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Этот результат для случая первоначально неподвижной плазмы $V_{i0} = 0$ совпадает с формулами для волны разрежения, полученными в [2]. Здесь n_i и V_i являются явными функциями от τ .

Зависимости электронной плотности n_e , потенциала φ и ионной температуры T_i от τ определяются через n_i соответствующими соотношениями в системе уравнений (1.16). В частности, в случае $T_{i0} \rightarrow 0$, $Z_i n_{i0} = 1$ для потенциала имеем явную зависимость:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 & \quad \text{при } \tau \leq V_{i0} - 1, \\ \varphi = \ln(Z_i n_i) = V_{i0} - 1 - \tau & \quad \text{при } \tau > V_{i0} - 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Видно, что в точке $\tau = V_{i0} - c_{i0}$ имеется слабый разрыв. В точке $\tau = 0$ ($x = 0$) каждая величина сохраняет одно и то же значение в течение всего процесса. Так при $T_{i0} = 0$, $V_{i0} = 0$ имеем: $n_i = \exp(-1)$, $\varphi = -1$, $V_i = 1$. При $V_{i0} \neq 0$ распределения плотности и скорости ионов, а также потенциала смещаются вдоль оси τ на V_{i0} , и на эту же величину смещается вдоль оси V_i распределение скорости.

C_q -характеристики определяются уравнением (1.30), которое можно представить в виде

$$x = C_1 t, \quad (3.4)$$

где C_1 — константа. Для описания C_p -характеристик воспользуемся их уравнением (1.22). Учтём при этом, что величины V_i и c_i являются неявными функциями от τ в соответствии с (3.1). Из (1.22) и (3.1) получим

$$\frac{dx}{dt} = \tau + 2c_i(\tau).$$

Подстановка $x = \tau t$ приводит к простому дифференциальному уравнению

$$t \frac{d\tau}{dt} = 2c_i(\tau). \quad (3.5)$$

Все C_p -характеристики в области волны разрежения исходят из пограничной C_q -характеристики OA $x = -c_{i0}t$ (рисунок 3.1). Например, C_p -характеристика BB' начинается на прямой OA в точке B , где $x = x_0$ и $t = t_0$. При этом x_0 и t_0 таковы, что автомодельная переменная в точке B равна $\tau_0 = x_0/t_0 = -c_{i0}$. С учётом этого интегрирование уравнения (3.5) даёт при $t > t_0$ следующую зависимость

$$2 \ln \frac{t}{t_0} = \int_{-c_{i0}}^{\tau} \frac{d\xi}{c_i(\xi)} = h(\tau). \quad (3.6)$$

Функция $h(\tau)$ определяет все C_p -характеристики для заданной температуры ионов T_{i0} . В частном случае холодных ионов $T_{i0} = 0$ имеем $h(\tau) = \tau + 1$, и уравнение для C_p -характеристик можно записать в общем виде

$$x = 2t \ln \frac{t}{t_0} - t \quad \text{при } t > t_0. \quad (3.7)$$

Заметим, что именно в соответствии с уравнениями (3.4) и (3.7) построены, как пример, характеристики в области простой волны на рисунке 3.1. При $T_{i0} \neq 0$ для построения C_p -характеристик по (3.6) необходимо вычислить функцию $h(\tau)$. Её зависимость от T_{i0} проявляется, в основном, в области $\tau < 0,5$. При $\tau > 1$ кривые $h(\tau)$ близки к зависимости $1 + \tau + a$, где a — постоянная для каждого значения T_{i0} величина в диапазоне от 0,05 до 0,15 при изменении T_{i0} от 0,1 до 1.

3.2 Численные решения

3.2.1 Автомоделное кинетическое приближение

Начало теоретическим и численным исследованиям расширения плазмы в вакуум было положено в работах [2–4]. Задача была сформулирована в рамках автомоделного кинетического приближения (1.5), в котором имеется всего две независимые переменные. Численное решение системы уравнений (1.5) значительно проще, чем численные решения систем уравнений (1.7) или (1.8). В результате исследований были найдены пространственно-временные зависимости и описаны основные особенности поведения функции распределения ионов в процессе расширения плазмы в вакуум. В частности, было показано, что характеристики уравнения, выходящие из области $\tau \rightarrow -\infty$, с ростом τ уходят в верхнюю часть плоскости (τ, v) , и функция распределения ионов равна нулю при $v < \tau$. При $\tau \rightarrow \infty$ характеристики экспоненциально сгущаются вблизи прямой $v = \tau + 1$. Это означает, что функция распределения ионов в области расширения сужается и становится δ -образной, а температура ионов падает. При этом заметная доля ионов приобретает большую направленную скорость $v \sim \tau + 1$, а кинетическое решение близко к гидродинамическому (3.2).

Указанные особенности процесса при $T_{i0} = 1$ были продемонстрированы в [2] с помощью численного решения системы уравнений характеристик. Этим же методом были затем найдены решения для ряда случаев с неравными температурами ионов и электронов $T_{i0} \neq 1$ [3].

В работе С. И. Анисимова и автора [208] был проведен ряд расчетов для решения автомодельного кинетического уравнения (1.5) со слегка измененной по сравнению с [2,3] вычислительной схемой. Полученные решения (1.5) практически полностью совпали с решениями [2, 3]. Их сравнение с зависимостями, найденными при численном моделировании процесса, показало, что различие в результатах двух подходов возникает в области вблизи и впереди ионного фронта, где условие квазинейтральности явно не выполняется. Различие наблюдается также на начальном этапе, то есть системе требуется некоторое время порядка ионного плазменного периода для выхода на автомодельный режим.

Метод численного решения, предложенный в [2], был применён также к изучению ускорения примесных ионов при расширении в вакуум плазмы, состоящей из электронов и двух сортов ионов [4]. Было показано, что заметная доля примесных ионов с большим зарядом может приобрести энергию на два – три порядка превышающую тепловую энергию электронов. Результаты проведенных исследований имеют важное значение, в частности, для анализа движений лазерной плазмы. В работе [211] было отмечено, что в ряде случаев, в том числе и в лазерной плазме, при изучении таких задач надо с осторожностью использовать бесстолкновительное приближение. Например, в водородной плазме с примесью многозарядных ионов нередко возникает ситуация, когда столкновениями ионов водорода между собой можно пренебречь, но их столкновения с примесными ионами необходимо учесть из-за их сильного влияния на ионное движение. Изучение расширения плазмы с примесными ионами в вакуум в такой постановке в статье [211] дополнило представление об ускорении примесных ионов. В частности, был рассмотрен механизм столкновительного увлечения примесных ионов более быстрыми ионами водорода.

3.2.2 Постановка задачи для численного моделирования

В данной главе задача о расширении плазмы в вакуум исследуется с помощью метода частиц в ячейке. При этом используются как однокомпонент-

ная, так и двухкомпонентная модели плазмы. Первая из них соответствует исходной системе уравнений (1.8) и моделирует с помощью модельных частиц движение только ионной компоненты, а для электронов используется бoльцмановское распределение. Вторая модель соответствует системе уравнений (1.7) и моделирует частицами движение как ионной, так и электронной компонент. В обоих моделях ионы предполагаются однократно ионизованными $Z_i = 1$, и условие квазинейтральности в невозмущённой области имеет вид: $n_{e0} = n_{i0}$.

Постановка задачи для численного моделирования аналогична постановке, рассмотренной в п. 3.1. В начальный момент времени в левом полупространстве находится бесстолкновительная однородно распределённая плазма, а правое полупространство представляет собой вакуум. В точке $x = 0$ плотность ионов и электронов падает разрывным образом до нуля. Эволюция такого начального образования при $t > 0$ исследуется численно. Для численного решения бесконечная область заменяется на некоторую большую, но конечную область $[-L_l, L_r]$. Расчёт проводится до тех моментов времени, пока возмущения не дошли до границ счётной области. На левой границе $x = -L_l$ плазма остаётся невозмущённой в течение всего рассматриваемого промежутка времени, а на правой границе $x = L_r$ плотность частиц предполагается стремящейся к нулю (строго говоря, при $L_r \rightarrow \infty$).

При моделировании на каждом временном шаге численно решается уравнение Пуассона. Условия для уравнения Пуассона на левой границе в невозмущённой плазме устанавливают точку отсчёта потенциала φ и убирают возмущения электрического поля $E = -\partial\varphi/\partial x$:

$$\varphi(-L_l, t) = 0, \quad E(-L_l, t) = 0. \quad (3.8)$$

Постановка условия для уравнения Пуассона на правой границе определяется тем, что электроны за счёт теплового движения заполняют вакуумную область быстрее, чем ионы, что приводит к созданию электрического поля. В случае плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ все ионы в начальный момент времени находятся в покое. За конечное время они приобретают в электрическом поле конечную скорость и проходят конечное расстояние. Поэтому в течении будет образовываться ионный фронт, впереди которого находится только

облако из электронов, но нет ионов. Однако если ионы плазмы в начальный момент времени имеют максвелловское распределение по скоростям с температурой $T_{i0} \neq 0$, то формально всегда найдутся частицы с достаточно большими положительными скоростями, которые могут не только размыть фронт ионов, но и весьма быстро покинуть систему через правую границу $x = L_r$. В ещё большей степени такая ситуация характерна для электронов (их невозмущённая температура $T_{e0} \neq 0$ всегда). Формально при максвелловском распределении электроны практически сразу после начала процесса должны появиться в области $x > L_r$, хотя и в ничтожном количестве. Поэтому, строго говоря, электрическое поле на правой границе $x = L_r$ нельзя считать равным нулю, что представляется естественным в случае полной зарядовой нейтральности системы. В численном эксперименте, однако, скорости модельных частиц ограничены. Это обусловлено тем, что ещё при создании начального максвелловского распределения появление модельных частиц с очень большими скоростями крайне маловероятно даже при довольно большом их числе. Скорости частиц редко превышают величину в несколько (5–6) тепловых скоростей. Поэтому модельным электронам требуется некоторое конечное время для того, чтобы достигнуть правой границы $x = L_r$. До этого момента электрическое поле на этой границе можно считать равным нулю

$$E(L_r, t) = 0. \quad (3.9)$$

Довольно быстро граничное условие (3.9) становится неправильным из-за вылета электронов через правую границу. Поэтому возникает необходимость учитывать это и корректировать граничное условие при $x = L_r$ по мере развития процесса. Допустим, что к данному моменту времени t электронное облако пересекло правую границу $x = L_r$. Если проинтегрировать уравнение Пуассона от этой границы до бесконечности, то получим, что электрическое поле на границе равно

$$E(L_r, t) = \int_{L_r}^{\infty} n_e dx. \quad (3.10)$$

Интеграл в правой части (3.10) представляет собой полное число вылетевших из системы электронов. Отсюда следует естественный приём для учёта ухода

электронов. Надо вести подсчёт числа электронов, вылетевших через правую границу, и на каждом временном шаге по этому числу находить электрическое поле на границе согласно (3.10). Полученное значение поля надо использовать как правое граничное условие при решении уравнения Пуассона.

При моделировании процесса с помощью однокомпонентной модели, в которой электроны предполагаются распределёнными по формуле Больцмана, правое граничное условия можно выбрать в виде, предложенном в [58]. Это условие было получено исходя из предположения, что на бесконечности потенциал стремится к минус бесконечности, а электрическое поле стремится к нулю. Для его вывода надо умножить обе части уравнения Пуассона на производную от потенциала и проинтегрировать полученное выражение по чисто электронной области от некоторой точки $x \geq x_f$ до бесконечности. Здесь через x_f мы обозначили координату ионного фронта (левая граница электронного облака). Нетрудно найти, что в точке x производная от потенциала определяется значением потенциала:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sqrt{2} \exp(\varphi/2). \quad (3.11)$$

Полученное уравнение (3.11) обеспечивает предположенное выше при $x \rightarrow \infty$ соотношение между потенциалом и электрическим полем. Аналогичное граничное условия, соответствующим образом модифицированное, было использовано также в гидродинамических расчётах процесса с двумя сортами электронов — холодных и горячих [79].

Уравнение (3.11) справедливо в любой точке чисто электронной области, в том числе и на правой границе $x = L_r$, и в таком виде его можно принять в качестве правого граничного условия при кинетическом моделировании.

Это же уравнение (3.11) можно использовать для нахождения распределений величин в области перед ионным фронтом $x > x_f$ [58]. Для этого надо проинтегрировать (3.11) от $x = x_f$ до произвольного x . В результате получим, что в чисто электронной области пространственные зависимости потенциала, электрического поля и плотности электронов могут быть представлены следующим образом:

$$\varphi = \ln \frac{2}{(x - x_b)^2}, \quad E = \frac{2}{x - x_b}, \quad n_e = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{2}{(x - x_b)^2}, \quad (3.12)$$

где координата $x_b = x_b(t)$ определяется ионным фронтом:

$$x_b = x_f - \sqrt{2} \exp(-\varphi_f/2). \quad (3.13)$$

Здесь φ_f обозначает значение потенциала в точке $x = x_f$.

Различие между двухкомпонентной и однокомпонентной моделями плазмы проявляется не только в граничных, но и в начальных условиях. Это вызвано различием в описании электронной компоненты. В самом деле, предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ ионы однородно распределены в области $-\infty < x \leq 0$, а электроны подчиняются закону Больцмана, и используя тот же приём, что и при выводе уравнения (3.11), но применительно к области $-\infty < x \leq 0$ и с граничным условием (3.8), нетрудно найти выражение для производной от потенциала. Это выражение в точке $x = 0$ должно иметь значение, совпадающее со значением производной (3.11) в той же точке. Из этого можно определить значения потенциала и плотности электронов, а также их производных при $t = 0$, $x = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(0,0) = -1, & \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0, t=0} = -\sqrt{2} \exp(-1/2), \\ n_e(0,0) = \exp(-1), & \quad \left. \frac{\partial n_e}{\partial x} \right|_{x=0, t=0} = -\sqrt{2} \exp(-3/2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Видно, что здесь потенциал и плотность электронов имеют значения ниже невозмущённых значений и постепенно падают с ростом x . Иными словами, при больцмановском распределении электронов их плотность не имеет резкого начального разрыва в точке $x = 0$. Безынерционные электроны мгновенно устанавливают гладкий профиль плотности протяжённостью в несколько дебаевских длин.

Сравнивая полученные в (3.14) начальные значения потенциала и электронной плотности в точке $x = 0$, соответственно, со значениями потенциала (3.3) и ионной плотности (3.2) при $T_{i0} = 0$, $V_{i0} = 0$ и $\tau = 0$, видим их полное совпадение, несмотря на то, что (3.14) получено с использованием уравнения Пуассона, а решения (3.2) и (3.3) основаны на соотношении квазинейтральности. Поэтому можно ожидать, что значения $\varphi(0, t) = -1$, $n_e(0, t) = n_i(0, t) = \exp(-1)$ устанавливаются очень быстро и остаются неизменными при всех t .

Иными словами, решения (3.2) и (3.3) при $T_{i0} = 0$ всегда, начиная с момента $t = 0$, справедливы в точке $x = 0$, хотя, как мы увидим ниже, имеются области значений x и t , где использование формул (3.2) и (3.3) приводит к ошибкам.

3.2.3 Численные эксперименты

Рассмотрим результаты численного моделирования расширения плазмы в вакуум с помощью однокомпонентной модели, в которой движение ионов моделируется частицами, а электроны предполагаются распределёнными по закону Больцмана. Данные численных экспериментов показаны на рисунках 3.2—3.6 в сравнении с аналитическими зависимостями квазинейтрального приближения трёх моментов (КПТМ).

Прежде всего, отметим, что численные результаты свидетельствуют об автомодельности процесса. Профили течений, полученные численно для разных моментов времени, накладываются с высокой точностью на одну и ту же кривую, если в качестве независимой переменной использовать величину $\tau = x/t$. Поэтому на рисунках 3.2—3.6 моменты функции распределения ионов даны в виде зависимостей от автомодельной переменной τ . Здесь показан

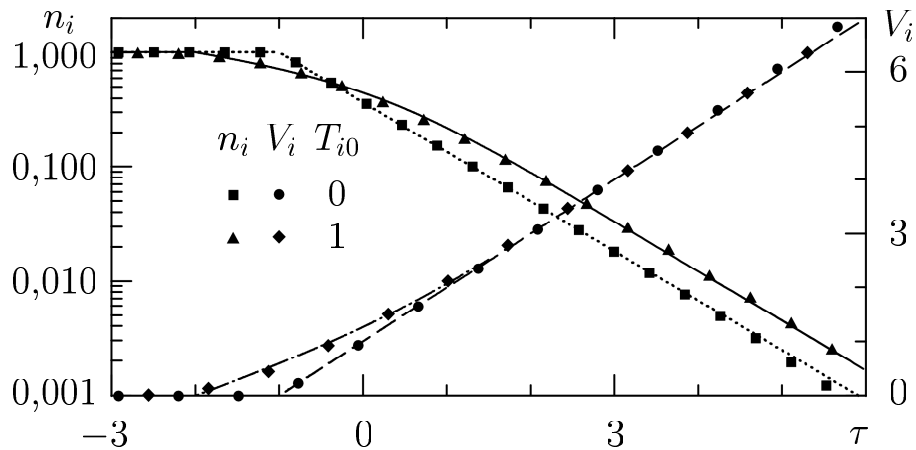


Рисунок 3.2. Зависимости ионных плотности n_i и потоковой скорости V_i (правая ось ординат) от τ по формуле (3.2) при $T_{i0} = 0$ (пунктирная и штриховая кривые соответственно) и по формуле (3.1) при $T_{i0} = 1$ (сплошная и штрихпунктирная кривые соответственно) в сравнении с данными численных экспериментов при $t = 100$ (символы)

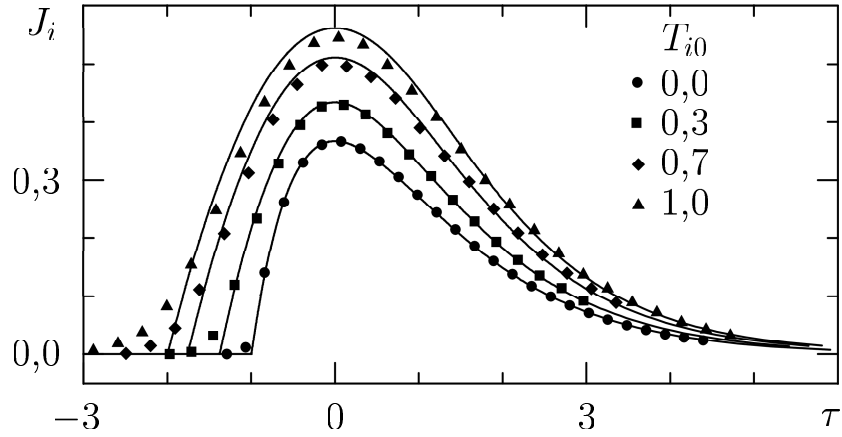


Рисунок 3.3. Зависимости потока ионов $J_i = n_i V_i$ от τ , по формулам КПТМ при T_{i0} , равных 0, 0,3, 0,7 и 1,0, (сплошные кривые снизу вверх соответственно) и по данным численных экспериментов при $t = 100$ (символы)

случай $V_{i0} = 0$. При $V_{i0} \neq 0$ решения просто смещаются вдоль оси τ на величину V_{i0} , что и следовало ожидать в соответствии с (3.1)—(3.2). Из рисунков видно, что в целом КПТМ неплохо описывает процесс в широком диапазоне значений T_{i0} при изменениях n_i на несколько порядков. По сути дела, можно найти только два заметных расхождения.

Первое расхождение наблюдается вблизи слабого разрыва на границе между невозмущённой плазмой и областью волны разрежения. Каждая из этих двух областей описывается своим аналитическим решением. В точке, где сшиваются эти два разные решения, возникает слабый разрыв потенциала. Последнее приводит к сильному разрыву электрического поля, что, в свою очередь, означает разрыв плотности пространственного заряда и нарушение квазинейтральности. Такая противоречивость КПТМ в небольшой окрестности слабого разрыва связана с тем, что в этом приближении потенциал определяется по формуле (1.9). В численной модели вместо (1.9) используется решение нелинейного уравнения Пуассона. В этом случае переход от невозмущённой области к области волны разрежения носит гладкий характер, и численное решение отклоняется от решения КПТМ.

Второе расхождение касается зависимости ионной температуры от τ (рисунок 3.4). Видно, что уже при $\tau \sim 0$ решения КПТМ начинают давать температурные зависимости, отклоняющиеся от численных значений.

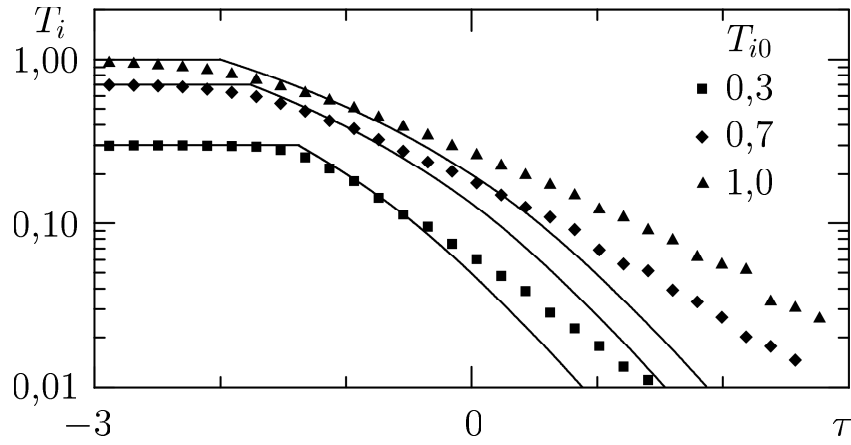


Рисунок 3.4. Зависимости температуры ионов T_i от τ по формулам КПТМ при T_{i0} , равных 0,3, 0,7 и 1,0, (сплошные кривые, соответственно, снизу вверх) в сравнении с данными численных экспериментов при $t = 100$ (символы)

Последнее обстоятельство обусловлено тем, что при выводе решений КПТМ не учитывался тепловой поток ионов. Реально же в процессе наблюдается некоторый поток тепла ионов $\mathcal{G}_i \neq 0$ (рисунок 3.5). Хотя этот поток тепла оказывается на порядок меньшим, чем поток энергии

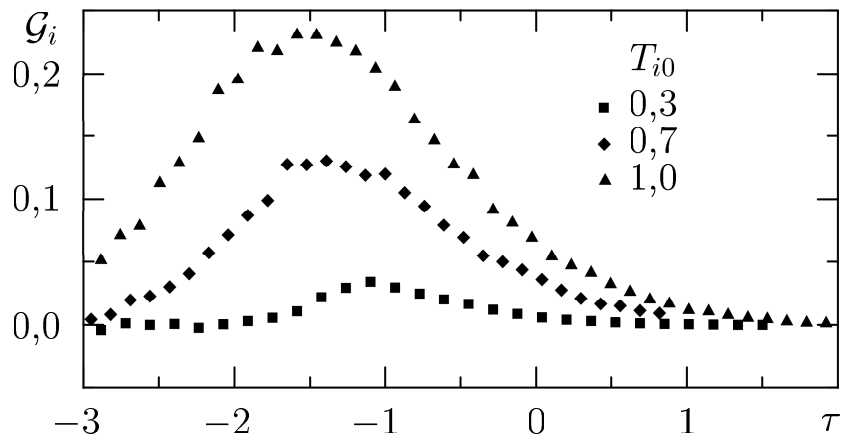


Рисунок 3.5. Зависимости потока тепла ионов \mathcal{G}_i от τ в численных экспериментах при разных T_{i0} ; $t = 100$

(рисунок 3.6), его влияние на распределение температуры ионов весьма значительно. Благодаря тому, что заметная ошибка в оценке T_i , полученной по формулам КПТМ, лежит в области малых $T_i \ll T_{i0}$ ($\tau > 0$, $n_i \ll n_{i0}$), зависимости энергии и потока энергии ионов от τ , рассчитанные с

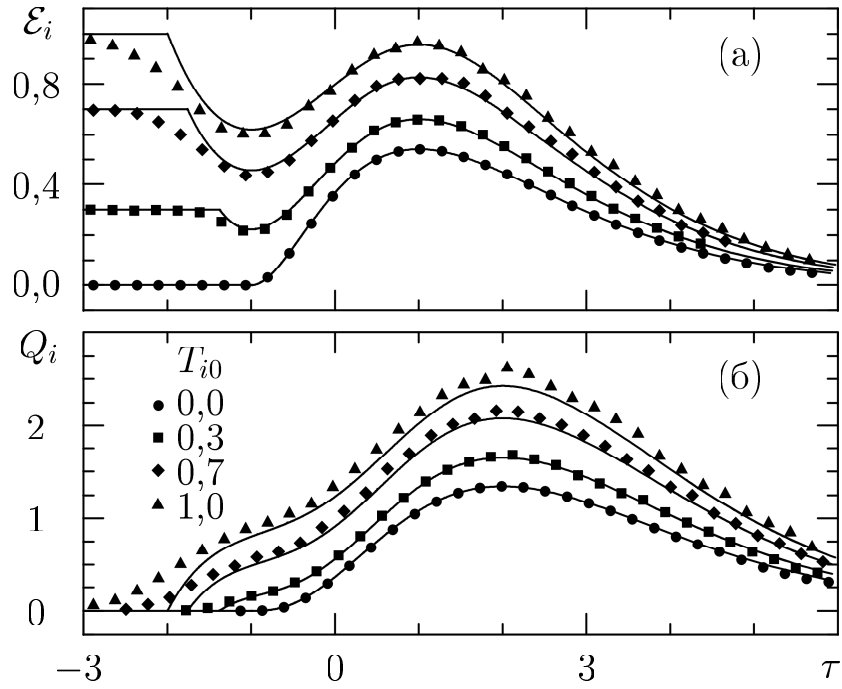


Рисунок 3.6. (а): Ионная энергия $\mathcal{E}_i(\tau)$ и (б): поток энергии ионов $Q_i(\tau)$. Зависимости по формулам КПТМ при T_{i0} , равных 0, 0,3, 0,7 и 1,0, (сплошные кривые, соответственно, снизу вверх) в сравнении с данными численных экспериментов при $t = 100$ (символы)

использованием соотношений (1.12), оказываются достаточно близкими к численным результатам. Небольшое систематическое превышение численных значений энергии над соответствующими значениями, рассчитанными по формулам КПТМ, видно на рисунке 3.6 в области $\tau > 0$ для случаев $T_{i0} = 0,7$ и $T_{i0} = 1$. То же самое можно сказать и о значениях потока энергии. Здесь численный эксперимент даёт более высокие значения во всей области τ . Последнее объясняется тем, что в численных экспериментах тепловой поток $\mathcal{G}_i > 0$ и он вносит свой вклад в поток энергии Q_i согласно (1.12), а при аналитическом рассмотрении заранее положено $\mathcal{G}_i = 0$.

Заметим, что в нашем случае температура ионов T_i вычисляется как соответствующий момент функции распределения ионов (см. (1.11)). При этом сама функция распределения сильно отличается от максвелловской. Поэтому T_i представляет собой лишь некоторую оценку «ширины» функции распределения. Рисунок 3.7 демонстрирует, как эволюционирует функция распределения ионов по мере роста τ . Видно, что происходит увеличение

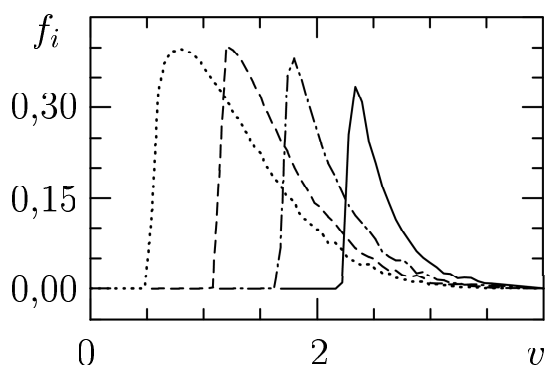


Рисунок 3.7. Функция распределения ионов при τ , равных 0, 0,5, 1,0 и 1,5, показанная, соответственно, пунктирной, штриховой, штрихпунктирной и сплошной кривыми; $T_{i0} = 1$, $t = 100$

средней скорости ионов и сужение их функции распределения. Хорошо прослеживается характерный обрыв функции распределения вплоть до нулевых значений со стороны малых скоростей. Подобные распределения были получены при численном решении автомодельных кинетических уравнений [2] и при численном моделировании процесса в кинетическом приближении [208].

Рисунок 3.7, как и рисунок 3.2, наглядно иллюстрирует важнейшее свойство процесса расширения плазмы в вакуум — ускорение ионов. Число ионов с большими (и увеличивающимися) скоростями может превосходить, например, число ионов с такими же скоростями при максвелловском распределении на порядки.

3.3 Область неквазинейтральности и ионный фронт

Численные эксперименты, в целом, хорошо подтверждают аналитические решения КПТМ. Однако в некоторых областях плоскости (x, t) имеются расхождения между численными и аналитическими зависимостями. Поэтому важно установить область применимости решений (3.1)—(3.3). Рассмотрим этот вопрос подробно, следуя работе автора [230].

Прежде всего, нельзя ожидать совпадения численных решений с решениями (3.1) или (3.2) в начальные моменты времени, когда течение занимает малую пространственную область и условие квазинейтральности (1.3) не выполняется. Для выхода на квазинейтральное автомодельное движение требуется некоторое время порядка нескольких ионных плазменных периодов [208]. Иными словами, область волны разрежения на плоскости (x, t) (справа от характеристики OA на рисунке 3.1) включает в себя и подобласть неквазиней-

тральности и неавтономности при малых t .

Более того, решения (3.1) и (3.2) применимы не при любом значении координаты x . Дело в том, что в каждый момент времени t при достаточно большом x может быть нарушено условие квазинейтральности (1.3) за счёт того, что с ростом x падает плотность частиц, и, соответственно, растёт локальная дебаевская длина. Как пример, рассмотрим случай холодных ионов $T_{i0} = 0$. Из квазинейтрального решения (3.2) можно получить, что дебаевская длина в области расширения, нормированная на дебаевскую длину в невозмущённой области, будет равна $\exp[(1 + \tau)/2]$. Возмущение плотности развивается как волна разрежения, и можно ожидать, что характерный пространственный масштаб линейно растёт со временем. Пусть он равен Ct , где C — некоторая константа. Нарушение квазинейтральности означает, что

$$Ct \sim \exp[(1 + \tau)/2],$$

откуда следует оценка координаты точки x , в которой начинает нарушаться квазинейтральность:

$$x \sim 2t \ln(Ct) - t.$$

Эта координата увеличивается со временем. Мы можем предположить, что имеется граница области квазинейтральности, которая отделяет квазинейтральную область от области неквазинейтральности, где существенную роль играет пространственный заряд. Поскольку степень неквазинейтральности увеличивается с ростом x постепенно, эта граница не резкая, и её определение допускает некоторый произвол. Вместе с тем введение такой границы позволяет оценить область применимости решений (3.1) и (3.2).

Несмотря на очевидную условность полученной выше оценки, её подобие с уравнением C_p -характеристик (3.7) наводит на мысль, что граница области квазинейтральности распространяется в сторону больших x по C_p -характеристике. Исходя из этого, положим, что в плоскости (x, t) существует граничная C_p -характеристика, например, BB' на рисунке 3.1, которая отделяет область квазинейтрального движения от области, где квазинейтральность нарушена. Последняя область на рисунке 3.1 находится

ниже линии BB' и ограничена линией OB . Любопытно, что эта область на плоскости (x, t) соответствует обоим упомянутым выше случаям нарушения квазинейтральности: при малых t и при больших x . Граничная C_p -характеристика отсекает от всей области волны разрежения на плоскости (x, t) область, в которой решения КПТМ не описывают правильно процесс расширения плазмы в вакуум.

В оставшейся области волны разрежения в окрестности слабого разрыва при $\tau = -c_{i0}$, то есть вблизи C_q -характеристики OA , фронта волны разрежения, имеется небольшая подобласть $BAab$, где указанные решения, как уже упоминалось выше, оказываются не совпадающими с точными численными решениями, в которых потенциал вычисляется из уравнения Пуассона, а не из квазинейтрального соотношения (1.9). Поэтому подобласть $BAab$, где линия ba определяется степенью расхождения двух решений и не обязана быть характеристикой, также должна быть исключена.

Таким образом, мы установили, что имеются три области: область малых t , область больших x и область вблизи фронта волны разрежения, где решение КПТМ дает заметную погрешность. Область применимости этих решений располагается выше линии abB' на рисунке 3.1.

3.3.1 Плазма с холодными ионами

Рассмотрим сначала случай плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Прежде всего, проиллюстрируем различия между численными решениями и аналитическими зависимостями (3.2) и (3.3). На рисунке 3.8 хорошо видно отклонение численных значений n_i при $t = 3$ и $t = 6$ (область малых t) от формулы (3.2) для плотности ионов. С увеличением времени численное решение приближается к аналитическому. Как пример, на рисунке 3.8 приведена зависимость при $t = 100$, когда имеется очень хорошее согласие двух решений в широком диапазоне x . Исключение составляет область вблизи фронта волны разрежения. Пространственный размер этой области может составлять несколько десятков дебаевских длин. Рисунок 3.8 также иллюстрирует образование области неквазинейтральности при больших x . В

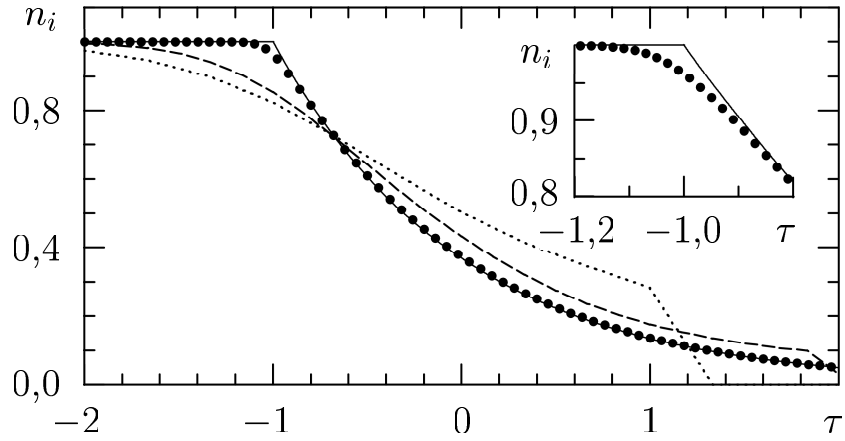


Рисунок 3.8. Плотность ионов как функция от τ в разные моменты времени: $t = 3$ (пунктирная кривая), $t = 6$ (штриховая кривая) и $t = 100$ (кружки) в случае $T_{i0} = 0$. Сплошная кривая представляет решение (3.2). Последние две кривые с большим разрешением показаны на вкладке

этой области наблюдается резкое падение ионной плотности при $t = 3$ и $t = 6$ вплоть до нуля, что сопровождается появлением нескомпенсированного заряда электронов впереди скачка плотности ионов.

Представление о характере отличия численных значений потенциала при больших x от формулы (3.3) даёт рисунок 3.9. Хорошо видно, что после

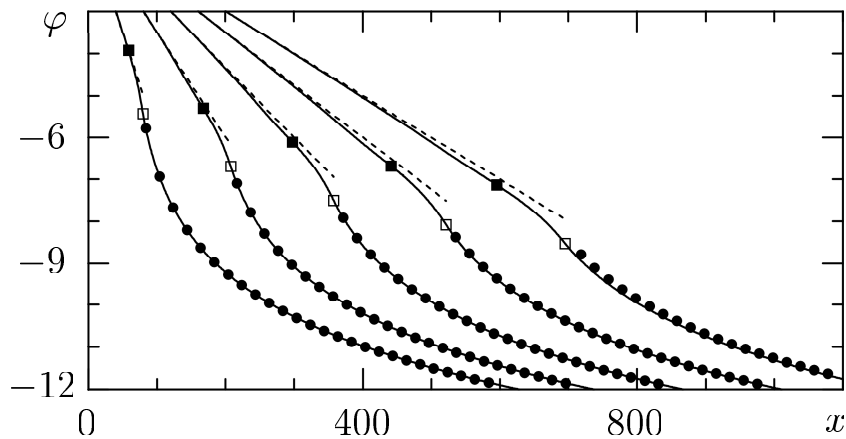


Рисунок 3.9. Распределение потенциала при $T_{i0} = 0$ в численном эксперименте (сплошные кривые), по (3.3) (пунктирные кривые) и по (3.12) (кружки) при $t = 20, 40, 60, 80$ и 100 (слева направо). Значения потенциала в точках $x = x_b$ и $x = x_f$ отмечены, соответственно, тёмными и светлыми квадратами

точки $x = x_b$ численное решение начинает заметно отклоняться от решения (3.3) вниз. За счёт такого отклонения линейная зависимость потенциала от координаты (3.3) гладко сшивается с логарифмической зависимостью (3.12) в точке $x = x_f$. Здесь, как и ранее в п. 3.2.2, x_b определяется по формуле (3.13), а x_f — координата ионного фронта. Под ионным фронтом при $T_{i0} = 0$ мы подразумеваем ион, имеющий в данный момент времени максимальную координату.

Из рисунка 3.9 видно, что впереди ионного фронта численные зависимости $\varphi(x)$ хорошо описываются формулой (3.12). Это является следствием того, что на правой границе в наших численных экспериментах использовалось условие (3.11). Если же положить электрическое поле на правой границе равным нулю, то потенциал будет выходить на постоянное значение вблизи этой границы. В начальный период это обстоятельство не сильно исказит картину движения основной массы плазмы. Но с течением времени ионный фронт будет приближаться к правой границе $x = L_r$, а расширяющееся электронное облако займёт не только отведённую в расчёте область $x_f \leq x \leq L_r$, но и значительную часть области $x > L_r$. Это означает, что электрическое поле на границе $x = L_r$ будет возрастать, а не оставаться равным нулю. Граничное условие (3.11) позволяет правильно учесть это обстоятельство в течение того промежутка времени, пока ионный фронт не дойдёт до правой границы счётной области. В более поздние моменты времени необходимо учитывать ещё и вылет ионов из счётной области, и правое граничное условие должно усложниться.

Отклонение потенциала вниз приводит к увеличению электрического поля при подходе к ионному фронту. Справа же от ионного фронта в области $x > x_f$ электрическое поле E определяется по (3.12). Поле имеет максимальное значение на ионном фронте, равное $\sqrt{2} \exp(\varphi_f/2)$, а затем непрерывно падает с ростом x . Примеры пространственного распределения электрического поля даны на рисунке 3.10. Здесь показан не только результат численного моделирования в предположении бoльцмановского распределения электронов, но и данные, полученные в двухкомпонентной модели. Эти данные свидетельствуют о том, что при учёте инерции электронов движение

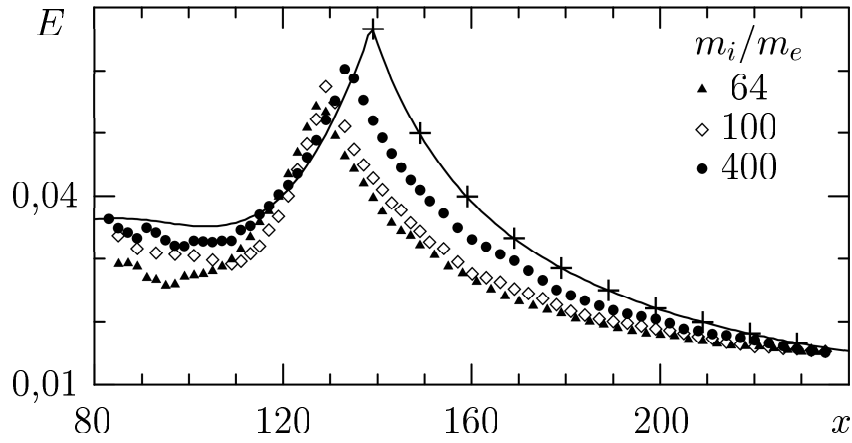


Рисунок 3.10. Распределение электрического поля при $T_{i0} = 0$, $t = 30$ в однокомпонентной модели (сплошная кривая) и в двухкомпонентной модели при разных m_i/m_e (символы). Крестиками показано E , вычисленное по (3.12)

ионного фронта несколько замедляется. Вместе с тем характер течения вблизи ионного фронта во всех случаях один и тот же. В обоих моделях наблюдается характерный пик электрического поля. Координаты ионного фронта во всех случаях совпадают с координатами пиков электрического поля ($x_f \approx 139$ в однокомпонентной модели). Небольшие изменения в профиле электрического поля при переходе от одного варианта к другому обусловлены лишь выбором массы модельного электрона вплоть до нулевого значения (на рисунке 3.10 варианты расчётов идентифицированы отношением массы модельного иона к массе модельного электрона m_i/m_e). С увеличением m_i/m_e распределение электрического поля приближается к распределению, полученному в однокомпонентной модели.

В представленном на рисунке 3.10 случае из формулы (3.13) следует, что координата $x_b \approx 109$. Соответствующая ей точка на рисунке расположена на границе между областью почти однородного электрического поля и областью нарастающего поля. Это, а также данные, приведенные на рисунке 3.9, указывают на то, что точка x_b может претендовать на роль (движущейся) границы между областями квазинейтральности и неквазинейтральности. Дополнительным аргументом в пользу выбора x_b в качестве такой границы служит то, что эта величина однозначно вычисляется по формуле (3.13) и уже фигурирует в описании области вблизи ионного фронта. При этом возникает

весьма важный вопрос: является ли зависимость $x_b(t)$ C_p -характеристикой? Если это так, то в качестве обсуждавшейся выше граничной характеристики области квазинейтральности можно принять кривую $x_b(t)$. Такой же вопрос можно поставить и о координате ионного фронта $x_f(t)$, хотя оснований быть этой зависимости C_p -характеристикой, строго говоря, нет. Во-первых, $x_f(t)$ находится за пределами применимости решения в виде волны разрежения и, во-вторых, в отличие от C_p -характеристики, такой, например, как FF' на рисунке 3.1, начинающейся в точке $x_0 < 0$, $t_0 > 0$, ионный фронт всегда исходит из точки $x = 0$, $t = 0$. Очевидно, речь может идти только о выходе координаты ионного фронта на C_p -характеристику при больших временах t . Отметим, что ранее в гидродинамическом приближении для ионного фронта были получены зависимости, имеющие вид C_p -характеристик [60, 61].

В связи с поставленными вопросами обратим внимание на следующее. Для того, чтобы какой-либо объект двигался вдоль характеристики (3.7), его скорость v_c и ускорение dv_c/dt должны определяться соотношениями:

$$v_c = 2 \ln \frac{t}{t_0} + 1, \quad \frac{dv_c}{dt} = \frac{2}{t} \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (3.15)$$

В частности, ион может двигаться вдоль C_p -характеристики только в том случае, когда действующее на ион электрическое поле равно $2/t$. Такого движения не может быть в квазинейтральной области, где электрическое поле равно лишь $1/t$. Это же можно легко видеть из сравнения ионной скорости V_i в волне разрежения (3.2), взятой на некоторой характеристике (3.7)

$$V_i(x) = 1 + \frac{x}{t} = 2 \ln \frac{t}{t_0} \quad \text{при } t \geq t_0, \quad (3.16)$$

с v_c , вычисленной по (3.15) для того же t_0 . Получим, что скорость ионов меньше v_c

$$v_c - V_i(x) = 1. \quad (3.17)$$

Вопрос о применимости C_p -характеристик для описания интересующих нас движений можно решить с помощью аппроксимации данных численного эксперимента зависимостями вида (3.7). Несмотря на то, что в (3.7) для подбора имеется всего один параметр, t_0 , нам удалось получить достаточно

точное описание численных зависимостей от времени максимальной координаты ионов $x_f(t)$ и координаты $x_b(t)$, вычисленной по формуле (3.13) при известной из численного эксперимента зависимости потенциала в точке $x = x_f$ от времени $\varphi_f(t)$. Наилучшим образом численные данные аппроксимируются следующими C_p -характеристиками:

$$\begin{aligned} x_f &= 2t \ln \frac{t}{1,90} - t && \text{при } t \geq 1,90, \\ x_b &= 2t \ln \frac{t}{3,13} - t && \text{при } t \geq 3,13. \end{aligned} \quad (3.18)$$

На рисунке 3.11 представлены зависимости, построенные по (3.18) и по данным численного эксперимента. Различие между аппроксимирующими и исходными кривыми не превышает толщину линии на рисунке. Здесь же нанесены значения скоростей вдоль характеристик в соответствии с (3.15) и ионная скорость V_i в точке $x = x_b$ согласно (3.16):

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{dx_f}{dt} = 2 \ln \frac{t}{1,90} + 1 \simeq 2 \ln(0,868t) && \text{при } t \geq 1,90, \\ v_b &= \frac{dx_b}{dt} = 2 \ln \frac{t}{3,13} + 1 \simeq 2 \ln(0,527t) && \text{при } t \geq 3,13, \\ V_i(x_b) &= 1 + \frac{x_b}{t} = 2 \ln \frac{t}{3,13} \simeq 2 \ln(0,319t) && \text{при } t \geq 3,13. \end{aligned} \quad (3.19)$$

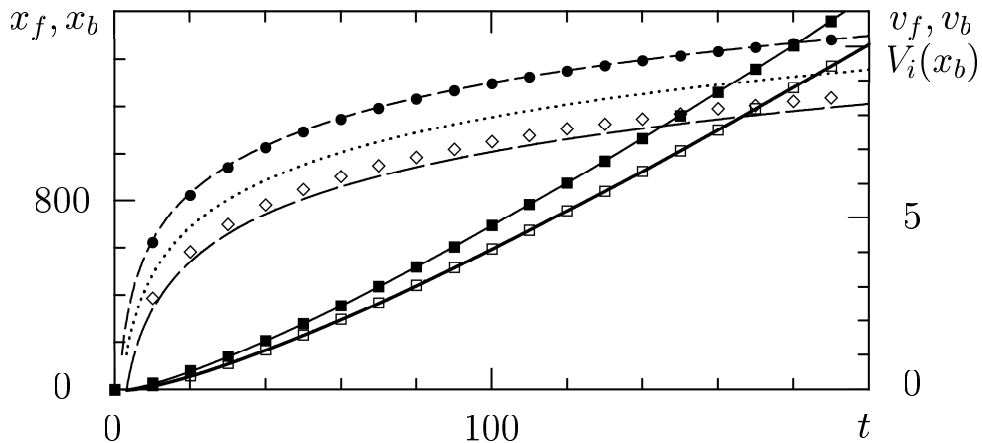


Рисунок 3.11. Временные зависимости для величин: x_f (сплошная кривая и тёмные квадраты), x_b (толстая сплошная кривая и светлые квадраты), v_f (штрихи и кружки), v_b (пунктир) и $V_i(x_b)$ (длинные штрихи и ромбы). Численный эксперимент — символы, формулы (3.18) и (3.19) — кривые. Ось ординат для скоростей — справа

Скорость первого иона v_f , определяемая по его координате $x_f(t)$, представляет собой скорость ионного фронта. Скорость v_b не относится к какой-то конкретной частице, а описывает движение границы между областями квазинейтральности и неквазинейтральности. Значение скорости частицы на этой границе должно быть близко к тому, что даёт решение (3.2), обозначенное в (3.19) как $V_i(x_b)$. На рисунке 3.11 также представлены полученные в численном эксперименте из фазовых плоскостей (x_i, v_i) значения скорости первого иона и скорости того иона, координата которого в данный момент времени равна x_b , то есть «численно экспериментальные» v_f и $V_i(x_b)$. Видно очень хорошее совпадение данных численного эксперимента о скорости ионного фронта с первой формулой (3.19). В точке $x = x_b$ скорость ионов несколько превышает значения (3.2), что обусловлено небольшим отклонением здесь потенциала от потенциала (3.3) (рисунок 3.9). Гидродинамические расчёты [60] дают почти такую же формулу для скорости ионного фронта. Отличаются только численные коэффициенты: в [60] вместо 0,868 получено значение 0,9.

Тот факт, что $x_b(t)$ и $x_f(t)$ можно считать характеристиками, наводит на мысль, что эти две кривые подобны, в некотором смысле, слабым разрывам. Слабый разрыв всегда является характеристикой [11] и находится на границе между двумя областями в плоскости (x, t) с разными аналитическими решениями. Примером может служить уже обсуждавшийся выше фронт волны разрежения (рисунок 3.1 и рисунок 3.8). Подобно слабому разрыву, как характеристика $x_b(t)$, так и характеристика $x_f(t)$ лежат между двумя областями с разными решениями.

Теперь мы можем определить временные зависимости величин на ионном фронте. Из аппроксимационных формул (3.18) получим

$$x_f - x_b \simeq t. \quad (3.20)$$

Из (3.20) и (3.12) находим

$$\varphi_f = \ln \frac{2}{t^2}, \quad E_f = \frac{2}{t}, \quad n_{ef} = \frac{2}{t^2}. \quad (3.21)$$

То, что электронная плотность на ионном фронте падает пропорционально

t^{-2} , было установлено в [61]. Формулы (3.21) для E_f и n_{ef} были получены для предела $t \gg 1$ в [98] из других соображений.

Формула (3.20) даёт оценку размера области неквазинейтральности, где существует положительный пространственный заряд. Хотя течение в этой области не автомодельно, её размер, выраженный в единицах автомодельной переменной $\tau = x/t$, всегда равен единице. Область пространственного заряда не только движется со скоростью v_b в направлении уменьшающейся плотности частиц, но также и расширяется с единичной скоростью.

Только на ионном фронте электрическое поле имеет значение (максимальное), которое может обеспечить движение иона по C_p -характеристике в соответствии с (3.15). Поэтому, за исключением иона, находящегося на ионном фронте, никакие ионы не могут двигаться по характеристикам (3.7) не только в квазинейтральной области, как мы уже видели из (3.17), но и в области пространственного заряда.

Соотношения между характерными скоростями хорошо видны из рисунка 3.11 и легко устанавливаются из (3.15)–(3.17) и (3.20):

$$v_f - v_b \simeq 1, \quad v_b - V_i(x_b) = 1, \quad v_f - V_i(x_f) = 1. \quad (3.22)$$

Здесь $V_i(x_f)$ вычисляется по формуле (3.2) и представляет собой то значение скорости, которое ион приобрёл бы на ионном фронте, если бы квазинейтральность соблюдалась вплоть до этого фронта. Иными словами, скорость $V_i(x_f)$ приобретается ионом в однородном поле волны разрежения. Увеличение этой скорости на единицу до значения v_f и есть эффект неквазинейтральности и, соответственно, неоднородности электрического поля вблизи ионного фронта. Как видно, максимальная скорость ионов увеличивается за счёт разделения зарядов, но это увеличение относительно невелико. Основной рост скорости ионов происходит за счёт электрического поля в волне разрежения.

Как было отмечено ранее, при малых t ионный фронт, исходящий при $t = 0$ из точки $x = 0$, не может быть точно описан с помощью характеристик, начинающихся при $t > 0$ из точки $x < 0$. Анализ данных численных экспериментов показал, что в этом случае можно использовать формулы,

полученные в [98]. В наших единицах эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x_f &= 2\sqrt{2} \exp(1/2) \left[\hat{t} \ln \left(\hat{t} + \sqrt{\hat{t}^2 + 1} \right) - \sqrt{\hat{t}^2 + 1} + 1 \right], \\ v_f &= 2 \ln \left(\hat{t} + \sqrt{\hat{t}^2 + 1} \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\hat{t} = t \exp(-1/2)/\sqrt{2}$. Вид зависимостей (3.23) является следствием предложенной в [98] интерполяционной формулы для электрического поля на ионном фронте

$$E_f = \frac{\sqrt{2} \exp(-1/2)}{\sqrt{\hat{t}^2 + 1}}, \quad (3.24)$$

которая даёт правильное конечное значение поля при $t = 0$ (см. (3.14)).

Таким образом, движение ионного фронта может быть описано формулами (3.23) при малых t , а при больших t следует воспользоваться зависимостями из (3.18) и (3.19). Кривая $x_b(t)$ из (3.18) может рассматриваться как граничная C_p -характеристика, разделяющая области квазинейтральности и неквазинейтральности и движущаяся со скоростью v_b из (3.19).

На рисунке 3.12 полученные в численном эксперименте временные зависимости величин n_{ef} и E_f на ионном фронте сравниваются с аналитическими зависимостями (3.21) (и (3.24) на вставке), а значения ионной плотности на левой стороне ионного фронта $n_i|_{x_f-0}$ — с зависимостью, определяемой соотношением

$$n_i|_{x_f-0} \simeq 2n_{ef}. \quad (3.25)$$

Видно, что указанные формулы хорошо описывают данные численного эксперимента. Справедливость соотношения (3.25), а также следующих формул

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln \frac{2(2x_f - x_b - x)^2}{(x_f - x_b)^4}, & E &= \frac{2}{2x_f - x_b - x}, \\ n_i &= \frac{2}{(2x_f - x_b - x)^2} + \frac{2(2x_f - x_b - x)^2}{(x_f - x_b)^4}, \\ n_e &= \frac{2(2x_f - x_b - x)^2}{(x_f - x_b)^4}, & n_i - n_e &= \frac{2}{(2x_f - x_b - x)^2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

представляющих пространственно-временные распределения величин в области положительного пространственного заряда $x_b \leq x \leq x_f$, хорошо видна из рисунка 3.13.

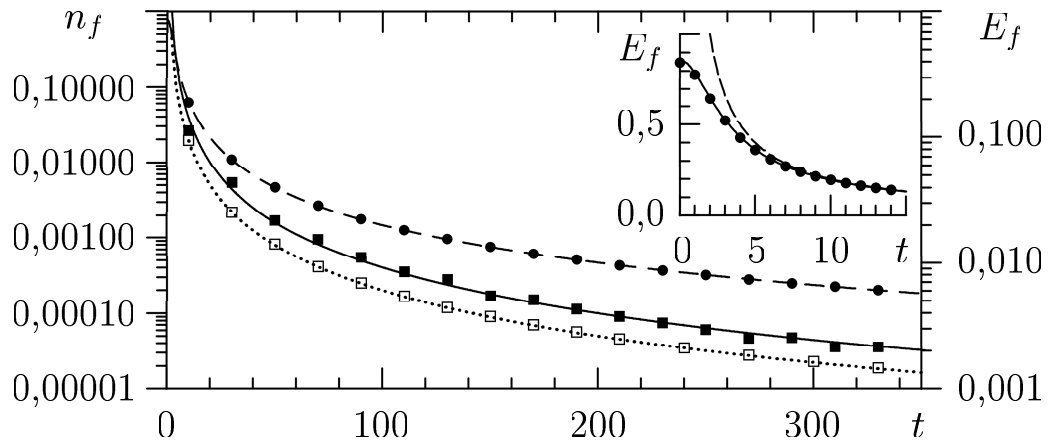


Рисунок 3.12. Временные зависимости величин по формулам (3.21) и (3.25) (кривые) и полученные в численном эксперименте (символы): E_f (штриховая кривая и кружки), n_{ef} (пунктирная кривая и светлые квадраты) и $n_i|_{x_f=0}$ (сплошная кривая и тёмные квадраты) при $T_{i0} = 0$. На вставке дополнительно сплошной кривой нанесена зависимость $E_f(t)$ по формуле (3.24)

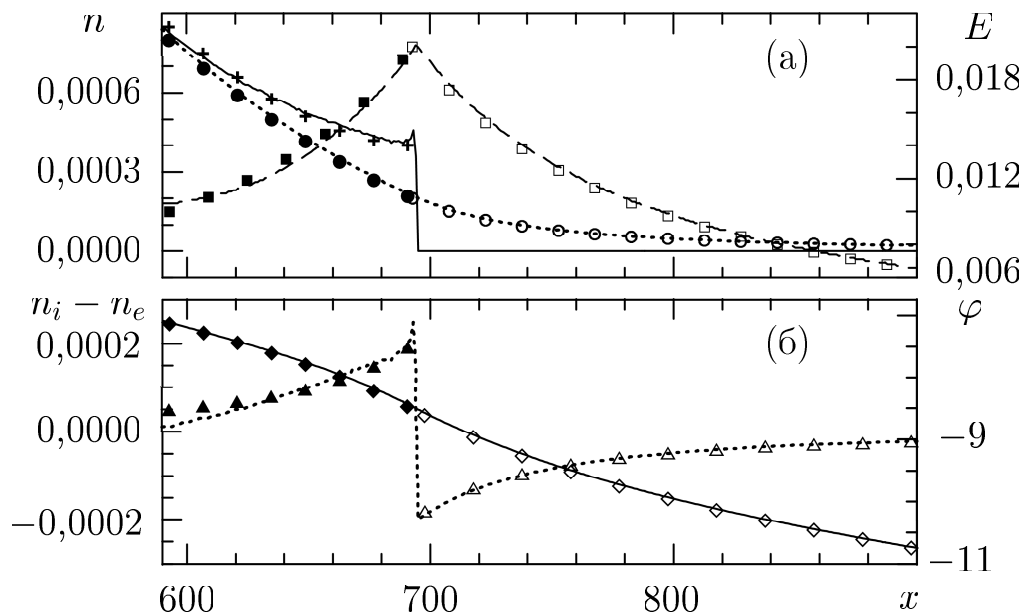


Рисунок 3.13. Пространственные распределения, полученные в численном эксперименте (кривые) и вычисленные по (3.26) (тёмные символы) и (3.12) (светлые символы) при $T_{i0} = 0$, $t = 100$. (а): n_i (сплошная кривая и знаки плюс), n_e (пунктирная кривая и кружки) и E (штриховая кривая и квадраты). (б): $n_i - n_e$ (пунктирная кривая и треугольники) и φ (сплошная кривая и ромбы)

На этом рисунке можно видеть сильный разрыв ионной плотности на ионном фронте, как предсказано в [61]. В этой же точке имеется разрыв величины $n_i - n_e$, то есть пространственного заряда. Видно, что при этом на левой стороне разрыва $x \rightarrow x_f - 0$ величина $n_i - n_e$ приблизительно равна n_e , откуда следует (3.25). Можно ввести среднюю плотность ионов на ионном фронте и записать (3.25) в виде

$$n_{if} = \frac{1}{2}(n_i|_{x_f-0} + n_i|_{x_f+0}) \simeq n_{ef}. \quad (3.27)$$

Заметим, что аналогичное (3.25) выражение для $n_i|_{x_f-0}$ было получено в пределе $t \gg 1$ в [98] из других соображений.

Из рисунка 3.13 видно, что электрическое поле имеет максимум на ионном фронте $x = x_f$, и оно распределено симметрично относительно этого фронта. Именно исходя из этой симметрии и используя пространственно-временные зависимости (3.12) в области справа от ионного фронта $x \geq x_f$, мы вывели формулы (3.26) для области слева от ионного фронта $x_b \leq x \leq x_f$. Как видно из рисунка 3.13, формулы (3.26) и (3.12) весьма точно описывают данные численного эксперимента.

Согласно уравнению Пуассона разрыв пространственного заряда $n_i - n_e$ сопровождается таким же разрывом производной от электрического поля $\partial E/\partial x$. В силу непрерывности n_e на ионном фронте, величина разрыва производной $\partial E/\partial x$ равна скачку плотности ионов на ионном фронте:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x_f-0} - \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x_f+0} = n_i|_{x_f-0} - n_i|_{x_f+0}, \quad (3.28)$$

как и было установлено в [61]. Подчеркнём, что соотношения (3.25) и (3.28) выполняются не только при $t = 100$, как на рисунке 3.13, но и при любых, не очень малых t .

Из (3.26) мы можем найти величины на границе квазинейтральности $x = x_b$ как функции от t :

$$\varphi_b = \ln \frac{8}{t^2}, \quad E_b = \frac{1}{t}, \quad n_{ib} = \frac{8,5}{t^2}, \quad n_{eb} = \frac{8}{t^2}. \quad (3.29)$$

В используемом здесь приближении имеется некоторое нарушение нейтральности ($n_{ib} > n_{eb}$) в этой точке, хотя электрическое поле здесь такое же, как

и в квазинейтральной области. Очевидно, что φ_b и n_{ib} принимают значения меньшие, чем, соответственно, φ и n_i в волне разрежения в точке $x = x_b$.

Разность потенциалов на ионном фронте φ_f и на границе области квазинейтральности $\varphi_b = \varphi(x_b)$ может быть легко вычислена из (3.21) и (3.29)

$$\varphi_f - \varphi_b = -2 \ln 2 \simeq -1,386.$$

Эта разница потенциалов остаётся неизменной во времени, что подтверждается и численным экспериментом (рисунок 3.9), где было получено $\varphi_f - \varphi_b \simeq -1,38 \pm 0,03$.

Используя (3.26), можно определить полное число ионов и полное число электронов, находящихся во всей области положительного пространственного заряда. Аналогично, используя (3.12), можно найти и полное число электронов в электронном облаке. После интегрирования получим

$$\int_{x_b}^{x_f} n_i dx = \frac{17}{3t}, \quad \int_{x_b}^{x_f} n_e dx = \frac{14}{3t}, \quad \int_{x_f}^{\infty} n_e dx = \frac{2}{t}.$$

Все эти величины оказываются обратно пропорциональными времени, несмотря на то, что, как мы видели в (3.20), размер области положительного пространственного заряда растёт пропорционально времени. Расширение плазмы происходит таким образом, что во всей области неквазинейтральности полное число частиц уменьшается со временем. Это согласуется с тем, что граница квазинейтральности движется быстрее ионов ($v_b > V_i(x_b)$, см. (3.22)). Со временем область квазинейтральности увеличивается, захватывая при этом частицы из области пространственного заряда. В последней постепенно остаётся всё меньше частиц, которые образуют пространственный заряд.

3.3.2 Влияние ионной температуры

При конечном значении T_{i0} всегда найдутся ионы с очень большими скоростями, хотя их число может быть ничтожно малым. Скорости таких ионов могут значительно превосходить ту скорость, которую ион приобретает даже за большое время в процессе расширения плазмы. В этом случае не

имеет смысла находить ион с максимальной координатой и рассматривать его как ионный фронт. Вместе с тем численные эксперименты показывают, что на профиле плотности ионов всегда имеется резкое падение при больших x . По сути дела, всегда возникает разрыв ионной плотности, быстро движущийся в сторону больших x . При этом на разрыве электрическое поле имеет максимум. Очевидно, что такой разрыв, по аналогии со случаем $T_{i0} = 0$, следует назвать ионным фронтом. Его координату $x = x_f$ будем приравнивать координате максимума электрического поля. В отличие от случая $T_{i0} = 0$, здесь перед ионным фронтом плотность ионов имеет ненулевое значение.

Рисунок 3.14 даёт представление о том, как влияет начальная ионная температура на течение вблизи ионного фронта. Здесь зависимости,

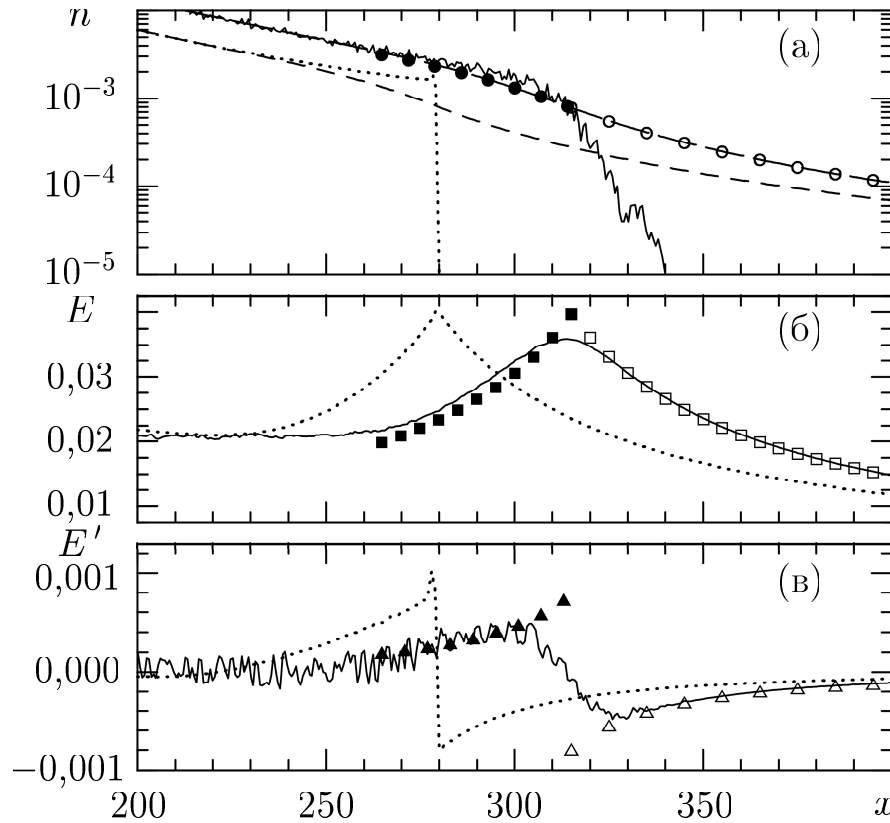


Рисунок 3.14. Пространственные распределения n_i (а), E (б) и $E' = \partial E/\partial x$ (в) при $T_{i0} = 0$ (пунктирные кривые) и $T_{i0} = 1$ (сплошные кривые). Распределение n_e (а) показано штрихами при $T_{i0} = 0$ и длинными штрихами при $T_{i0} = 1$. Величины n_e , E и E' , вычисленные по (3.26) и (3.12), для случая $T_{i0} = 1$ показаны кружками, квадратами и треугольниками, соответственно. Тёмные символы представляют (3.26), светлые — (3.12); $t = 50$

относящиеся к случаю $T_{i0} = 1$, сравниваются с аналогичными зависимостями, наблюдаемыми в численном эксперименте при $T_{i0} = 0$. Хорошо видно, что с ростом T_{i0} скорость движения ионного фронта возрастает. На самом фронте виден сильный разрыв плотности ионов. Некоторая часть ионов оказывается впереди максимума электрического поля. Сам максимум сглаживается и несколько расширяется. На производной электрического поля по координате $E' = \partial E / \partial x$ в численном эксперименте наблюдается заметный шум. Несмотря на это, хорошо видно, что вместо разрыва этой производной, возникающего при $T_{i0} = 0$ согласно (3.28), в случае $T_{i0} = 1$ величина $\partial E / \partial x$ изменяется от максимального значения до минимального на довольно большом пространственном интервале. При этом на ионном фронте $x = x_f$ её значение близко к нулю, и, в соответствии с уравнением Пуассона, плотности ионов и электронов здесь сравниваются: $n_{if} \simeq n_{ef}$ (рисунок 3.14, (а)). Это позволяет нам дать второе определение для координаты ионного фронта: в каждый момент времени t ионный фронт находится в точке перегиба функции $\varphi(x)$.

Напомним, что такое же соотношение в случае холодных ионов $T_{i0} = 0$ записано в виде (3.27). И в этом случае точка перегиба потенциала находится на ионном фронте. Такие точки перегиба $\varphi(x)$ при разных t хорошо видны на рисунке 3.9.

Используя значения x_f и φ_f , полученные в численных экспериментах при $T_{i0} = 0$ и $T_{i0} = 1$, мы нашли, что значения координаты x_b были равны, соответственно, 230 и 265 для рассматриваемого момента времени $t = 50$. Сопоставляя эти значения x_b с графиками электрического поля на рисунке 3.14, можно убедиться в том, что координата x_b находится вблизи начала подъема электрического поля, то есть на границе между областями квазинейтральности и неквазинейтральности. Таким образом, величина x_b может служить хорошей оценкой координаты этой границы, независимо от того, при каком значении T_{i0} в диапазоне от 0 до 1 рассматривается процесс.

Строго говоря, формулы (3.26) и (3.12) неприменимы при $T_{i0} \neq 0$. Однако, зная x_f и x_b , нетрудно сравнить аналитические зависимости с данными численного эксперимента. Как пример, на рисунке 3.14 представлены электронная плотность, электрическое поле и его производная, вычисленные

по (3.26) и (3.12) для случая $T_{i0} = 1$. Видно, что электронная плотность хорошо описывается этими формулами, но другие величины несколько отличаются от аналитических зависимостей в окрестности ионного фронта. Отклонение происходит за счёт более гладкого максимума электрического поля. Имеется также небольшое различие значений электрического поля, полученного в численном эксперименте и вычисленного по (3.26). Электрическое поле и его производная хорошо аппроксимируются формулами (3.12) в области, где ионная плотность, по крайней мере, на порядок ниже электронной.

Для описания движения ионного фронта при $T_{i0} \neq 0$ мы будем исходить только из полученной в численном эксперименте зависимости $x_f(t)$, так как определить $v_f(t)$ из фазовой плоскости с достаточной точностью при тепловом разбросе не удаётся. Зависимости $x_f(t)$ и $\varphi_f(t)$ использовались для расчёта зависимости $x_b(t)$. Затем $x_f(t)$ и $x_b(t)$ были аппроксимированы C_p -характеристиками. Поскольку мы рассматриваем случай $T_{i0} \neq 0$, эти характеристики определялись с помощью численного решения уравнения (3.6). Из разных решений выбирались те, которые дают наилучшее приближение к численному эксперименту. Рассматривались два варианта: $T_{i0} = 0,1$ и $T_{i0} = 1$. Соответствующие оптимальные значения t_0 в (3.6) были 1,84 и 1,44 при аппроксимации $x_f(t)$ и 2,97 и 2,26 при аппроксимации $x_b(t)$. С хорошей точностью размер области неквазинейтральности, выраженный в автомодельных единицах $\Delta\tau_{fb} = (x_f - x_b)/t$, не зависит от времени и изменяется от 1 при $T_{i0} = 0$ до 0,9 при $T_{i0} = 1$. Полученные в численном виде характеристики, описывающие $x_f(t)$ и $x_b(t)$, были численно продифференцированы по времени и, тем самым, найдены аппроксимирующие зависимости для скоростей ионного фронта $v_f(t)$ и границы области квазинейтральности $v_b(t)$.

Результаты такой обработки данных численных экспериментов показаны на рисунке 3.15 для ионного фронта и на рисунке 3.16 для границы области квазинейтральности. Хорошо видно, что использование C_p -характеристик в качестве аппроксимирующих функций позволяет получить достаточно точное описание данных численного эксперимента. Точность аппроксимации ионного фронта падает в области малых $t \sim 5-10$. Заметим, что представленные зави-

симости для случая $T_{i0} = 0,1$ не очень сильно отличаются от зависимостей, полученных в случае $T_{i0} = 0$. Из рисунков видно, что с ростом T_{i0} скорость ионного фронта увеличивается. Граница области квазинейтральности также движется быстрее. Вместе с тем увеличение скоростей не очень велико.

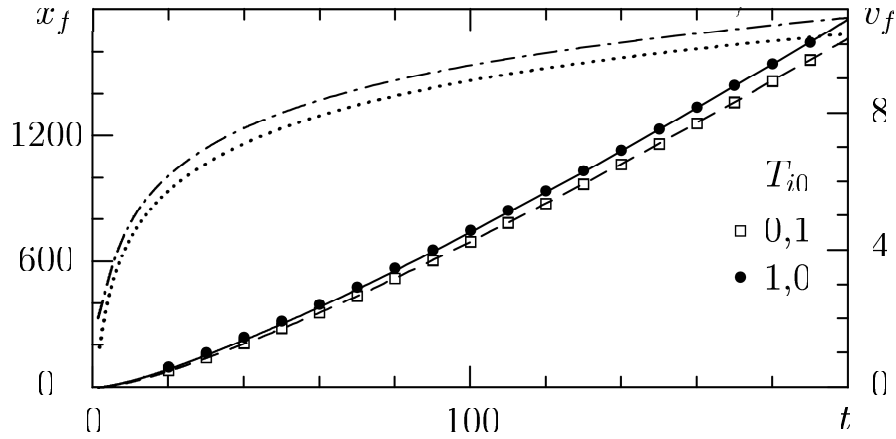


Рисунок 3.15. Координата x_f и скорость v_f (правая ось ординат) в зависимости от времени, полученные с помощью аппроксимации по (3.6) для двух случаев: $T_{i0} = 0,1$ (x_f — штриховая кривая, v_f — пунктирная кривая) и $T_{i0} = 1$ (x_f — сплошная кривая, v_f — штрихпунктирная кривая); значения координаты x_f в численном эксперименте показаны символами

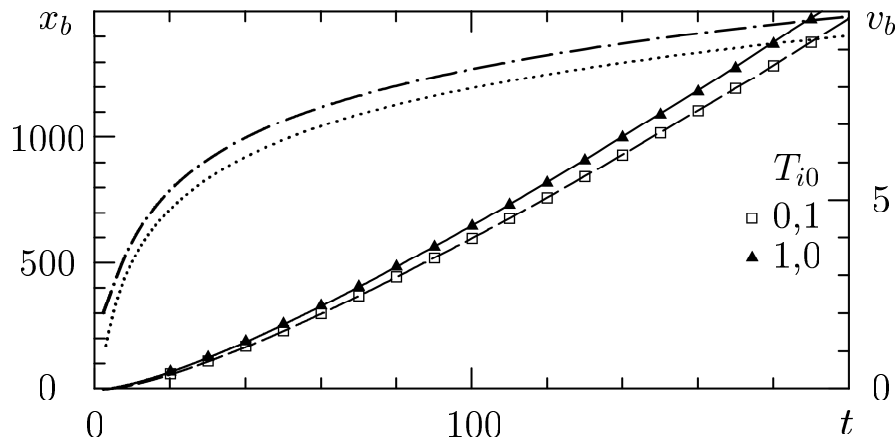


Рисунок 3.16. Координата x_b и скорость v_b (правая ось ординат) в зависимости от времени, полученные с помощью аппроксимации по (3.6) для двух случаев: $T_{i0} = 0,1$ (x_b — штриховая кривая, v_b — пунктирная кривая) и $T_{i0} = 1$ (x_b — сплошная кривая, v_b — штрихпунктирная кривая); значения координаты x_b в численном эксперименте показаны символами

3.3.3 Электронное облако

Проведенное выше рассмотрение течения вблизи ионного фронта основывалось, в основном, на предположении о применимости больцмановского распределения для электронов. При более подробном изучении электронного движения можно уточнить значения параметров на ионном фронте и описать электронное облако, образующееся перед ионным фронтом. Воспользуемся двухкомпонентной моделью плазмы, в которой движение электронов моделируется непосредственно. Количественные значения параметров на ионном фронте зависят от отношения масс модельного иона и модельного электрона (рисунок 3.10). Не ставя целью точно рассчитать случай какого-то конкретного значения m_i/m_e , сосредоточим внимание на основных особенностях течения в электронном облаке, ограничившись анализом численного эксперимента с модельным отношением масс $m_i/m_e = 100$.

На рисунке 3.17 представлены данные для двух моментов времени в случае плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Видно, что в электронном облаке (справа от пика электрического поля, $x > x_f$) электронная плотность сначала падает быстро, а затем понижается более медленно с ростом x . В рассматриваемом расчёте использовалось достаточно большое число модельных электронов — $5 \cdot 10^7$. Несмотря на это, при уровне $\sim 10^{-5}$ на электронной плотности наблюдается заметный шум. Сравнение численных зависимостей с формулами (3.12) показывает, что электронная инерция замедляет движение ионного фронта (ср. с рисунком 3.10). Вместе с тем пространственные распределения электронной плотности и электрического поля близки к тому, что дают формулы (3.12).

Представленные на рисунке 3.17 фазовые плоскости электронов выданы только для области электронного облака $x \geq x_f$ (отметим, что скорости частиц даны в электронной нормировке). На каждой фазовой плоскости можно выделить две характерные области. Первая область соответствует электронам, входящим в электронное облако с относительно небольшими скоростями. Они уходят от ионного фронта на не очень большое расстояние, так как довольно быстро затормаживаются, а затем приобретают отрицательные скорости и

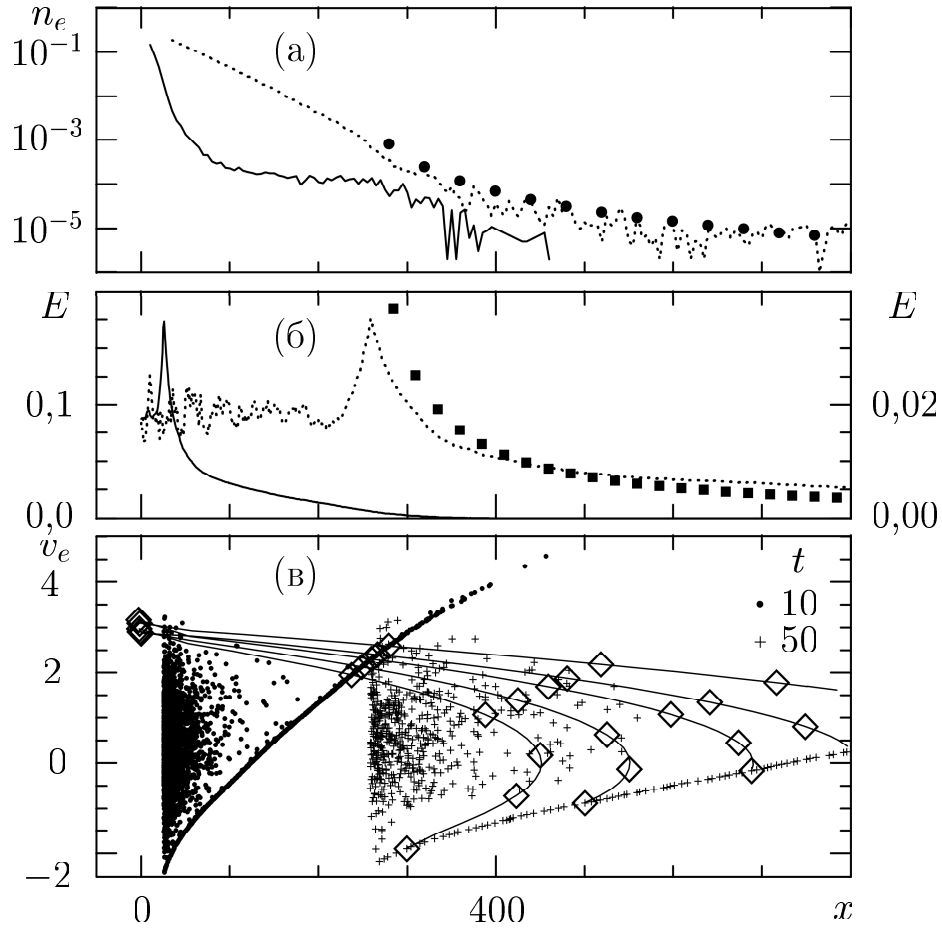


Рисунок 3.17. Пространственные распределения n_e (а) и E (б) при $t = 10$ (сплошные кривые) и при $t = 50$ (пунктирные кривые, правая ось ординат для E). Распределения (3.12) представлены кружками (n_e) и квадратами (E) для $t = 50$. Фазовые плоскости электронов (в) даны символами. Фазовые траектории пяти модельных электронов показаны сплошными кривыми и ромбами, расположенными через временной интервал $\Delta t = 10$. $T_{i0} = 0$

возвращаются назад в область $x < x_f$.

Вторая область на фазовой плоскости соответствует электронам, которые входят в электронное облако со значительными положительными скоростями в начальные моменты времени, на стадии формирования электронного облака. Эта область имеет вид линии, наклон которой к оси x уменьшается со временем. Её образование и эволюция наглядно иллюстрируются фазовыми траекториями нескольких модельных электронов, выданных при $t \geq 2$. Ромбы на фазовых траекториях показывают положения частиц через временной интервал $\Delta t = 10$. Соединяя ромбы, соответствующие одному и тому же

моменту времени на разных фазовых траекториях, можно получить линию, представляющую вторую область в данный момент времени. В частности, из рисунка 3.17 хорошо видно, что так построенные линии при $t = 10$ и $t = 50$ попадают на вторую область фазовой плоскости в те же моменты времени.

В целом, движение в электронном облаке происходит таким образом, что все вновь поступающие в него электроны в тормозящем электрическом поле приобретают со временем отрицательные скорости и возвращаются из электронного облака в область перед ионным фронтом $x < x_f$.

3.4 Волна охлаждения и обмен энергией

Предположение о том, что электроны подчиняются распределению Больцмана, а их температура имеет постоянное во времени и пространстве значение, является достаточно удобным упрощением при изучении расширения плазмы в вакуум. Однако согласовать это предположение с фактом ускорения ионов без дополнительных условий и предположений довольно затруднительно. Наличие ускоренных ионов свидетельствует о том, что процесс сопровождается обменом энергией между компонентами плазмы. Ионы ускоряются за счёт тепловой энергии электронов. Для изучения энергообмена необходимо не только определить приобретаемую ионами энергию, но и непосредственно вычислить энергию, которую теряют электроны. Такие расчёты можно сделать с помощью двухкомпонентной модели плазмы, в которой частицами моделируются как ионная, так и электронная компоненты плазмы. При обсуждении результатов расчётов по этой модели мы будем пользоваться не только основной ионной нормировкой, но и электронной нормировкой (п. 1.1). Время и автомодельная переменная в электронной нормировке будут обозначены через t_e и τ_e соответственно.

Численные эксперименты показали, что параметры электронной компоненты плазмы, в целом, изменяются автомодельно, за исключением области вблизи ионного фронта. На рисунке 3.18 показаны моменты M_e электронной функции распределения (в электронной нормировке) в зависимости от автомодельной переменной для случая холодных ионов $T_{i0} = 0$. На нижней гори-

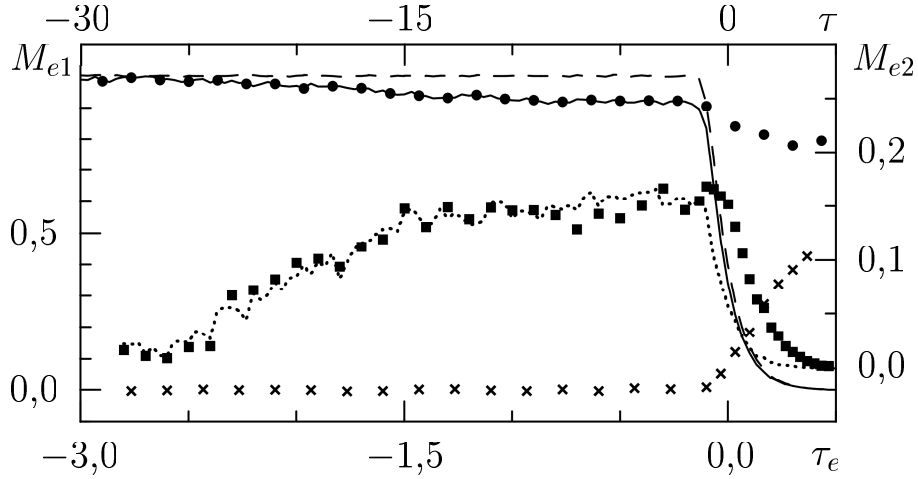


Рисунок 3.18. Зависимости от автомодельной переменной моментов функции распределения электронов $M_{e1} = \{n_e, V_e, \mathcal{E}_e, T_e\}$ и $M_{e2} = \{Q_e, \mathcal{G}_e\}$ для случая $T_{i0} = 0$, $m_i = 100$ при $t = 30$. M_{e1} : n_e — штриховая кривая, V_e — крестики, \mathcal{E}_e — сплошная кривая, T_e — кружки. M_{e2} (правая ось ординат): Q_e — квадраты, \mathcal{G}_e — пунктирная кривая

горизонтальной оси отложены значения τ_e (нормировка на электронную тепловую скорость $(T_{e0}/m_e)^{1/2}$), а верхняя горизонтальная ось представляет значения τ в ионной нормировке для используемого здесь отношения масс $m_i/m_e = 100$.

Из этого рисунка можно установить, что имеются две разные области течения. В области $\tau_e > -0,1$ хорошо видно расширение плазмы, поскольку плотность электронов падает, а их потоковая скорость увеличивается с ростом τ_e . В соседней области $-3 \leq \tau_e < -0,1$ процесс носит иной характер. Здесь плотность и потоковая скорость электронов сохраняют исходные значения: $n_e = 1$ и $V_e = 0$. Однако при этом с ростом τ_e происходит падение температуры T_e и энергии \mathcal{E}_e , равной здесь $n_e T_e$ в силу того, что $V_e = 0$. Кроме того, в этой области возникает вполне значимый поток энергии Q_e , который, по сути дела, представляет собой поток тепла \mathcal{G}_e . Иными словами, в области, где плазма сохраняет невозмущённые значения плотности и потоковой скорости электронов, имеется поток тепла, который приводит к уменьшению температуры электронов с ростом τ_e , то есть происходит охлаждение электронов. Такое явление изучено в работах автора [227, 237], где было предложено назвать его *волной охлаждения*, поскольку описанное

возмущение температуры распространяется в невозмущённую область.

По своей природе волна охлаждения не имеет точно определённого фронта, хотя по существу она занимает ограниченную область пространства и, как было установлено, расширяется автомодельно. Заметим, что, кроме волны охлаждения электронов, в процессе наблюдается более медленная волна — обычная волна разрежения ионов. В газодинамике волна разрежения имеет резкую границу с невозмущённой областью — точку слабого разрыва, которая и представляет собой фронт волны. Но в кинетике разреженной плазмы, как мы видели, слабый разрыв размывается, и здесь, как и в волне охлаждения, возникает некоторая неопределённость координаты фронта волны разрежения. В некотором смысле волна разрежения и волна охлаждения подобны друг другу. Однако развитие волны охлаждения зависит от электронного движения, а движение волны разрежения в конечном итоге определяется ионами. Поэтому, как нетрудно понять, пространственный размер области волны охлаждения будет в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз больше, чем пространственный размер области волны разрежения [227].

Используя результаты численных экспериментов, можно аппроксимировать зависимость электронной температуры T_e в области волны охлаждения от автомодельной переменной τ_e в первом приближении линейной функцией. Такая же функция описывает и зависимость электронной энергии \mathcal{E}_e от τ_e в той же области. Однако справа от волны охлаждения (то есть при $\tau_e > -0,1$ для рассматриваемого на рисунке 3.18 случая) кривые, представляющие $T_e(\tau_e)$ и $\mathcal{E}_e(\tau_e)$, сильно отличаются: электронная температура продолжает постепенно уменьшаться, а электронная энергия за счёт падения n_e резко снижается до нуля в небольшой окрестности точки $\tau_e = 0$. Исходя из этого, запишем

$$\mathcal{E}_e = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau_e \leq \tau_w, \\ \mathcal{E}_e(0) + [1 - \mathcal{E}_e(0)](\tau_e/\tau_w) & \text{при } \tau_w < \tau_e < 0, \\ 0 & \text{при } \tau_e > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Здесь τ_w представляет собой левую границу волны охлаждения, а постоянная $\mathcal{E}_e(0)$ есть значение \mathcal{E}_e в точке пересечения прямой $\tau_e = 0$ с прямой, которая аппроксимирует зависимость $\mathcal{E}_e(\tau_e)$ в области $\tau_w < \tau_e < 0$. В

таким приближённым виде зависимость электронной энергии от автомоделной переменной может быть записана для разных случаев, в каждом из которых по расчётной зависимости $\mathcal{E}_e(\tau_e)$ нетрудно оценить значения τ_w и $\mathcal{E}_e(0)$.

Применим (3.30) для рассмотрения вопроса об обмене энергией между электронами и ионами. Оценим величину изменения полной энергии всех электронов H_e в системе в зависимости от времени. Естественно предположить, что на такую же величину, но с обратным знаком, изменится полная энергия всех ионов H_i в системе. Используя (3.30), можно найти отклонение энергии электронов от невозмущённого значения и проинтегрировать это отклонение по всей длине системы. В результате получим:

$$H_e - H_{e0} = -(H_i - H_{i0}) = -C_e t_e = -C_i t, \quad (3.31)$$

где величины с индексом 0 имеют смысл невозмущённых начальных значений, а коэффициенты C_e и C_i определяются как:

$$C_e = -\frac{1}{2}[1 - \mathcal{E}_e(0)]\tau_w, \quad C_i = C_e \left(\frac{m_i}{Z_i m_e} \right)^{1/2}.$$

Для рассматриваемого на рисунке 3.18 случая были получены следующие оценки: $C_e \approx 0,165$, $C_i \approx 1,65$. Из рисунка 3.18 видно, что в значительной области пространства поток энергии и равный ему при $T_{i0} = 0$ поток тепла достигают в рассматриваемом случае значения $Q_e \approx 0,16$, то есть $Q_e \approx C_e$. Умножая этот поток на время t_e , мы получаем оценку величины энергии, унесённой за это время из области волны охлаждения. Величина Q_e , взятая со знаком минус, определяет изменение энергии электронов. Отметим, что поток энергии электронов при расширении плазмы в вакуум оказывается заметно меньшим, чем так называемый «вакуумный поток энергии». Последний представляет собой максимально возможный поток энергии. Он может быть достигнут только в среде невзаимодействующих частиц. Численно он равен $\sqrt{2/\pi} \approx 0,798$ (в наших единицах). В работах автора [210, 232] было показано, что в бесстолкновительной плазме максимальный поток энергии электронов равен примерно в два раза меньшей величине. Наблюдаемый же в волне охлаждения поток энергии электронов оказывается ещё более чем в два раза меньшим. Поскольку в волне охлаждения плотности ионов и электронов

сохраняют постоянные невозмущённые значения, электрическое поле, за исключением слабых флуктуаций, равно нулю и не может влиять на процессы переноса. Равенство $Q_e \approx C_e$, которое всегда выполняется и для других вариантов расчёта, показывает, что поток энергии электронов принимает вполне определённое значение, соответствующее устанавливающейся волне охлаждения.

К вопросу об обмене энергией между компонентами плазмы можно подойти и с другой стороны, используя решения КПТМ для ионного движения. Для случая $T_{i0} = 0$ можно записать выражение для энергии ионов, применяя зависимости (3.2), а затем проинтегрировать полученное выражение по области волны разрежения. При $V_{i0} = 0$ находим:

$$H_i - H_{i0} = \int_{-t}^{\infty} \exp(-1 - \tau)(1 + \tau)^2 dx = 2t. \quad (3.32)$$

Эта формула определяет увеличение полной энергии ионов в предположении, что электроны имеют больцмановское распределение. В рассмотренном выше случае, когда учитывалось движение электронов, в формуле (3.31) перед t стоял меньший коэффициент ($C_i \approx 1,65$). Таким образом, при учёте инерции электронов энергия ионов растёт со временем медленнее, чем в случае безынерционных электронов.

Линейное падение энергии электронов со временем подтверждается результатами численного моделирования (рисунок 3.19). Естественно, увеличение полной энергии ионов равно уменьшению полной энергии электронов. Нарастание ионной энергии во времени в численных экспериментах, как это и следует из нашего рассмотрения, не зависит от начального размера области плазмы L_i , если только волна охлаждения не достигла левой границы. Из рисунка 3.19 видно, что скорость нарастания ионной энергии в однокомпонентной модели такая же, как предсказывает соотношение (3.32), но наблюдается небольшой сдвиг данных численного эксперимента во времени. Это обусловлено тем, что система не сразу выходит на автомодельный режим движения, для которого и получена формула (3.32). Аналогичный, несколько меньший сдвиг данных численного эксперимента наблюдается в двухкомпонентной модели.

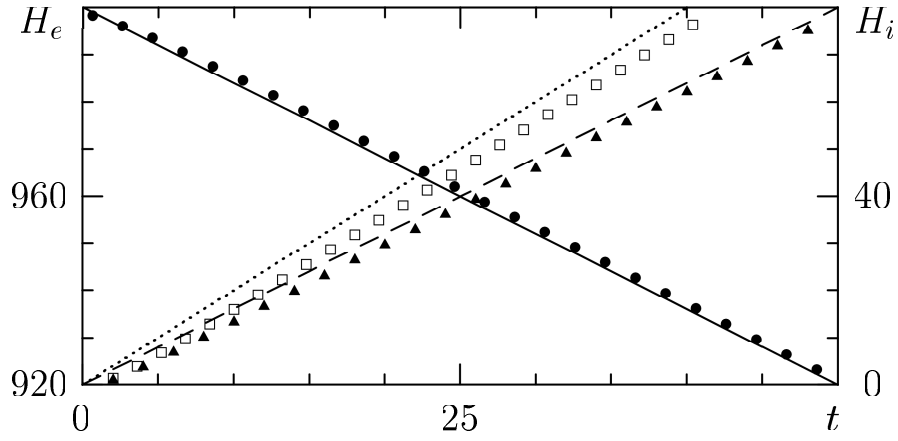


Рисунок 3.19. Зависимости $H_e(t)$ и $H_i(t)$ при $H_{e0} = 1000$, $H_{i0} = 0$. Расчёт по (3.31): H_e — сплошная кривая, H_i — штриховая кривая, расчёт по (3.32): H_i — пунктирная кривая. Численный эксперимент: H_e — кружки, H_i — треугольники в двухкомпонентной модели с $m_i/m_e = 100$, H_i — квадраты в однокомпонентной модели

Численные эксперименты показали, что и при ненулевой начальной ионной температуре $T_{i0} \neq 0$ характер электронного движения и процесс обмена энергией между электронами и ионами остаётся примерно таким же. При этом скорость нарастания энергии ионов увеличивается. Временная зависимость изменения полной энергии ионов может быть численно рассчитана для любого значения $T_{i0} \neq 0$, используя тот же подход, что и при выводе (3.32) для случая $T_{i0} = 0$. При этом плотность и скорость ионов определяются по (3.1). Так, в частности, при $T_{i0} = 1$ получим

$$H_i - H_{i0} \approx 2,76t.$$

Это выше зависимости (3.31) при ненулевой массе электронов. Например, в случае $m_i/m_e = 100$ при $T_{i0} = 1$ в численном эксперименте было получено, что C_i равно всего лишь 2,25. Отметим, что в диапазоне начальных ионных температур от 0 до 1 коэффициент пропорциональности перед t в выражении для $H_i - H_{i0}$ растёт от 2 до 2,76 почти линейно с ростом T_{i0} , лишь немного отклоняясь от линейной зависимости в большую сторону для промежуточных T_{i0} . Максимальное отклонение имеет место при $T_{i0} = 0,5$ (коэффициент равен 2,42 вместо 2,38 при линейном росте).

В целом, обмен энергией происходит таким образом, что энергия электронов уменьшается в одной области, в области волны охлаждения, а энергия ионов увеличивается в другой области, в области волны разрежения.

3.5 Перенос частиц и энергии

Расширение бесстолкновительной плазмы в вакуум сопровождается ускорением значительной доли ионов до больших скоростей. При экспериментальном изучении процесса удобно проводить измерения характеристик потока ионов на некотором расстоянии от начальной границы между плазмой и вакуумом. Можно, например, измерять такие величины, как полное число ионов, прошедших за время t через некоторую площадку, расположенную в точке $x = a$, их полную и среднюю энергии, а также энергетическое распределение прошедших ионов. Эти величины затем можно сравнить с соответствующими расчётными данными и использовать для диагностических целей.

Энергетическое распределение ионов в расширяющейся плазме впервые исследовалось в гидродинамическом приближении в [4]. Рассматривалось движение примесных ионов в плазме, основная компонента которой состоит из ионов другого сорта. Для анализа энергетических распределений ионов в лазерной плазме с несколькими сортами ионов, полученных в экспериментах [64], в работах [59,60] использовались численные решения гидродинамических уравнений, а также автомодельные решения. Экспериментальные распределения ускоренных ионов обсуждались также в [67,242].

Ниже подробно рассматривается энергетическое распределение ионов из расширяющейся плазмы, а также другие характеристики потока ионов, следуя работам автора [223,226].

3.5.1 Плазма с холодными ионами

В предельном случае холодных ионов $T_{i0} = 0$ распределение ионов по скоростям в любой точке $x = a$ имеет вид δ -функции. При этом потоковая скорость ионов $V_i(a, t)$ в волне разрежения (3.2) определяет скорость каждого

индивидуального иона, расположенного в точке $x = a$ в момент времени t , и является однозначной функцией от автомодельной переменной $\tau = a/t$. Энергия иона в наших безразмерных единицах равна квадрату скорости и может быть записана как

$$\varepsilon = (a/t + 1)^2$$

(мы полагаем здесь $V_{i0} = 0$). Полное число ионов, прошедших через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к оси x в точке $x = a$ ($a > 0$), за время от начала расширения плазмы до момента измерения t_s , равно

$$N = \int_0^{t_s} n_i V_i dt. \quad (3.33)$$

Для того, чтобы найти распределение по энергии этих ионов надо выражение (3.33) представить в виде интеграла по энергии от искомого распределения $F(\varepsilon)$:

$$N = \int_{\varepsilon_s}^{\infty} F(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.34)$$

где ε_s обозначает величину ионной энергии, соответствующую моменту времени t_s , при котором производится измерение:

$$\varepsilon_s = (a/t_s + 1)^2 = (\tau_s + 1)^2.$$

Используя (3.2), нетрудно найти, что энергетическое распределение имеет вид:

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_s, \\ \frac{a n_{i0} \exp(-\sqrt{\varepsilon})}{2(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2} & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_s. \end{cases} \quad (3.35)$$

Поскольку $\varepsilon_s > 1$ для любого конечного t_s , то все значения энергетического распределения (3.35) конечны.

Далее мы можем найти по формуле (3.34) полное число ионов N , прошедших через плоскость $x = a$ к моменту времени t_s , а также их полную энергию W (на единицу площади):

$$N = \frac{a n_{i0} \exp(-\sqrt{\varepsilon_s})}{\sqrt{\varepsilon_s} - 1} = n_{i0} t_s \exp\left(-1 - \frac{a}{t_s}\right), \quad (3.36)$$

$$W = N\varepsilon_{av} = \int_{\varepsilon_s}^{\infty} \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.37)$$

где средняя энергия, приходящаяся на один ион, определяется как

$$\varepsilon_{av} = \varepsilon_s + 2(\sqrt{\varepsilon_s} - 1) \left[1 - \frac{\text{Ei}(1 - \sqrt{\varepsilon_s})}{\exp(1 - \sqrt{\varepsilon_s})} \right] = (1 + \tau_s)^2 + 2\tau_s \left[1 - \frac{\text{Ei}(-\tau_s)}{\exp(-\tau_s)} \right]. \quad (3.38)$$

Здесь через Ei обозначена интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{\xi} d\xi}{\xi}.$$

При малых τ_s выражение для ε_{av} можно упростить:

$$\varepsilon_{av} \simeq 1 + 4\tau_s - 2\tau_s \ln(1,781\tau_s),$$

а при $\tau_s \gg 1$ имеем

$$\varepsilon_{av} \simeq 3 + \tau_s^2 + 4\tau_s - \frac{2}{\tau_s} + \frac{4}{\tau_s^2} - \frac{12}{\tau_s^3}.$$

Таким образом, для плазмы с холодными ионами мы получили явные формулы для величин, характеризующих поток ускоренных ионов.

3.5.2 Плазма с конечной температурой ионов

Отмеченная выше однозначная определённость скорости каждого индивидуального иона для случая $T_{i0} = 0$ не соблюдается при $T_{i0} \neq 0$. В каждой точке пространства скорости ионов имеют тепловой разброс, точный учёт которого возможен только при численном решении задачи. Тот факт, что функция распределения ионов с ростом τ достаточно быстро приближается к δ -образной, позволяет предположить, что можно без большой погрешности вычислить энергетическое распределение ионов, принимая для всех ионов, находящихся в заданной точке пространства, одну и ту же величину скорости, равную потоковой скорости V_i . При этом само значение V_i , как и значение плотности ионов n_i , определяются с учётом теплового движения согласно формулам волны разрежения (3.1).

Принимая приближённо в качестве энергии иона ε в точке $x = a$ энергию его направленного движения, можно в соответствии с (3.1) получить

$$\varepsilon = V_i^2 = (a/t + c_i)^2. \quad (3.39)$$

Выполняя по этому соотношению замену переменной t в (3.33) на переменную ε , найдём энергетическое распределение в представлении (3.34) [226]:

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_s, \\ \frac{a n_i}{2(\sqrt{\varepsilon} - c_i)^2} \cdot \frac{2c_i^2 - 1}{c_i^2} & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_s. \end{cases} \quad (3.40)$$

В этой формуле величины $n_i = n_i(\varepsilon)$ и $c_i = c_i(\varepsilon)$ являются функциями энергии иона, а ε_s определяется как корень уравнения (3.39) при $t = t_s$, то есть

$$\varepsilon_s = \left[\frac{a}{t_s} + c_i(\varepsilon_s) \right]^2.$$

Здесь использовалась формула для производной

$$\frac{dc_i}{d\varepsilon} = \frac{1 - c_i^2}{2V_i c_i^2},$$

которую можно получить, приравнивая выражения для производной $dV_i/d\varepsilon$, следующие из (3.39) и (3.1).

При выводе (3.40) в выражении для энергии иона (3.39) пренебрегалось энергией теплового движения, что в большинстве случаев вполне допустимо. Однако при малых значениях a/t , то есть в поздние моменты времени, на прибор в плоскости $x = a$ увеличится приход ионов с тепловыми скоростями. Поэтому для такого случая имеет смысл учесть перенос тепловой энергии и вместо (3.39) воспользоваться для энергии иона выражением, которое следует из первой формулы (1.12) при пересчёте на одну частицу:

$$\varepsilon = V_i^2 + T_i = (a/t + c_i)^2 + T_i. \quad (3.41)$$

(Очевидно, что в рассматриваемом случае $m_i = 1$ в (1.12).) Дифференцируя по ε соотношения (3.41), (1.19) и выражение для V_i из (3.1), получаем уравнения, из которых нетрудно найти производные:

$$\frac{dT_i}{d\varepsilon} = \frac{c_i^2 - 1}{c_i^2 - 3c_i\sqrt{\varepsilon - T_i} - 1},$$

$$\frac{dc_i}{d\varepsilon} = \frac{3}{2c_i} \cdot \frac{c_i^2 - 1}{c_i^2 - 3c_i\sqrt{\varepsilon - T_i} - 1}.$$

Используя эти выражения, можно определить энергетическое распределение ионов

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_s, \\ \frac{an_i}{2(\sqrt{\varepsilon - T_i} - c_i)^2} \cdot \frac{3(2c_i^2 - 1)\sqrt{\varepsilon - T_i}}{c_i(1 + 3c_i\sqrt{\varepsilon - T_i} - c_i^2)} & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_s. \end{cases} \quad (3.42)$$

Как и ранее, здесь величины n_i , c_i и T_i являются функциями от ε в соответствии с (3.1) и (3.41), а значение ε_s определяется как корень уравнения (3.41) при $t = t_s$. При известной функции $F(\varepsilon)$ интегральные величины N , W и ε_{av} вычисляются по общим формулам (3.34) и (3.37).

Очевидно, что при $T_{i0} \rightarrow 0$ как (3.40), так и (3.42) переходят в (3.35).

3.5.3 Сравнение с численным экспериментом

Полученные аналитические зависимости сравнивались с результатами численного моделирования по однокомпонентной модели (рисунки 3.20—3.23). Расчёты проводились для $a = 200$.

На рисунке 3.20 представлены энергетические распределения ионов. Аналитические зависимости (3.35) и (3.42) показаны для случая $t_s \rightarrow \infty$, $\varepsilon_s \rightarrow 1$. При конечных t_s энергетическое распределение согласно (3.35), (3.40) и (3.42) падает до нуля слева от точки $\varepsilon = \varepsilon_s$. Легко вычислить значения ε_s , соответствующие данным численного эксперимента. Так в случае $T_{i0} = 0$ для ε_s имеем значения 9, 5,444 и 4 для t_s , равных 100, 150 и 200 соответственно. Как видно из рисунка 3.20, именно при этих значениях ε полученные в численном эксперименте энергетические распределения падают скачком до нуля при переходе к меньшим значениям ε . То же самое наблюдается и в случае $T_{i0} = 1$, но крутизна падения слегка уменьшается.

Видно также, что данные численных экспериментов хорошо ложатся на аналитические зависимости в области $\varepsilon > \varepsilon_s$.

На этом же рисунке приведено энергетическое распределение ионов, попадающих на анализатор в экспериментах по созданию плотной плазмы с по-

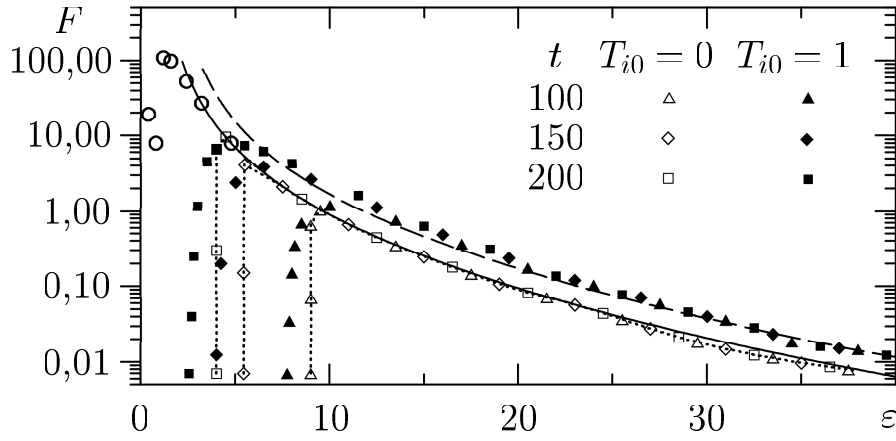


Рисунок 3.20. Энергетическое распределение ионов $F(\varepsilon)$ при $a = 200$. Случай $T_{i0} = 0$: формула (3.35) — сплошная кривая, численный эксперимент — светлые символы с пунктирными кривыми. Случай $T_{i0} = 1$: формула (3.42) — штриховая кривая, численный эксперимент — тёмные символы. Эксперимент [242] — окружности

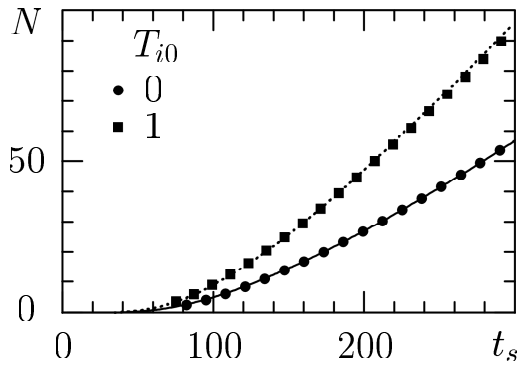


Рисунок 3.21. Полное число ионов $N(t_s)$ при $a = 200$. Аналитические решения — сплошная ($T_{i0} = 0$) и пунктирная ($T_{i0} = 1$) кривые. Численный эксперимент — символы

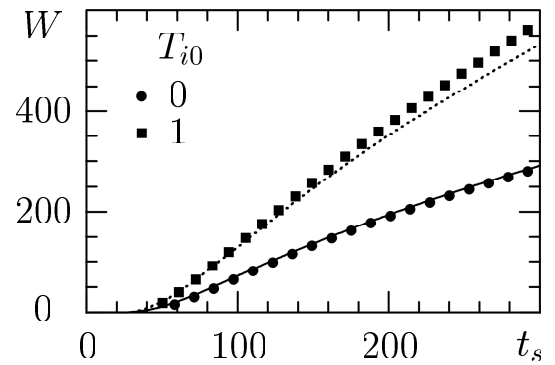


Рисунок 3.22. Полная энергия ионов $W(t_s)$ при $a = 200$. Аналитические решения — сплошная ($T_{i0} = 0$) и пунктирная ($T_{i0} = 1$) кривые. Численный эксперимент — символы

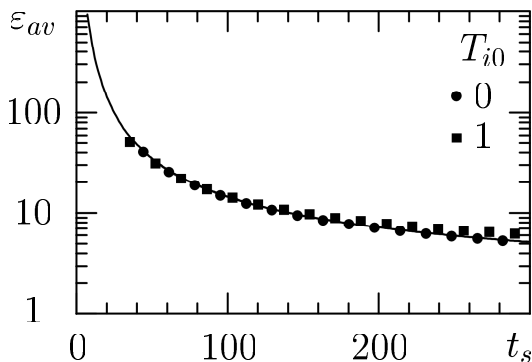


Рисунок 3.23. Средняя энергия ионов $\varepsilon_{av}(t_s)$ при $a = 200$. Аналитические решения для случая $T_{i0} = 0$ — сплошная кривая. Численный эксперимент — символы

мощью микровзрывов на металлической поверхности [242]. Экспериментальные результаты, представленные в [242] в произвольных единицах, пронормированы здесь так, что экспериментальное и теоретическое (при $T_{i0} = 0$) значения $F(\varepsilon)$ совпадают в точке $\varepsilon = 3,2$. Видно, что экспериментальные данные на значительном интервале энергий хорошо согласуются с расчётной зависимостью.

Зависимости интегральных величин от момента измерения t_s , вычисленные в случае $T_{i0} = 0$ по формулам (3.36)–(3.38) и в случае $T_{i0} = 1$ по формулам (3.34), (3.37), в которых $F(\varepsilon)$ определяется по (3.42), сравниваются с данными численных экспериментов на рисунках 3.21–3.23. Видно хорошее согласие расчёта по формулам и численного эксперимента. Небольшое отличие наблюдается лишь для полной перенесённой энергии ионов на поздних временах $t_s \geq 200$. При этом средняя энергия ионов на рассматриваемых временах оказывается заметно большей температуры ионов даже в случае $T_{i0} = 1$ и поэтому не зависит от T_{i0} (на рисунке 3.23 аналитические значения ε_{av} при $T_{i0} = 1$ не показаны, так как они практически совпадают с соответствующими значениями при $T_{i0} = 0$). В целом, средняя энергия ионов медленно падает с ростом t_s .

Глава 4

Расширение плазмы в плазму

В лабораторной плазме из-за её пространственной ограниченности всегда имеются области неоднородности. Изменения параметров плазмы в пространстве могут быть достаточно резкими, по крайней мере, в начальные моменты времени после образования плазмы. В космосе примером явлений, приводящих к появлению областей неоднородности плазмы могут служить вспышки на Солнце. Эволюция резкого изменения плотности во многих случаях может рассматриваться как расширение плазмы в плазму меньшей плотности или как распад конечного разрыва плотности.

Целью представленных в этой главе исследований является нахождение характерных закономерностей и особенностей нелинейных движений плазмы при распаде конечного разрыва плотности. Движение плазмы изучается с помощью численного моделирования по методу частиц в ячейке. Процесс рассмотрен при разных значениях скачка плотности и температуры ионов. Особое внимание уделено БУВ и её эволюции, обсуждено влияние отражённых от волны ионов. Получены решения для течений с монотонно изменяющимися параметрами и проведено их сравнение с экспериментом. Изложение следует работам [212, 219, 233], выполненным с участием автора, а также работам автора [206, 222, 234], написанных без соавторов.

4.1 Постановка задачи

Задача о расширении плазмы в плазму ставится здесь как задача о распаде разрыва плотности. Разрыв плотности частиц задается в начальный

момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$. Ограничиваясь случаем $Z_i = 1$ и полагая, что слева и справа от точки разрыва частицы распределены однородно и в этих областях выполняются соотношения квазинейтральности, запишем начальные распределения плотности ионов $n_i(x, 0)$ и электронов $n_e(x, 0)$ в виде

$$n_i(x, 0) = n_e(x, 0) = \begin{cases} n_{l0} = 1 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ n_{r0} & \text{при } 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (4.1)$$

где n_{l0} и n_{r0} — постоянные. Здесь мы вводим индексы l и r , с помощью которых мы будем различать частицы, первоначально расположенные в области $-\infty < x < 0$ (l -частицы), от частиц, первоначально расположенных в области $0 < x < \infty$ (r -частицы). Это позволит при моделировании проследить отдельно эволюцию плотной плазмы и эволюцию разреженной плазмы. Будем считать, что всегда более плотная плазма в начальный момент времени находится слева ($n_{l0} > n_{r0}$), и её плотность принимается за единицу плотности. Задача состоит в изучении движения плазмы в последующие моменты времени $t > 0$ при условии, что на бесконечности $x \rightarrow \pm\infty$ плазма всё время остаётся невозмущённой.

Скачок плотности задаётся безразмерным параметром n_{r0} , который и будет характеризовать процесс. В общем случае в задаче имеются ещё такие параметры, как начальная температура ионов T_{i0} , которая здесь предполагается одной и той же во всём пространстве, а также потоковые скорости l -ионов V_{l0} и r -ионов V_{r0} в невозмущенных областях. В данной главе мы будем полагать, что $V_{l0} = V_{r0} = 0$.

4.2 Плазма с холодными ионами

4.2.1 Общая характеристика течения

Рассмотрим результаты численного моделирования распада разрыва плотности в плазме с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Используется модель с двумя сортами ионов и бoльцмановскими электронами. Типичная картина течения представлена на рисунке 4.1. Аналогичные результаты были получены и в гидродинамическом приближении (1.15) в работе [128]. Из рисунка 4.1 видно,

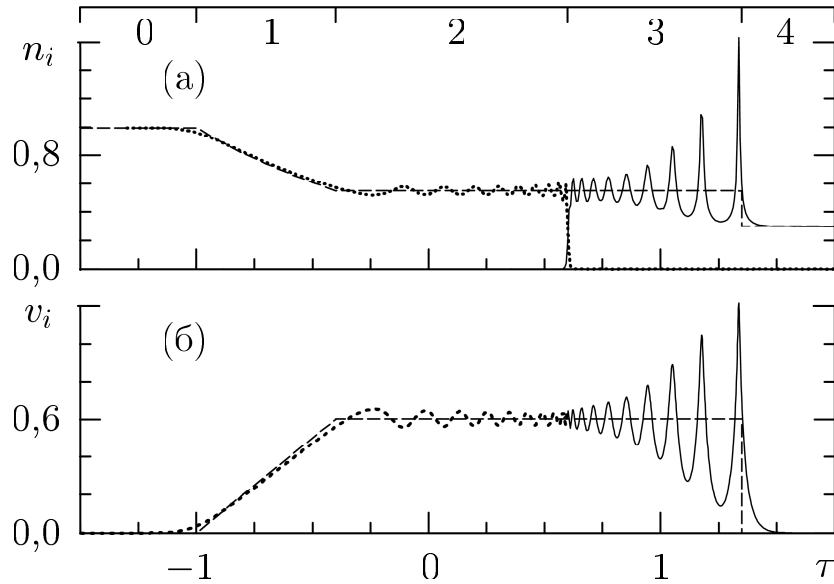


Рисунок 4.1. (а): плотность ионов как функция от τ ; (б): фазовая плоскость ионов (τ, v_i) . Пунктирные кривые соответствуют l -ионам, сплошные — r -ионам. Штриховыми линиями представлены аналитические решения. Цифрами вверху обозначены области течения. $n_{r0} = 0,3$, $T_{i0} = 0$, $t = 80$

что в течении можно выделить несколько характерных областей значений автомодельной переменной $\tau = x/t$. Эти области обозначены вверху цифрами. В области 0 ($\tau < -1$) находится невозмущенная плотная плазма, в которую распространяется волна разрежения (область 1). Волна разрежения переходит в платоподобную область 2, в которой возбуждены осцилляции. При этом плотность и средняя скорость ионов осциллируют в противофазе. Область 2, заполненная, как и предыдущие области, l -ионами, через контактный разрыв при $\tau_c \simeq 0,6$ соединяется с областью 3. Последнюю заполняют уже r -ионы. В этой области также возбуждаются осцилляции, амплитуда которых увеличивается с ростом τ . В отличие от области 2 здесь фазы осцилляций плотности и потоковой скорости совпадают. Вблизи контактного разрыва τ_c происходит сбой фазы осцилляций. Фронт осцилляторной области 3 имеет солитоноподобный вид, и, как будет показано ниже, может быть рассчитан точно так же, как рассчитывается профиль солитона. Фронт отделяет область 3 от области невозмущенной разреженной плазмы 4. Он находится на месте фронта ударной волны в обычной газодинамике.

В отличие от случая расширения плазмы в вакуум, когда волна

разрежения развивается в полубесконечной области от фронта волны до $\tau \rightarrow \infty$, здесь волна разрежения занимает конечную область пространства, и зависимости таких, например, величин как потенциал или плотность ионов от автомодельной переменной τ сшиваются на правой границе волны разрежения с соответствующими зависимостями в области 2. При этом сами значения параметров в области 2 заметно осциллируют. Кроме того, точка $\tau = \tau_p$, которую мы можем принять за точку сшивки решений в двух областях, меняет свое положение со временем. Очевидно, что выход на автомодельный режим движения в области 1 потребует определённого времени и будет тем короче, чем сильнее затухание осцилляций в области 2. Напомним, что в случае расширения плазмы в вакуум выход на автомодельный режим осуществляется в течение одного - двух ионных плазменных периодов.

Рисунок 4.2 иллюстрирует процесс выхода численного решения в области 1 на автомодельное решение (3.2)–(3.3) при $T_{i0} = 0$. Как видно, это занимает достаточно большое время, и в течение этого времени описание области 1 с помощью формулы (3.3) содержит определённую погрешность.

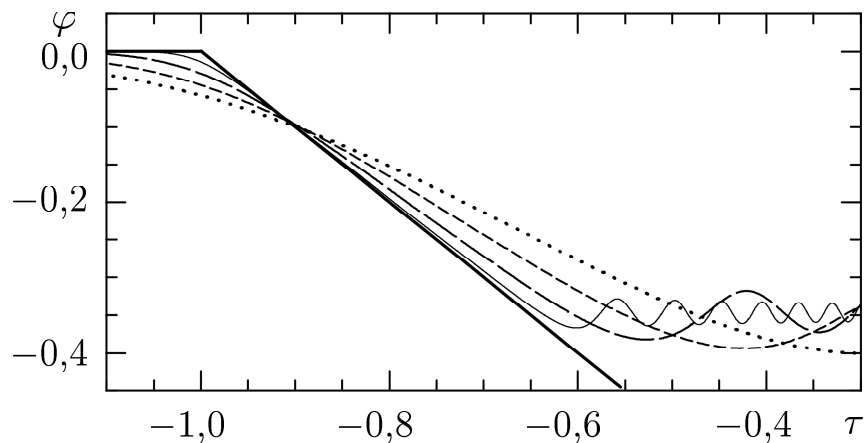


Рисунок 4.2. Зависимость $\varphi(\tau)$ в разные моменты времени: 20 (пунктирная кривая), 40 (штриховая кривая), 100 (длинные штрихи) и 400 (сплошная кривая) при $n_{r0} = 0,5$, $T_{i0} = 0$. Толстая кривая — $\varphi(\tau)$ по формуле (3.3)

В областях 2 и 3 движение таких элементов, как осцилляции, не автомодельно. Число осцилляций растёт со временем. Гидродинамические расчеты и теоретический анализ в [128] показали, что амплитуда осцилляций в

области 2 и в некоторой части области 3 с течением времени уменьшаются. То же самое подтверждают и результаты наших кинетических расчетов. Область 2 с хорошей точностью имеет вид плато, а в области 3 к тем же значениям на плато приближаются средние величины. Область 3, по сути дела, представляет собой упоминавшуюся выше бесстолкновительную ударную волну (БУВ), которая распространяется по области 4.

На рисунке 4.1, в дополнение к численным данным, мы приводим приближенные аналитические оценки параметров течения. Эти оценки получены, исходя из следующих соображений. Численные эксперименты показывают, что все возмущенные области, включая и область БУВ, расширяются таким образом, что размер областей в единицах τ остается примерно одним и тем же при разных значениях t (рисунок 4.3). Из этого факта следует автомодельность движения в области волны разрежения 1. Области 2 и 3 можно представить как одну область плато, оканчивающуюся разрывом в точке первого максимума БУВ. В рамках такого упрощенного представления можно сформулировать аналитическую модель, в которой течение полагается состоящим из автомодельно расширяющихся областей — волны разрежения (область 1) и плато (области 2 и 3), а также разрыва, движущегося с по-

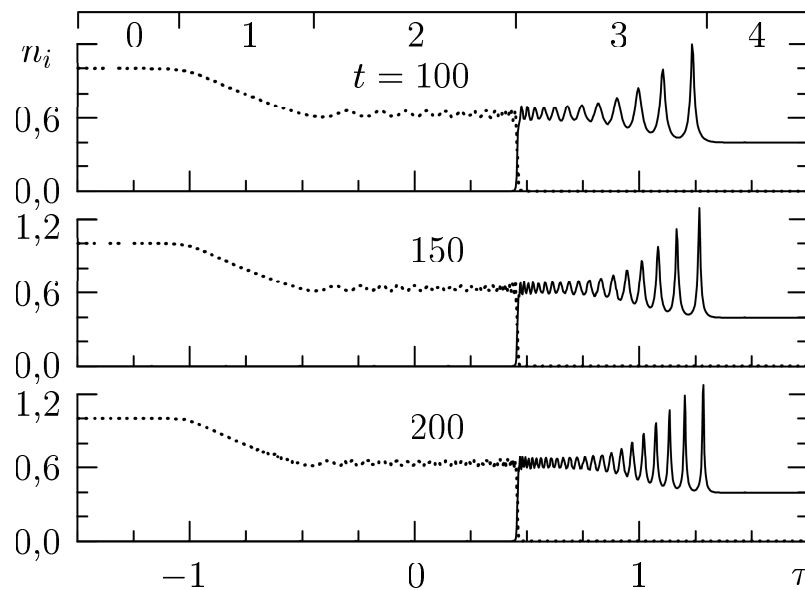


Рисунок 4.3. Зависимость $n_i(\tau)$ в разные моменты времени при $n_{r0} = 0,4$, $T_{i0} = 0$. Пунктирные кривые соответствуют l -ионам, сплошные — r -ионам. Цифрами вверху обозначены области течения

стоянной скоростью. В такой модели по обе стороны разрыва располагаются области однородной плазмы: слева — область плато, которую будем обозначать индексом p , и справа — область невозмущённой плазмы, состоящей из r -частиц. В однородной плазме соблюдается квазинейтральность. Поэтому при $Z_i = 1$ потенциал φ_p в платоподобных областях 2 и 3 и потенциал φ_{r0} в области низкоплотностной плазмы 4 можно вычислять по формуле (1.9):

$$\varphi_p = \ln n_{ip}, \quad \varphi_{r0} = \ln n_{r0}. \quad (4.2)$$

При стационарном движении между величинами в обеих областях существует связь, устанавливаемая уравнениями (1.53). Эти уравнения, записанные для нашего случая, совместно с (4.2) образуют систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными: n_{ip} , V_{ip} , φ_p и D . Задание любой одной из них позволяет найти все остальные величины.

Важными величинами, которые характеризуют течение, являются, с одной стороны, скорость волны относительно невозмущённой низкоплотностной плазмы $D - V_{r0}$ и, с другой стороны, установившейся скачек потенциала $\varphi_p - \varphi_{r0}$ при переходе от областей 2 и 3 к области 4. Их комбинация в виде перенормированного скачка потенциала

$$\Psi = \frac{2(\varphi_p - \varphi_{r0})}{(D - V_{r0})^2}$$

может служить характеристикой течения. Все параметры течения могут быть представлены в виде функций от Ψ . Такое представление позволяет получить некоторые общие результаты. Как пример, рассмотрим случай плазмы с холодными ионами, $T_{i0} = 0$. Из указанной системы уравнений можно найти

$$\begin{aligned} n_{ip}/n_{r0} &= (1 - \Psi)^{-1/2}, \\ \varphi_p - \varphi_{r0} &= -\frac{1}{2} \ln(1 - \Psi), \\ V_{ip} - V_{r0} &= \left(1 - \sqrt{1 - \Psi}\right) \left[-\frac{\ln(1 - \Psi)}{\Psi}\right]^{1/2}, \\ D - V_{r0} &= \left[-\frac{\ln(1 - \Psi)}{\Psi}\right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (4.2)–(4.3), обратим внимание на то, что на своей левой границе плато сшивается с областью волны разрежения 1,

распространяющейся в невозмущенную область 0. Считая, что к рассматриваемому моменту времени движение в области 1 вышло на автомоделный режим, воспользуемся выражениями (3.2)–(3.3) для описания волны разрежения. Поскольку в невозмущенной области 0 ионы предполагаются неподвижными ($V_{i0} = V_{l0} = 0$), то из (3.2) и (3.3) следует, что в волне разрежения $V_i = -\varphi$. Отсюда, в точке сшивки с плато имеем

$$V_{ip} = -\varphi_p. \quad (4.4)$$

Подставляя сюда величины из (4.2)–(4.3), получим уравнение для Ψ :

$$\frac{1}{2} \ln(1 - \Psi) + \left(\sqrt{1 - \Psi} - 1 \right) \left[-\frac{\ln(1 - \Psi)}{\Psi} \right]^{1/2} = \ln n_{r0} + V_{r0}. \quad (4.5)$$

Как и следовало ожидать, Ψ определяется указанным выше единственным при $V_{r0} = 0$ параметром задачи n_{r0} . После нахождения Ψ все величины на плато, а также скорость волны, вычисляются по формулам (4.3). Для того, чтобы полностью описать профиль течения, надо ещё определить две значимые точки на плато 2: положение левой границы плато τ_p и положение контактного разрыва между l - и r -ионами τ_c . Точка τ_p находится одновременно на плато и в области волны разрежения. Из (3.3) и (4.4) следует

$$\tau_p = -1 - \varphi_p = -1 + V_{ip}. \quad (4.6)$$

Все плато в автомоделных переменных занимает область $[\tau_p, D]$. Контактный разрыв, как легко понять, будет двигаться со скоростью V_{ip} , то есть

$$\tau_c = V_{ip}. \quad (4.7)$$

Естественно, область волны разрежения $-1 \leq \tau \leq \tau_p$ описывается формулами (3.2)–(3.3).

Таким образом, соотношения (4.3)–(4.7) позволяют построить приближенный профиль течения, состоящий из невозмущенных областей 0 и 4, волны разрежения 1, а также усреднённого плато в областях 2 и 3. Переход из области 3 в область 4 рассматривается как разрыв при $\tau = D$. Из рисунка 4.1 видно, что полученное приближенное решение отражает основные особенности процесса.

На рисунке 4.4 представлено подробное сравнение предсказываемых по формулам (4.3)–(4.5) параметров течения $\Pi = \{n_{ip}, V_{ip}, D, \Psi\}$ с результатами численного моделирования [234]. Отметим, прежде всего, что численное

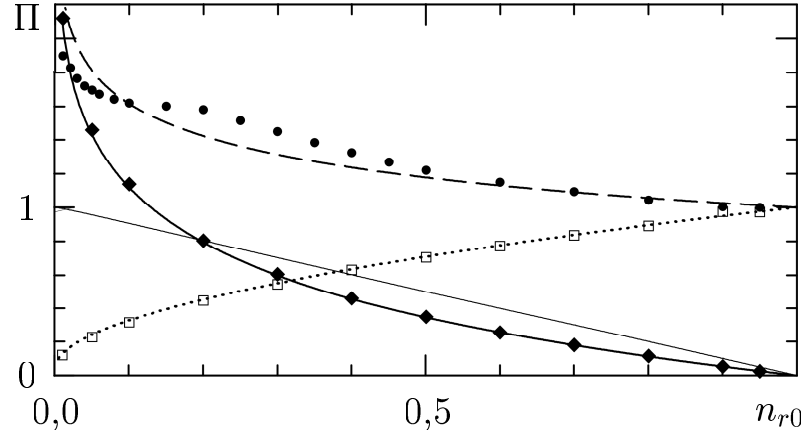


Рисунок 4.4. Параметры течения $\Pi = \{n_{ip}, V_{ip}, D, \Psi\}$ в зависимости от n_{r0} при $V_{r0} = 0$. Величины n_{ip} , V_{ip} и D , вычисленные по формулам (4.3)–(4.5), представлены, соответственно, пунктирной, сплошной и штриховой кривыми, а полученные в численном эксперименте — квадратами, ромбами и кружками соответственно. Зависимость $\Psi(n_{r0})$ по (4.5) нанесена тонкой линией

решение уравнения (4.5) при $V_{r0} = 0$ может быть записано в виде прямой:

$$\Psi = 1 - n_{r0}. \quad (4.8)$$

Легко проверить, что точность решения (4.8) имеет второй порядок по Ψ . Его подстановка в (4.3) при $V_{r0} = 0$ даёт следующие формулы

$$\begin{aligned} n_{ip} &= \sqrt{n_{r0} \exp(-V_{r0})}, \\ \varphi_p = -V_{ip} &= \frac{1}{2} (\ln n_{r0} - V_{r0}), \\ D &= \frac{n_{ip} V_{ip} - n_{r0} V_{r0}}{n_{ip} - n_{r0}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Соотношения (4.6)–(4.9) позволяют построить профиль течения, не прибегая к численному решению уравнения (4.5).

Формулы для величин на плато, аналогичные (4.9), были получены в статье [128], где исходили из связи между гидродинамическими величинами в простой волне. Рассчитанные по этим формулам значения согласуются с результа-

тами гидродинамических расчетов. Справедливость указанных формул была подтверждена также с помощью кинетических расчетов в работах [219, 233].

Определение усредненных величин n_{ip} , V_{ip} , а также скорости D в численных экспериментах проводилось по большому количеству данных, полученных в разные моменты времени. Из рисунка 4.4 видно, что плотность и скорость ионов на плато весьма точно вычисляются по формулам (4.3)–(4.5). Менее точно эти формулы определяют величину D , значения которой в численных экспериментах находились по движению первого максимума БУВ.

4.2.2 Фронт волны и отражённые ионы

Очевидно, что наблюдаемое на рисунке 4.4 отклонение зависимости $D(n_{r0})$, полученной по данным численных экспериментов, от соответствующей зависимости, рассчитанной по формулам (4.3)–(4.5), обусловлено грубостью аналитической модели. В частности, в модели предполагается, что фронт волны имеет вид разрыва. В то же время из численных экспериментов мы видим, что, на самом деле, БУВ состоит из солитоноподобных импульсов, и фронтом волны является не разрыв, а передняя часть первого импульса. В том, что последняя представляет собой солитонное решение, можно убедиться, сравнивая наблюдаемый в численном эксперименте фронт с результатом расчёта профиля волны по формуле (1.61), которая выше применялась для нахождения профиля солитона. (При расчётах надо иметь в виду, что в задаче фигурируют две невозмущённые области, и фронт волны движется по области низкой плотности с $n_{r0} < 1$ и $\varphi_{r0} < 0$.) Результаты расчёта приведены на рисунке 4.5. Видно хорошее совпадение рассчитанных по (1.61) профилей с данными численных экспериментов в диапазоне $0,2 \leq n_{r0} \leq 0,8$.

К сравнению БУВ и солитона можно подойти с несколько иной стороны. При анализе возможных типов стационарного движения нередко используется то обстоятельство, что уравнение Пуассона (1.57), решение которого определяет форму волны, имеет вид уравнения нелинейного осциллятора, описывающего движение «частицы» с «координатой» φ (или ψ) во «времени» z в некотором поле, зависящем только от «координаты» φ [18].

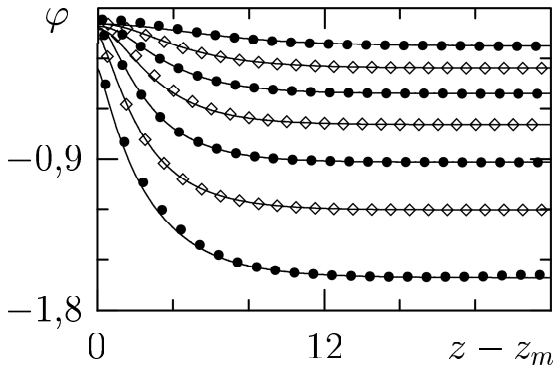


Рисунок 4.5. Потенциал на фронте БУВ при значениях n_{r0} от 0,2 до 0,8 (шаг 0,1, снизу вверх). Кривые — расчёт по (1.61), символы — данные численных экспериментов при $t = 100$

При этом удобно использовать фазовую плоскость — плоскость координат и скоростей частиц. В рассматриваемом случае «скоростью частицы» следует считать производную от потенциала по координате, или с точностью до знака, напряженность электрического поля E . Поэтому здесь «фазовой плоскостью» является плоскость (φ, E) . Для сравнения вида солитона и БУВ на плоскости (φ, E) мы использовали данные, соответственно, расчетов по формуле (1.61) и численного эксперимента. Рассматривался случай, когда движение солитона или БУВ происходит по плазме с плотностью $n_{r0} = 0,5$. Из рисунка 4.6 видно, что «фазовые кривые» солитона и БУВ совпадают при движении от точки $\varphi_{r0} \simeq -0,693$, соответствующей невозмущенной области с $n_{r0} = 0,5$, до точки максимума потенциала (то есть на фронте волны, здесь $E > 0$). Это подтверждает следующий из предыдущего рисунка вывод о том, что фронт БУВ совпадает с фронтальной стороной солитона. За фронтом БУВ после максимума потенциала «фазовая кривая» БУВ отклоняется от солитонной «фазовой кривой» и сворачивается в спираль. Чтобы избежать нагромождения сливающихся в общий фон линий спирали при приближении к значениям φ и E в точке контактного разрыва $x_c = t\tau_c$, на рисунке 4.6 не показана часть данных численного эксперимента. Реально спиральная

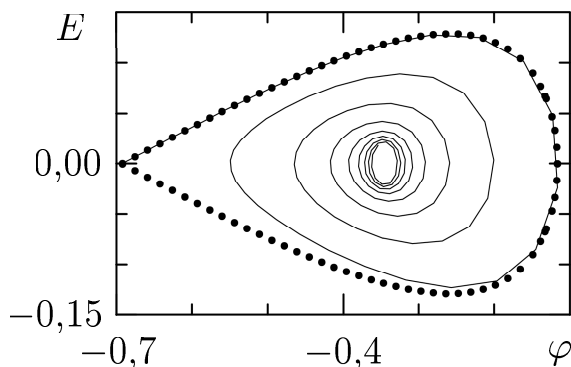


Рисунок 4.6. «Фазовая плоскость» (φ, E) солитона и БУВ при $n_{r0} = 0,5$, $t = 100$. Солитон представлен точками, БУВ — сплошной кривой

структура кривой сохраняется вплоть до последней точки, в которой φ равна значению потенциала при $x = x_c$, а $E = 0$. Фактически область БУВ (область 3 на рисунках 4.1 и 4.3) представляет собой сворачивающуюся спираль на плоскости (φ, E) . В области 2 спираль разворачивается (не показано на рисунке 4.6) и затем выходит на почти постоянное значение E в области 1, которое быстро падает до нуля вблизи невозмущенной области 0, где $\varphi = 0$.

Из проведенного сравнения очевидно, что скорость волны, найденная в численном эксперименте как скорость движения первого максимума потенциала, должна, как и в случае солитона, определяться по формуле (1.64). Поэтому именно эту формулу следует использовать в предложенной выше простой модели течения. Напомним, что сложная зависимость $D(n_{r0})$ на рисунке 4.4 (кружки) построена как раз по значениям скоростей первых солитонов БУВ при разных n_{r0} и она отличается от зависимости $D(n_{r0})$, полученной при решении системы уравнений (4.3)–(4.5) для другой формы фронта волны (разрыва). Сравнение зависимости $D(\varphi_m - \varphi_{r0})$, полученной из численных экспериментов, с формулой (1.64) при $\varphi_a = \varphi_{r0}$, $V_{ia} = 0$ представлено на рисунке 4.7. В каждом численном эксперименте при заданном n_{r0} определялись значения φ_{r0} , φ_m и D , и точка $(\varphi_m - \varphi_{r0}, D)$

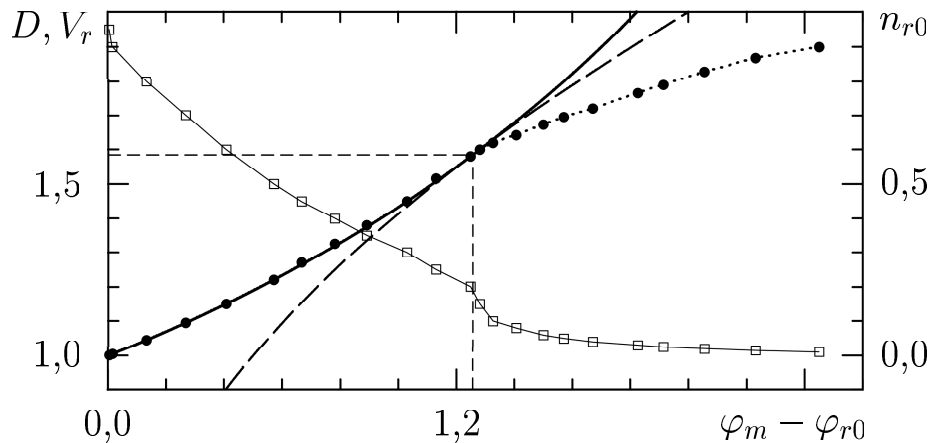


Рисунок 4.7. Зависимость от $\varphi_m - \varphi_{r0}$ величин: D (формула (1.64) представлена сплошной кривой, данные численных экспериментов — пунктирной кривой и кружками), $V_r = \sqrt{2(\varphi_m - \varphi_{r0})}$ (штриховая кривая) и $n_{r0}(\varphi_m - \varphi_{r0})$ (тонкая кривая и квадраты, правая ось ординат). Критические значения для $\varphi_m - \varphi_{r0}$ и D даны короткими штрихами

наносилась на график. Для удобства идентификации вариантов на графике также приведена зависимость n_{r0} от $\varphi_m - \varphi_{r0}$ (обратная к определяемой в численном эксперименте зависимости $\varphi_m - \varphi_{r0}$ от n_{r0}).

Видно, что в численных экспериментах скорость фронта БУВ, как скорость первого солитона, весьма хорошо соответствует зависимости (1.64), если только амплитуда потенциала $\varphi_m - \varphi_{r0}$ не превышает критическое значение, равное 1,2564. Последняя величина достигается при понижении плотности r -ионов до критического значения $n_{rcr} \sim 0,195$. В случае более низких плотностей $n_{r0} < n_{rcr}$ скорость D первого импульса БУВ превышает критическое значение $D_{cr} = 1,5852$, но при этом оказывается ниже скорости отражения V_r . Последнее означает, что r -ионы, сталкивающиеся с первым импульсом, отражаются. Движение перед фронтом волны становится двухпотоковым, а за фронтом на месте ламинарной осцилляторной структуры, примеры которой даны на рисунках 4.1 и 4.3, выделяется первая большая осцилляция, сопровождаемая более мелкими хаотическими осцилляциями. Экстремальное значение ψ_m величины ψ , определяемой по (1.55), в этой области значений n_{r0} везде больше единицы, и стационарные решения не существуют.

Отметим, что приведенное значение величины n_{rcr} имеет смысл рассматривать только как некий ориентир. Дело в том, что при заданном n_{r0} амплитуда первого солитона, которая и определяет возможность отражения ионов, не остаётся постоянной в течение процесса. Она может заметно измениться и быть больше или меньше критического значения. (В качестве $\varphi_m - \varphi_{r0}$ для каждого n_{r0} на рисунке 4.7 представлены усреднённые по большому промежутку времени значения первого максимума потенциала.) Изменения $\varphi_m - \varphi_{r0}$ происходят не только за счёт флуктуаций. В частности, на начальном этапе из монотонного распределения формируется структура волны, что сопровождается постепенным нарастанием амплитуды первого солитона. В ряде случаев это нарастание происходит более быстро, чем рост скорости солитона, и последняя оказывается меньше скорости отражения. В результате перед фронтом волны появляются отражённые ионы. Последующее увеличение скорости волны выше скорости отражения убирает эффект отражения ионов. Такой процесс образования на начальном этапе группы

быстро движущихся перед фронтом волны отражённых ионов наблюдается, например, при $n_{r0} = 0,2$, то есть в формально докритическом случае, если считать, что $n_{rcr} = 0,195$. Иллюстрацией сказанному может служить рисунок 4.8, где приведены данные численного моделирования для случая $n_{r0} = 0,2$ в

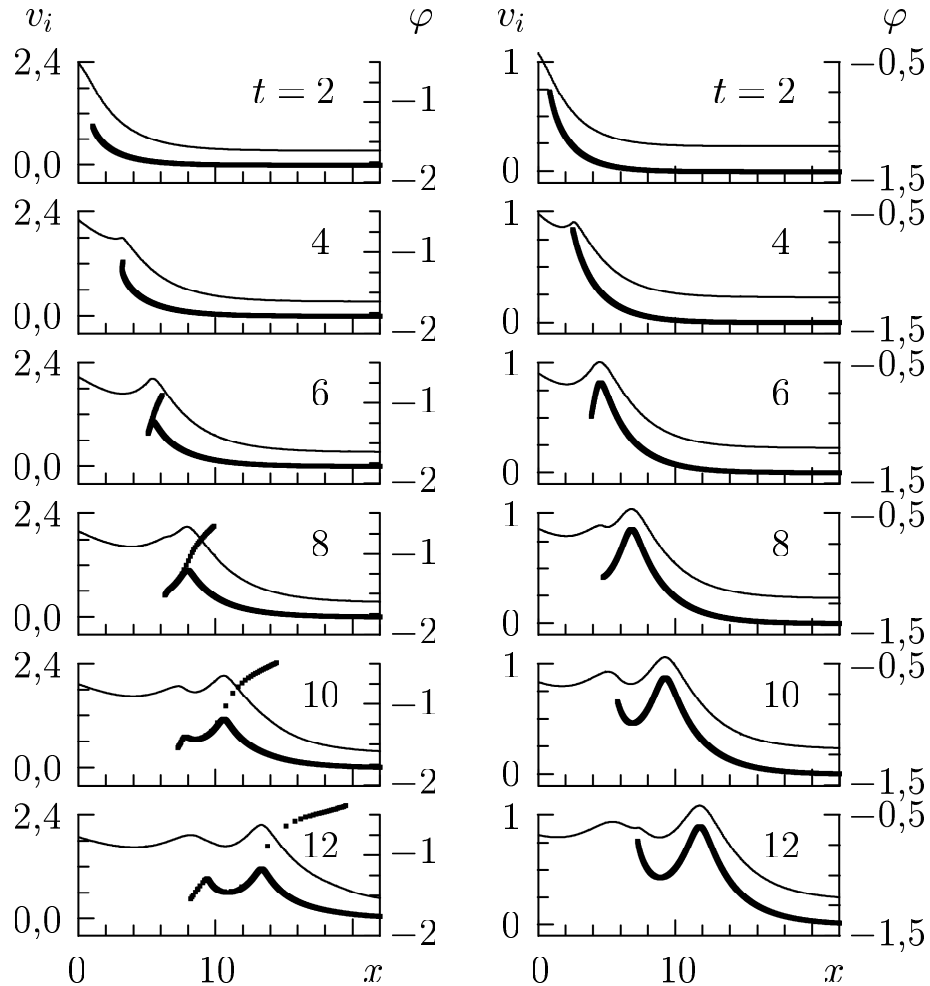


Рисунок 4.8. Фазовые плоскости r -ионов (символы) и распределения потенциала $\varphi(x)$ (сплошные тонкие кривые, правые оси ординат) в разные моменты времени при $n_{r0} = 0,2$ (слева) и $n_{r0} = 0,3$ (справа)

сравнении со случаем $n_{r0} = 0,3$. В первом случае видно появление отражённых ионов в начальные моменты времени и последующее прекращение процесса отражения. Здесь на этапе формирования БУВ образуется сгусток отражённых ионов. Во втором случае, далёком от критического, все r -ионы проходят через потенциальный барьер вплоть до точки контактного разрыва с l -ионам.

В плазме с холодными ионами $T_{i0} = 0$ невозмущённая скорость

r -ионов относительно волны одна и та же для всех ионов, и волна, в зависимости от её амплитуды, либо отражает все ионы, либо не отражает ни одного. Поэтому в закритической области $n_{r0} < n_{rcr}$ колебания амплитуды волны и процесс отражения ионов могут оказаться взаимно связанными. Так, в случае, если амплитуда волны превышает критическое значение, налетающие на волну ионы не только отражаются, но и уменьшают ее амплитуду. Если это уменьшение таково, что амплитуда волны становится меньше критического значения, процесс отражения прекращается. После этого, в отсутствии диссипации за счёт отражённых ионов, амплитуда первого импульса волны снова постепенно возрастает до значений выше критического, и появляется новая порция отражённых ионов, которые, в свою очередь, уменьшают амплитуду волны. Иными словами, возникает прерывистое отражение ионов: волна то отражает, то не отражает ионы. Процесс выглядит как неустойчивость фронта БУВ. Такое явление наблюдалось ранее в работе [32] и позже в численных экспериментах [219, 233]. Здесь для иллюстрации мы приводим на рисунке 4.9 данные численного эксперимента при $n_{r0} = 0,1$. Из рисунка видно, что отражённые ионы сгруппированы в отдельные сгустки, и, вместе с тем, определённая часть r -ионов преодолевает потенциальный барьер, несмотря на то, что n_{r0} соответствует закритической области. Прохождение r -ионов за фронт волны происходит в те моменты времени, когда амплитуда волны уменьшается ниже критического уровня.

Со временем полное число r -ионов за фронтом волны растёт, а сама область между контактными разрывом с l -ионами и фронтом волны увеличивается. Отметим, что каждая группа отражённых ионов заметно меняет распределение потенциала перед фронтом волны. Последнее обстоятельство оказывается весьма существенным при еще более низких значениях n_{r0} . Рисунок 4.9 показывает, что при $n_{r0} = 0,01$ число преодолевших потенциальный барьер r -ионов мало, практически все r -ионы отражаются. Из-за большого числа отражённых ионов потенциал перед фронтом волны значительно повышается. За счет поля «предвестника» скорость r -иона относительно фронта волны уменьшается по мере приближения этого иона к фронту. Диссипативный эффект от полного отражения всех r -ионов оказывается более значимым, чем диспер-

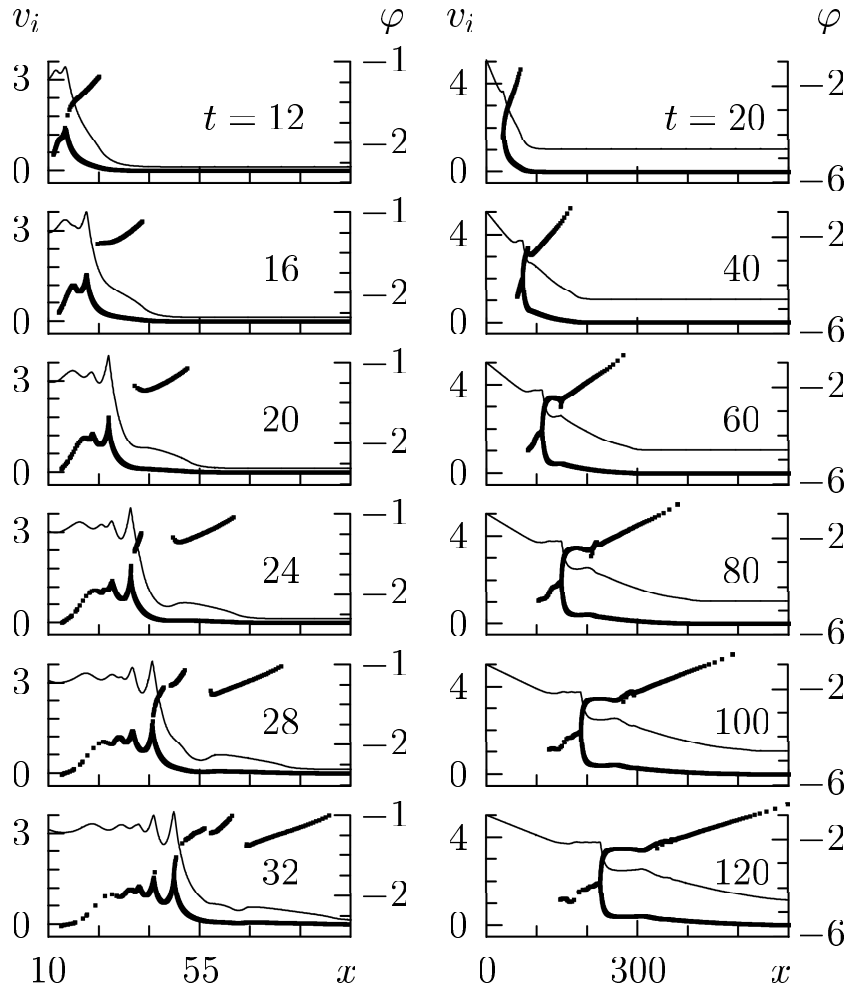


Рисунок 4.9. Фазовые плоскости r -ионов (символы) и распределения потенциала $\varphi(x)$ (сплошные тонкие кривые, правые оси ординат) в разные моменты времени при $n_{r0} = 0,1$ (слева) и $n_{r0} = 0,01$ (справа)

сионный, что наглядно проявляется в изменении формы волны. За фронтом волны практически исчезает осцилляционная структура, и образуется плато с почти однородным распределением потенциала. Сам фронт приобретает вид резкого разрыва, а перед ним возникает область второго плато, где движутся два потока ионов, каждый со своей постоянной скоростью.

Таким образом, при расширении плазмы в плазму критический параметр n_{rcr} , определяемый условием равенства усреднённой по времени амплитуды первого солитона $\varphi_m - \varphi_{r0}$ и критического значения, не может рассматриваться как граница, отделяющая однопоточковое ламинарное течение от двухпоточкового течения с отражением всех ионов. Вместо резкой границы существует переходная область, в которой волна не способна отразить все

находящиеся перед ней ионы, и поток отражённых ионов состоит из отдельных оторванных друг от друга сгустков частиц. Эти сгустки при движении постепенно размываются в пространстве за счёт того, что ионы в каждом сгустке имеют некоторый разброс скоростей. По истечении достаточно большого времени разрывы между сгустками исчезают, отражённые ионы непрерывно заполняют всю область от фронта БУВ до первого отражённого иона.

Уже в этой переходной области, и тем более в области, где имеется полное отражение всех ионов, возникает опасность развития двухпоточковой неустойчивости. Как уже обсуждалось в п. 1.5, наличие двух потоков приводит к неустойчивости, если разность потоковых скоростей по абсолютной величине не превышает верхнего граничного значения ΔV_b , определяемого по (1.85). В нашем случае $\mu = 1$, $Z_i = Z_j = 1$ величина ΔV_b меняется в диапазоне от 1 до 2 при изменении плотности второго потока (потока отражённых ионов) от 0 до 1. Легко видеть, что ΔV_b будет меньше, чем скорость движения отражённых ионов относительно невозмущенной области r -ионов. Поэтому движение «предвестника» всегда устойчиво. Собственно, об этом же свидетельствуют и результаты численного моделирования (рисунок 4.9). Отметим, что устойчивость «предвестника» изучалась в работах [219, 233], где было обращено внимание на возможность возбуждения волн, распространяющихся под углом к направлению потока. Более подробно двухпоточковая неустойчивость изучалась в статье [218], где аналитически и с помощью численного моделирования показано, что при сверхзвуковых движениях встречных потоков действительно возбуждаются косые волны. Но при этом в тепловую энергию превращается лишь малая часть направленной энергии. Поэтому можно ожидать, что возбуждение косых волн в рассматриваемом здесь двухпоточковом движении с большими скоростями потоков существенно не скажется на общей картине процесса, полученной в одномерной модели.

При уменьшении n_{r0} средняя скорость ионов за фронтом волны возрастает, что можно видеть, сравнивая данные на рисунках 4.8 и 4.9. При $n_{r0} \leq 0,03$ возникает качественно новая ситуация. В таких случаях в численном эксперименте скорость ионов на плато за фронтом волны оказывается больше скорости фронта $V_{ip} > D$ (рисунок 4.4). Очевидно, что

при этом все ионы на плато — это l -ионы. Большой поток l -ионов становится определяющим для всего процесса, который представляет собой, по сути дела, расширение плазмы l -ионов в вакуум, на которое небольшое число r -ионов почти не влияет. При $n_{r0} \sim 0,03$ практически исчезает прерывистость отражения ионов, то есть амплитуда волны не снижается ниже критического значения.

Исследование случая малых $n_{r0} \ll 1$ проведено в [219, 233], где для аналитических оценок используется гидродинамическое приближение и предполагается, что течение автомодельно. Было установлено, в частности, что ускорение l -ионов ограничено предельным значением скорости

$$V_{lm} = 2 \ln 2 - \ln n_{r0}. \quad (4.10)$$

Анализ движения r -ионов показал, что они под действием большого потока l -ионов меняют направление своего движения и ускоряются вместе с l -ионами. Значение автомодельной переменной для точки поворота потока r -ионов τ_r может быть оценено по формуле:

$$\tau_r = \ln(1 + 2 \ln 2 - \ln n_{r0}). \quad (4.11)$$

Как можно видеть из рисунка 4.9, точка поворота потока r -ионов для случая $n_{r0} = 0,01$ находится почти непосредственно перед фронтом волны. Поэтому оценка τ_r по (4.11) должна давать близкие к D (несколько повышенные) значения. Формула (4.11) дает $\tau_r \simeq 1,94$, а значение скорости фронта из численного эксперимента $D = 1,90 \pm 0,05$. Согласно оценке (4.10) максимальная скорость l -ионов для данного варианта составляет $V_{lm} \simeq 6$. Примерно такая же максимальная скорость наблюдается в численном эксперименте как для l -ионов, так и для r -ионов. Последнее видно из фазовой плоскости на рисунке 4.9.

На рисунке 4.10 представлены пространственные зависимости для иллюстрации случая очень малых n_{r0} ; здесь $n_{r0} = 0,001$. Оценки V_{lm} и τ_r по формулам (4.10) и (4.11) для этого случая дают, соответственно, значения 8,29 и 2,23. В численном эксперименте наблюдаемая на фазовой плоскости максимальная скорость l -ионов равна 7,75 (не показана на рисунке 4.10), а величина

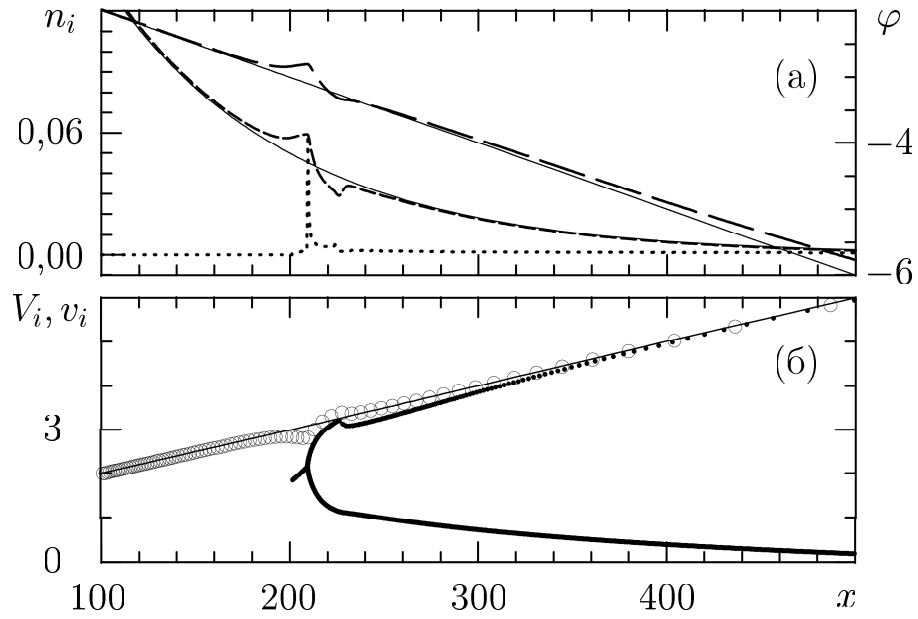


Рисунок 4.10. Пространственные распределения при $n_{r0} = 0,001$, $t = 100$ в сравнении с (3.2)–(3.3). (а): n_{il} (короткие штрихи), n_{ir} (пунктирная кривая) и плотность ионов по (3.2) (тонкая нижняя кривая); потенциал (правая ось ординат) по данным численного эксперимента (длинные штрихи) и по (3.3) (тонкая верхняя кривая). (б): фазовые плоскости l -ионов (окружности) и r -ионов (точки), а также $V_i(x)$ по (3.2) (тонкая кривая)

$D = 2,16 \pm 0,05$ и, как и должно быть, она чуть ниже τ_r . Таким образом, и в этом случае оценки (4.10) и (4.11) согласуются с численным экспериментом.

Очевидно, что при очень малых n_{r0} течение как перед фронтом волны, так и за ее фронтом должно приближаться к течению, возникающему при расширении плазмы в вакуум и описываемому волной разрежения (3.2)–(3.3). Из рисунка 4.10 видно, что это действительно так: данные численного эксперимента близки к зависимостям (3.2)–(3.3). Наибольшее отклонение наблюдается в небольшой области вблизи точки поворота потока r -ионов τ_r . Здесь имеются локальные повышения потенциала и плотности l -ионов и весьма значительное, в десятки раз, повышение плотности r -ионов. С явлением резкого возрастания плотности частиц в точках поворота потока, где производная от скорости по координате становится бесконечной, мы ещё встретимся в дальнейшем.

Рисунок 4.11 демонстрирует приближение профиля потенциала к соответствующему профилю волны разрежения (3.3) при уменьшении n_{r0} . Чем

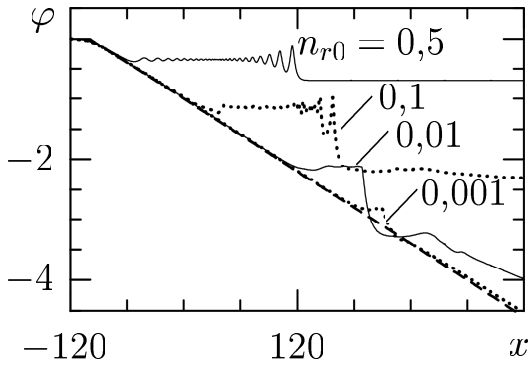


Рисунок 4.11. Распределение потенциала при разных значениях n_{r0} в момент времени $t = 100$. Штриховая кривая соответствует расширению плазмы в вакуум

меньше n_{r0} , тем уже область, занятая плато и БУВ, и тем меньше различие в двух решениях. Хорошо видно, что с уменьшением n_{r0} скорость фронта волны растет, а уровень плато понижается. При переходе в закритическую область (на рисунке 4.11 случай $n_{r0} = 0,1$) колебания за фронтом волны становятся неупорядоченными, а при еще большем понижении n_{r0} область за фронтом волны приближается к однородному распределению.

4.2.3 Учет электронного движения

Выше расширение плазмы в плазму рассматривалось в предположении, что электроны распределены по закону Больцмана. Чтобы оценить влияние инерции электронов на процесс был проведен численный эксперимент с помощью модели с двумя сортами частиц, моделирующих ионы, и с двумя сортами частиц, моделирующих электроны. Расчеты проводились для случая плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ при $n_{r0} = 0,5$. Каждая компонента плазмы состояла из l - и r -частиц. Соотношение между числом модельных l -частиц и числом модельных r -частиц определялось соотношением между n_{l0} и n_{r0} . Отношение массы модельного иона к массе модельного электрона равно 100.

На рисунках 4.12–4.13 представлены пространственные зависимости для моментов функций распределения l - и r -ионов, рассчитанные как с помощью использовавшейся выше модели с больцмановским распределением электронов, так и с помощью модели, в которой непосредственно моделируется движение электронов. Все величины даны в ионной нормировке. Рисунки не только позволяют сравнить решения, полученные без учета и с учетом электронной инерции, но и дополняют приведенные ранее данные о процессе

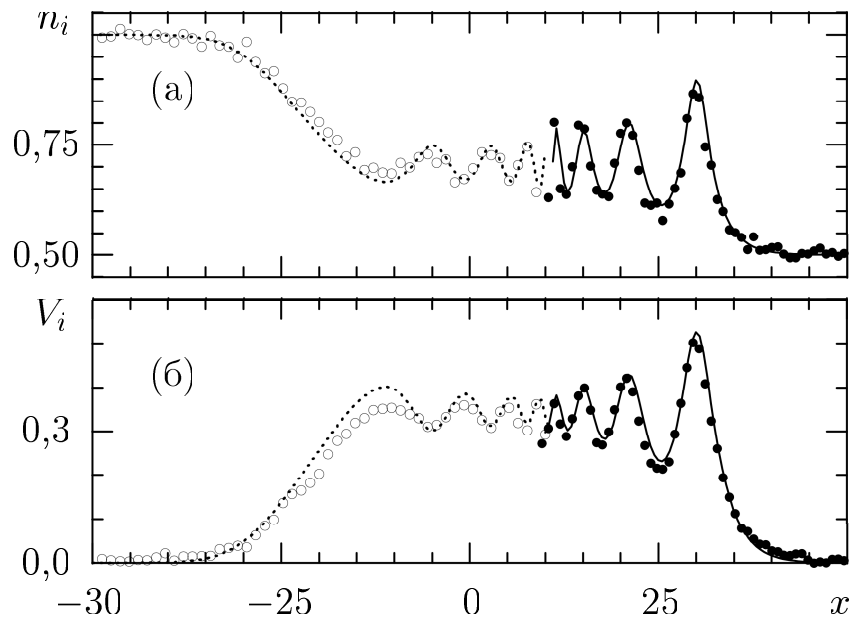


Рисунок 4.12. Пространственные распределения плотности (а) и потоковой скорости (б) ионов при $n_{r0} = 0,5$ и $t = 30$. Модель с бoльцмановскими электронами — пунктирные (l -ионы) и сплошные (r -ионы) кривые, модель с учётом электронов — окружности (l -ионы) и кружки (r -ионы)

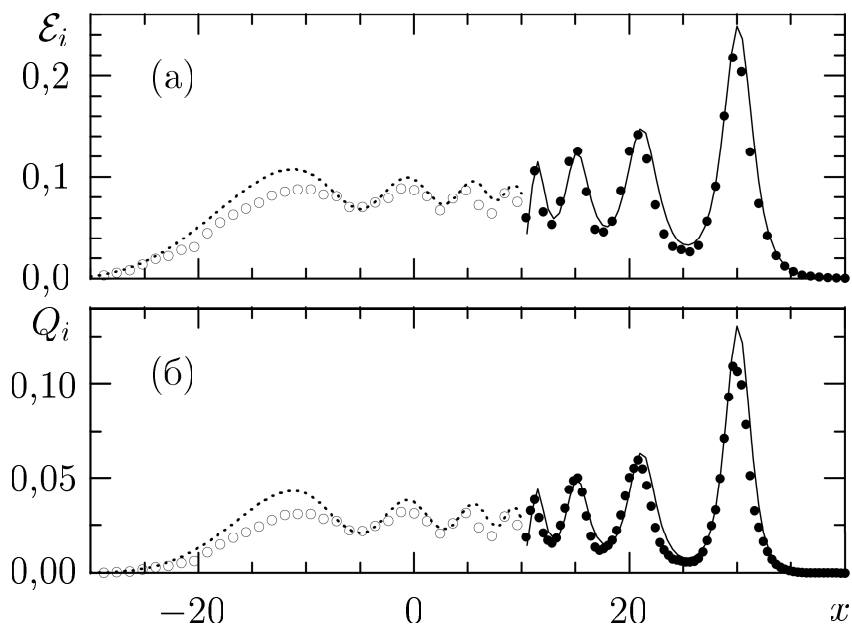


Рисунок 4.13. Пространственные распределения энергии (а) и потока энергии (б) ионов при $n_{r0} = 0,5$ и $t = 30$. Модель с бoльцмановскими электронами — пунктирные (l -ионы) и сплошные (r -ионы) кривые, модель с учётом электронов — окружности (l -ионы) и кружки (r -ионы)

примером пространственных распределений энергии и потока энергии ионов. Видно, что два решения, в целом, достаточно близки друг к другу, практически одинаково описывают осцилляторную структуру БУВ и несколько расходятся вблизи границы между волной разрежения и плато. Последнее обусловлено большой инерционностью модельных электронов. В работе [208] было показано, что при недостаточно больших отношениях массы иона к массе электрона значение потенциала в волне разрежения оказывается выше соответствующего значения в случае безинерционных электронов. Более высокому потенциалу отвечает более высокое значение плотности и более низкое значение скорости и энергии ионов, что мы и видим на рисунках 4.12 и 4.13.

Несомненный интерес представляют данные об электронном движении. На рисунках 4.14–4.16 показаны профили моментов функций распределения

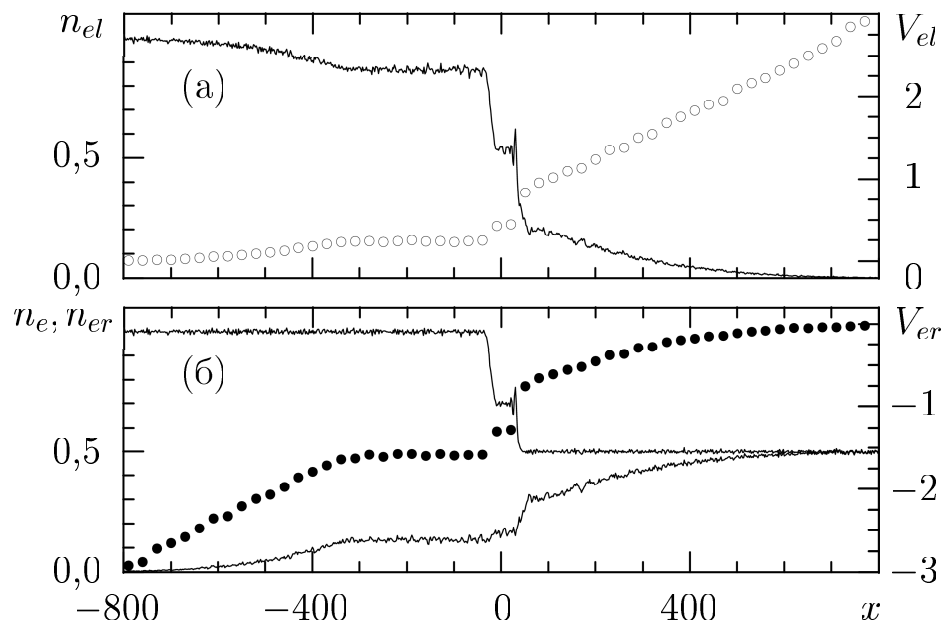


Рисунок 4.14. Пространственные распределения электронных плотностей (сплошные кривые) и потоковых скоростей (символы, правые оси ординат) при $n_{r0} = 0,5$ и $t = 30$. (а): данные для l -электронов, (б): данные для r -электронов и полная плотность электронов $n_e = n_{el} + n_{er}$ (верхняя сплошная кривая)

l - и r -электронов. Здесь, за исключением указанного в ионном масштабе момента времени $t = 30$, значения остальных величин даны в единицах электронной нормировки. Рассматриваемый момент времени в электронной

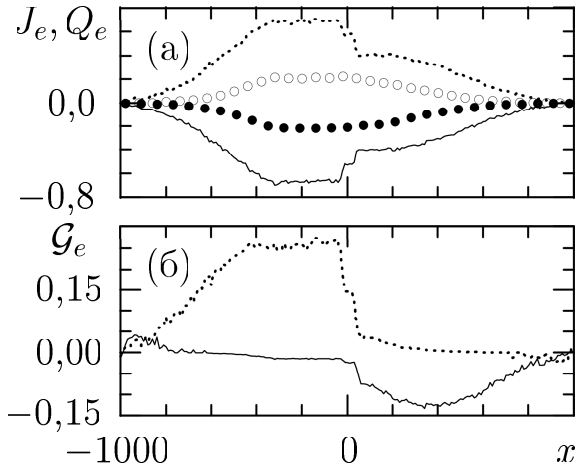


Рисунок 4.15. Электронные потоки частиц и энергии (а) и потоки тепла (б) как функции от x при $n_{r0} = 0,5$ и $t = 30$. l -электроны: Q_e и G_e — пунктирные кривые, J_e — окружности. r -электроны: Q_e и G_e — сплошные кривые, J_e — кружки

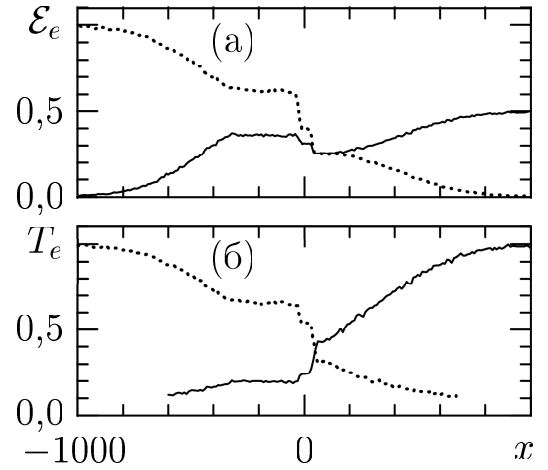


Рисунок 4.16. Пространственные распределения электронных энергий (а) и температур (б) при $n_{r0} = 0,5$ и $t = 30$. Пунктирные кривые представляют данные для l -электронов, сплошные — для r -электронов

нормировке $t_e = 300$. Из рисунков видно, что процесс сопровождается своеобразным обменом между l - и r -электронами. Быстрые l -электроны с положительными скоростями устремляются в область, первоначально занятую r -электронами, а последние, в свою очередь, проникают в область l -электронов. При этом встречные потоки l - и r -электронов, а также их потоки энергии, в основном, компенсируют друг друга (рисунок 4.15). Там, где энергия l -электронов уменьшается с ростом x , с таким же темпом нарастает энергия r -электронов (рисунок 4.16). При этом в области слева от волны разрежения, фронт которой находится при $x \sim -30$, полная плотность электронов $n_{el} + n_{er}$ равна невозмущённому значению (рисунок 4.14, (б)), а полный поток частиц $J_{el} + J_{er}$ близок к нулю (рисунок 4.15).

Как и при расширении плазмы в вакуум, здесь возникает волна охлаждения электронов. В области l -электронов имеется заметный поток тепла в сторону области r -электронов, и, наоборот, в области r -электронов наблюдается несколько меньший (за счёт меньшей плотности r -электронов) поток тепла в сторону области l -электронов (рисунок 4.15, (б)). В целом, температура

электронов в области, где имеется возмущённое движение ионов, понижается.

Мы видим, что учёт электронной инерции не меняет заметным образом картину процесса, полученную при безынерционных электронах. Движение электронов оказывается существенно различным в зависимости от их начального положения — слева или справа от точки начального разрыва.

4.3 Расширение плазмы в плазму при $T_{i0} \neq 0$

Рассмотрим влияние теплового движения ионов на процесс. Ряд эффектов можно предсказать заранее. Так, например, при малых начальных температурах ионов T_{i0} солитонная структура фронта волны должна сохраниться. Но при этом диапазон возможных амплитуд первого солитона и диапазон его скоростей заметно сократятся, а число Маха будет более низким. Это обусловлено тем, что критические значения этих величин с ростом T_{i0} резко падают (рисунки 1.2–1.3). Также более низкими будут амплитуды ионной и электронной плотностей и потоковой скорости ионов (рисунок 1.4).

При увеличении T_{i0} осцилляторная структура БУВ будет менее развитой. Затухание осцилляций, повышение числа отражённых ионов перед фронтом волны, а также развитие более пологой волны разрежения и увеличение скорости её распространения с ростом T_{i0} способствуют формированию движения с гладким распределением параметров при больших T_{i0} .

4.3.1 Случай $T_{i0} \ll 1$

Если начальная температура ионов T_{i0} невелика, то характер движения мало отличается от того, что имеет место в гидродинамическом пределе $T_{i0} = 0$. Структура всех возмущенных областей движения 1, 2 и 3 сохраняется, хотя скорость БУВ уменьшается, а скорость волны разрежения, движущейся в невозмущенную область l -частиц, увеличивается. При малых T_{i0} сохраняется осцилляторная структура БУВ, и можно ожидать, что фронт БУВ будет почти таким же, как и фронт солитона, движущегося с аналогичными параметрами. Убедиться в этом можно с помощью рисунка 4.17, где дано соответствующее

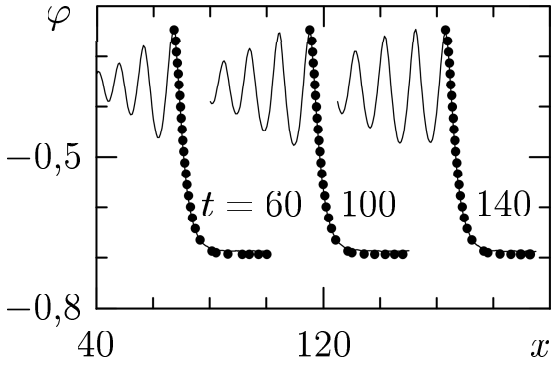


Рисунок 4.17. Распределение потенциала в разные моменты времени (сплошные кривые) при $n_{r0} = 0,5$, $T_{i0} = 0,001$ в сравнении с солитонным фронтом (решение (1.61), символы)

сравнение для частного случая. Видно, что фронт БУВ при малых T_{i0} может быть представлен решением (1.61).

Новым важным свойством течения при $T_{i0} \neq 0$ является существенно немонотонное поведение ионной температуры, причем не только за счет осцилляций плотности в области БУВ. В рассматриваемом случае невозмущенные температуры l - и r -ионов выбираются равными. В рамках КПТМ при изменении плотностей ионов их температура меняется адиабатически согласно (1.13). В области возмущенного движения плотность l -ионов падает, а плотность r -ионов, наоборот, растет, так как они сжимаются. Поэтому температура l -ионов уменьшается, а температура r -ионов возрастает.

Если в областях 2 и 3 аппроксимировать плотность и температуру ионов постоянными значениями, то, полагая справедливыми при $T_{i0} \ll 1$ выражения (4.6)–(4.9), получим оценки температуры l -ионов T_{lp} и r -ионов T_{rp} на плато, а также положения точки сшивки волны разрежения с плато τ_p и точки контактного разрыва τ_c :

$$\begin{aligned} T_{lp} &= T_{i0} n_{r0}, & T_{rp} &= T_{i0} / n_{r0}, \\ \tau_p &= -\left(1 + \frac{1}{2} \ln n_{r0}\right), & \tau_c &= -\frac{1}{2} \ln n_{r0}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Очевидно, что в области волны разрежения 1 температура l -ионов оценивается по (1.13) и (3.1). По этим формулам и по (4.12) на рисунке 4.18 построена соответствующая зависимость для ионной температуры. Здесь же приведены данные численного эксперимента. Они хорошо согласуются с аналитическими оценками. Видно, что в точке τ_c возникает разрыв ионной температуры. При переходе из области 2 в область 3 ионная температура возрастает в n_{r0}^{-2} раз. Таким образом, контактный разрыв оказывается существенно выделенным

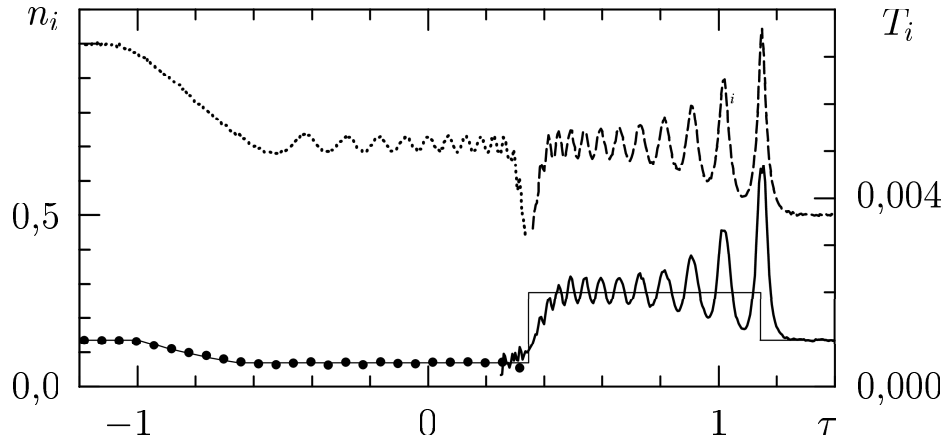


Рисунок 4.18. Зависимости плотностей l -ионов (пунктирная кривая) и r -ионов (штриховая кривая), а также температур (правая ось ординат) l -ионов (кружки) и r -ионов (сплошная кривая) от τ при $n_{r0} = 0,5$, $T_{i0} = 0,001$, $t = 100$. Тонкая линия — оценки T_i согласно (1.13), (3.1) и (4.12)

элементом движения. Такие особенности распределения температуры ионов были продемонстрированы в работе [219].

4.3.2 Большие значения T_{i0}

Солитоноподобный фронт БУВ и осцилляторная структура наблюдается только при малых T_{i0} . С ростом начальной ионной температуры характер течения все больше отклоняется от гидродинамического (рисунок 4.19). Осцилляции на плато ослабевают и сосредоточиваются вблизи границ плато, а само плато при увеличении T_{i0} постепенно преобразуется в область с падающим потенциалом. Одновременно перед фронтом волны возникает область повышенного потенциала и плотности — область отражённых ионов. Увеличение числа последних с ростом T_{i0} приводит к уменьшению крутизны фронта волны. Рисунок 4.19 иллюстрирует переход к монотонному изменению потенциала. Область возмущенного движения при этом существенно расширяется.

В области отражённых ионов движение имеет двухпоточковый характер (рисунок 4.20). Очевидно, что расчет таких параметров как температура ионов в этой области должен проводиться отдельно для каждого потока. На рисунке 4.19 температура r -ионов дана для основного потока. Можно убедиться, что

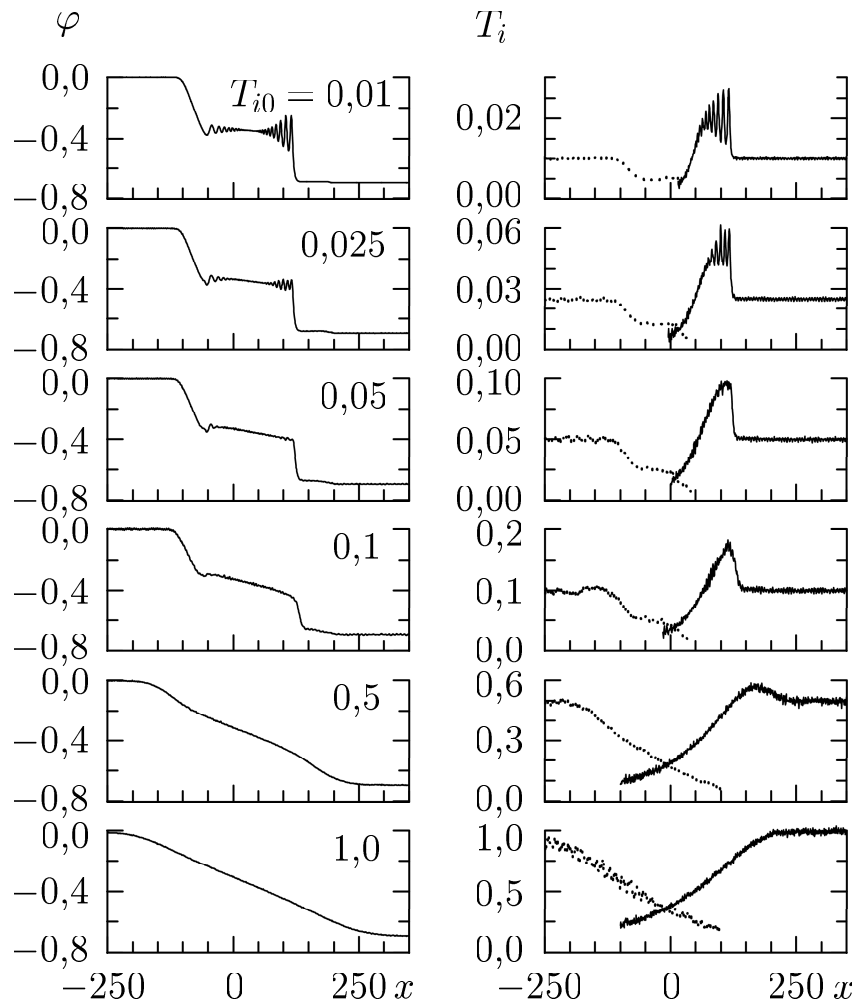


Рисунок 4.19. Пространственные зависимости потенциала (слева) и температур (справа) l -ионов (пунктирные кривые) и r -ионов (сплошные кривые) при разных значениях T_{i0} и $n_{r0} = 0,5$, $t = 100$

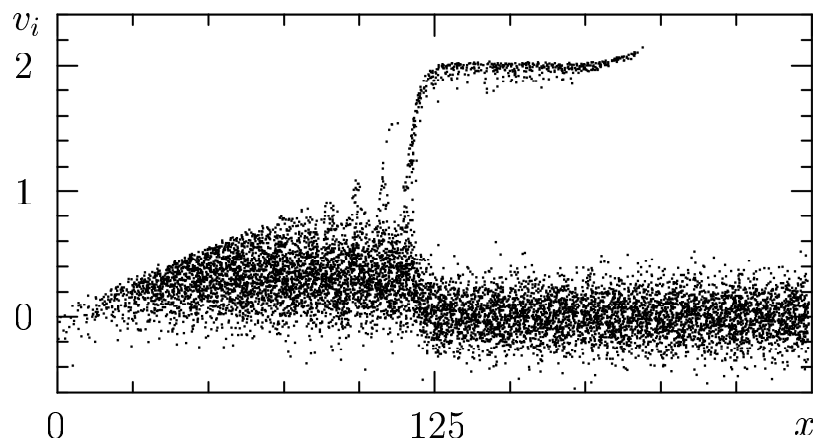


Рисунок 4.20. Фазовая плоскость r -ионов при $n_{r0} = 0,5$, $T_{i0} = 0,025$, $t = 100$

оценка ионных температур для областей 2 и 3 по (4.12) близка к средним значениям из численного эксперимента, если только T_{i0} не велико. При переходе к большим значениям $T_{i0} \geq 0,5$ число ионов с большими тепловыми скоростями становится сопоставимо или даже больше числа отражённых ионов. Хорошо выделенный на рисунке 4.20 поток отражённых ионов при увеличении T_{i0} сливается с основным потоком r -ионов, имеющим при больших T_{i0} наблюдаемый в расчетах разброс скоростей до 2 и выше. При этом относительная роль отражённых ионов из-за их, в целом, малого числа заметно уменьшается.

При больших T_{i0} роль электрического поля ослабевает, l -ионы расширяются направо, а r -ионы — налево в значительной степени за счет теплового движения. Температура каждого «сорта» ионов падает по направлению его расширения, и в областях, где одновременно находятся l - и r -ионы, их температуры могут сильно отличаться.

Рассмотрим важный частный случай плазмы с равными начальными температурами ионов и электронов $T_{i0} = 1$. Как видно из рисунка 4.19, в этом случае потенциал монотонно распределен на достаточно большом расстоянии. Поскольку пространственный масштаб неоднородностей значительно превосходит дебаевский радиус, для описания движения можно воспользоваться квазинейтральным кинетическим приближением (1.4) и даже более простым автомобильным кинетическим приближением (1.5), так как в задаче в этих условиях отсутствует какой-либо параметр размерности длины. Численное решение уравнений (1.5) было найдено в статье [3] для случая $n_{r0} = 0,5$ и $T_{i0} = 1$. Было показано, что характеристики уравнения (1.5), исходящие из области плотной плазмы, сгущаются и приближаются к некоторой линии — сепаратрисе, лежащей несколько выше прямой $v = \tau$, но при этом характеристики не опускаются ниже сепаратрисы. Сепаратриса отделяет указанные характеристики от характеристик, исходящих из области плазмы малой плотности. Последние пересекают прямую $v = \tau$ и поворачивают обратно, сгущаясь далее вблизи сепаратрисы, но оставаясь всегда в области ниже сепаратрисы. На самой сепаратрисе функция распределения ионов обращается в нуль. Такие особенности автомобильного решения служат дополнительным подтверждением целесообразности принятого нами при моделировании разделения ионной компоненты

на два «сорта» частиц, причем по месту их первоначального расположения.

Для рассматриваемого варианта $n_{r0} = 0,5$ и $T_{i0} = 1$ был проведен численный эксперимент. На рисунке 4.21 функции распределения l - и r -ионов, представленные в [3] при трех значения τ , сравниваются с такими же функциями, полученными в численном эксперименте при тех же τ (используемая здесь нормировка автомодельной переменной отличается от нормировки в [3] на множитель $\sqrt{2}$). Хорошее согласие двух решений видно даже на пикоподобных зависимостях для l -ионов.

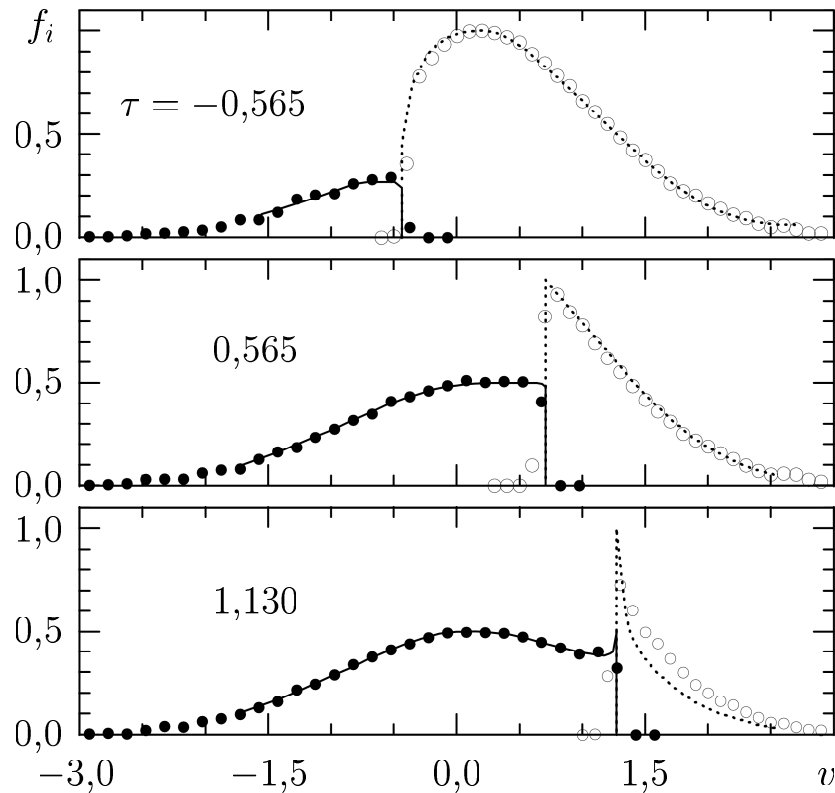


Рисунок 4.21. Функции распределения l -ионов (пунктирные кривые) и r -ионов (сплошные кривые) автомодельного решения [3] и функции распределения, полученные в численном эксперименте (соответственно окружности и кружки) при разных τ в случае $n_{r0} = 0,5$, $T_{i0} = 1$, $t = 100$

В отличие от рассмотренного выше случая $T_{i0} = 0$, при котором положения ионов на фазовых плоскостях образовывали линии, и один «сорт» ионов отделялся от другого точкой контактного разрыва $\tau = \tau_c$, в случае $T_{i0} = 1$ каждый «сорт» ионов представляется на фазовой плоскости целой

областью, причём области l - и r -ионов не пересекаются, а граница между ними имеет вид гладкой кривой, проходящей несколько выше прямой $v = \tau$. Эта граница и является сепаратрисой автомодельного решения.

4.3.3 Сравнение с экспериментом

Расширение плазмы в плазму изучалось экспериментально двумя группами исследователей [145–147]. Эксперименты проводились в цезиевой плазме в Q -машинах при $T_{i0} = 1$ практически в одних и тех же условиях. Единственным заметным различием была длина установки. В работах [145, 146] она достигала 1 м, а в [147] составляла 20 см.

Для нас весьма важным является то обстоятельство, что процесс происходил при наличии потокового движения ионов с некоторой скоростью V_{i0} . Об этом говорится в [145, 146], а в последующей статье [245], написанной несколько измененным авторским коллективом, отмечается, что в Q -машине число Маха потокового движения может быть достаточно большим. К сожалению, в [145, 146] не указывается конкретное значение V_{i0} . В [147], наоборот, потоковое движение ионов подробно исследуется, и приводятся значения V_{i0} при разных режимах. Нас будет интересовать режим, при котором в наших единицах $V_{i0} \simeq 2,3$. Именно для такого режима в [147] даны экспериментальные профили потока частиц, которые мы сравним с нашими расчетами.

Как уже обсуждалось, движение в случае $T_{i0} = 1$ носит автомодельный характер. Поэтому экспериментальные распределения плотности и потока ионов, полученные, соответственно, в работах [145, 146] и [147], мы представляем как функции от автомодельной переменной τ (рисунки 4.22 и 4.23). Эти зависимости сопоставляются с результатами численных экспериментов [222]. При этом для соответствия расчетов условиям экспериментов, необходимо знать параметры плазмы, в том числе и не указанное в статьях [145, 146] значение потоковой скорости ионов V_{i0} . Была проведена серия расчётов с разными V_{i0} . Сравнивая расчетные и экспериментальные данные, можно было оценить V_{i0} по наилучшему совпадению расчета с экспериментом. Оказалось, что выбор значения $V_{i0} \simeq$

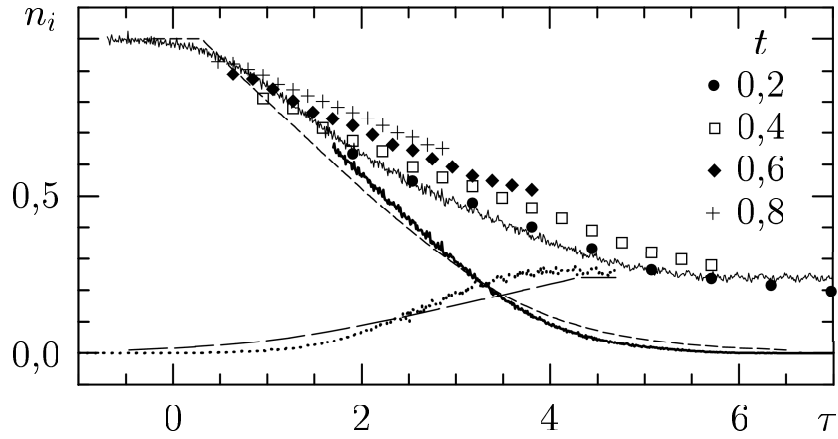


Рисунок 4.22. Зависимость плотности ионов от τ , полученная в экспериментах [145, 146] для разных моментов времени (символы) в сравнении с рассчитанными в численном эксперименте ($T_{i0} = 1$, $n_{r0} = 0,24$, $V_{i0} = 2,3$ и $t = 100$) распределениями плотностей n_{il} (сплошная кривая), n_{ir} (пунктирная кривая) и $n_i = n_{il} + n_{ir}$ (тонкая сплошная кривая). Короткими и длинными штрихами показаны распределения плотностей, соответственно, l -ионов при $n_{l0} = 1$ и r -ионов при $n_{r0} = 0,24$ в волне разрежения (3.1) при $T_{i0} = 1$, $V_{i0} = 2,3$

2,3, соответствующего другому эксперименту [147], хорошо подходит и для описания экспериментов [145, 146]. Заметим также, что в обоих случаях невозмущенная плотность r -ионов была примерно одной и той же: $n_{r0} \simeq 0,24$. Таким образом, оба эксперимента проводились в одних и тех же условиях.

Из рисунка 4.22 видно, что экспериментальные распределения плотности, найденные в [145, 146] для разных моментов времени, достаточно близко ложатся друг к другу, хотя имеется небольшой систематический сдвиг данных. Можно предположить, что этот сдвиг обусловлен небольшими изменениями шкалы плотности при переходе от измерений для одного момента времени к измерениям для другого момента времени. К тому же значения плотности в [145, 146] даны в произвольных единицах. Во всяком случае, даже при наблюдаемом систематическом сдвиге данных, экспериментальные кривые соответствуют тому, что процесс носит автомодельный характер. Заметим, что в [146] приведена связь между экспериментальными значениями потенциала и плотности ионов и эта связь близка к соотношению (1.9), что служит дополнительным свидетельством квазинейтральности, а с учетом начальных

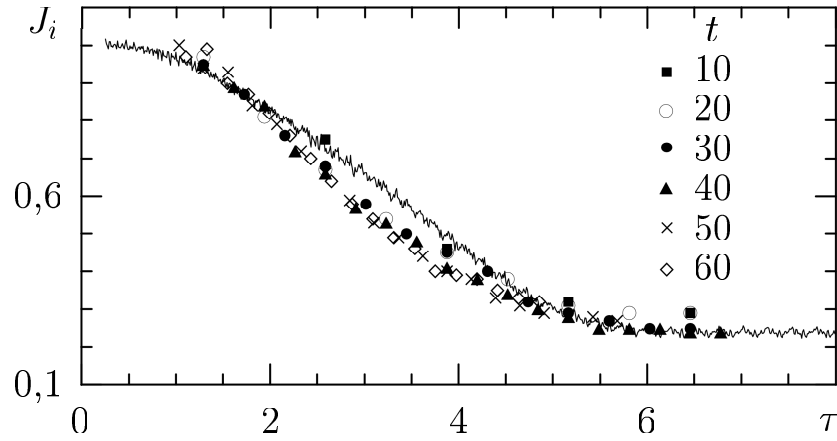


Рисунок 4.23. Зависимость потока ионов от τ , полученная в [147] для разных моментов времени (символы) в сравнении с данными численного эксперимента при $T_{i0} = 1$, $n_{r0} = 0,24$, $V_{i0} = 2,3$ и $t = 100$ (сплошная кривая)

и граничных условий, и автомодельности движения.

В целом, экспериментальные данные неплохо согласуются с зависимостью $n_i = n_{il} + n_{ir}$ от τ , полученной из численного эксперимента. На рисунке 4.22 приведены, кроме того, распределения парциальных плотностей l - и r -ионов (они во избежание нагромождения линий даны только в области, где нет совпадения с общей плотностью n_i), а также распределения плотностей в волне разрежения (3.1) при $T_{i0} = 1$, $V_{i0} = 2,3$ в случае расширения плазмы в вакуум отдельно для l -ионов при $n_{l0} = 1$ и отдельно для r -ионов при $n_{r0} = 0,24$. Сравнение профилей плотности ионов в волнах разрежения с соответствующими распределениями плотностей l - и r -ионов в численном эксперименте демонстрирует влияние взаимодействия двух волн разрежения. Видно, что движущиеся в соседнюю плазму ионы существенно затормаживаются по сравнению с вакуумным случаем.

В эксперименте [147] разброс данных достаточно случайный, явных систематических отклонений не наблюдается. Результаты численного эксперимента с тем же вариантом $T_{i0} = 1$, $n_{r0} = 0,24$, $V_{i0} = 2,3$ при $t = 100$ находятся в близком соответствии с экспериментальными данными (рисунок 4.23).

В конечном итоге, эксперименты, проведенные в работах [145–147], не только качественно, но и неплохо количественно согласуются с расчетными зависимостями, следующими из численного эксперимента.

Глава 5

Задачи с двумя разрывами плотности

Выше мы рассматривали эволюцию образованного в начальный момент времени разрыва плотности в бесстолкновительной плазме. По обе стороны разрыва располагались неограниченные в пространстве области либо однородно распределённой плазмы, либо вакуума. Не меньший интерес представляют задачи, когда начальное распределение плотности плазмы содержит два разрыва. Примерами могут служить задача о расширении плоского слоя плазмы в вакуум, задача о затекании плазмой следа за быстро движущимся телом и задача об эволюции возмущения плотности в плазме. Собственно, эти три задачи мы и рассмотрим в данной главе. В этих задачах появляется новая важная величина — характерный пространственный размер L . В отличие от предыдущих задач, где нет такого характерного размера и течения при квазинейтральном описании оказываются автомодельными, самоподобным, здесь в квазинейтральном случае возможно просто подобие течений с разными значениями L , что позволяет найти универсальное для всех L решение.

Кроме того, в таких задачах можно наблюдать за взаимодействием нелинейных структур. Ниже, в частности, будут рассмотрены взаимодействие волн разрежения, взаимопроникновение потоков и развитие неустойчивости, эволюция БУВ в течение большого промежутка времени и прохождение ионно-звуковых солитонов друг сквозь друга. Отметим, что как раз описание течений при взаимодействии нелинейных структур наряду с конкретными решениями задач являются целью представленных в главе исследований.

Изложенные в главе результаты исследований обсуждались в научных публикациях автора [206, 207, 209, 220, 228, 229, 231].

5.1 Расширение слоя плазмы в вакуум

В реальных случаях плазма занимает конечную пространственную область и при отсутствии ограничивающих стенок расширяется во все стороны. Течение процесса в конечной системе можно исследовать на примере расширения плоского слоя плазмы в окружающие вакуумные области. Автор рассматривал такую задачу в совместной с С. И. Анисимовым работе [220], где ещё предполагалось, что процесс происходит во внешнем электрическом поле, а также в работе [228], описывающей случай свободного расширения слоя плазмы в вакуум.

5.1.1 Постановка задачи

В одномерном приближении задача о расширении слоя плазмы в вакуум может быть сформулирована в следующем виде. В начальный момент времени $t = 0$ покоящаяся плазма располагается в области $-L \leq x \leq L$. С обеих сторон плазмы при $-\infty < x < -L$ и при $L < x < \infty$ находятся области вакуума. Ионы плазмы предполагаются однородно распределенными с плотностью n_{i0} , а электроны плазмы — с плотностью n_{e0} . Температуры ионов и электронов, соответственно, равны T_{i0} и T_{e0} . Естественно, предполагается соблюдение квазинейтральности $Z_i n_{i0} = n_{e0}$. Для простоты принимается $Z_i = 1$, и нормированные значения n_{i0} и n_{e0} равны единице.

Очевидно, что предоставленная сама себе плазма в последующие моменты времени начнет расширяться как в левую, так и в правую вакуумные области, а в невозмущенную плазму с обеих сторон пойдут волны разрежения. В силу симметрии процесса в некоторый зависящий от размера слоя момент времени $t = t_L$ обе волны встретятся в точке $x = 0$, и начнется их взаимодействие. Область этого взаимодействия будет увеличиваться в пространстве с течением времени.

Рисунок 5.1 показывает ход характеристик на плоскости (x, t) . Здесь прямолинейные C_p -характеристика EA и C_q -характеристика FA представляют собой границы между невозмущенной областью I и областями

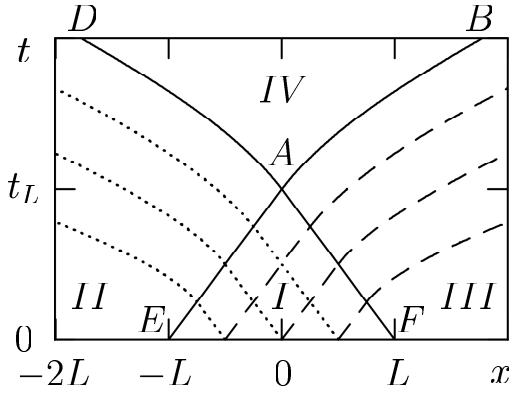


Рисунок 5.1. Пограничные, а также C_p - и C_q -характеристики, представленные на плоскости (x, t) , соответственно, сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми

волн разрежения II и III . Их продолжения AB и AD после пересечения в точке A служат границами, уже не прямолинейными, между областями волн разрежения III и II , соответственно, и областью их взаимодействия IV .

Решения в области волн разрежения можно записать исходя из соотношений (1.27), (1.28) для области II и (1.29), (1.30) для области III . Константы в (1.27) и (1.29), как уже упоминалось в п.1.3.2, равны скорости ионов в невозмущённой области V_{i0} . Мы рассматриваем случай $V_{i0} = 0$. Нетрудно убедиться, что волна разрежения в области II описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} q = 0, \quad p = 2V_i \leq 0, \quad x = (V_i + c_i)t - L, \\ V_i = u = c_i - c_{i0} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} - \ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

В области III имеем:

$$\begin{aligned} p = 0, \quad q = 2V_i \geq 0, \quad x = (V_i - c_i)t + L, \\ V_i = -u = -c_i + c_{i0} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{c_i - 1}{c_i + 1} - \ln \frac{c_{i0} - 1}{c_{i0} + 1} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Граница DAB области IV образована характеристиками. Движение по обе стороны от границы описывается аналитически разными решениями, и на границе имеет место разрыв пространственных производных физических величин (слабый разрыв), который всегда распространяется по характеристикам [10]. При переходе из области II или из области III в область IV моменты n_i , V_i и T_i , а также величины c_i , p и q изменяются непрерывно. Следовательно, значения функций (5.1) и (5.2), взятые на границах AD и AB , соответственно, можно использовать в качестве граничных условий для области IV . Таким

образом, задача о движении плазмы в области IV является задачей с граничными условиями на характеристиках, то есть задачей Гурса.

Момент начала взаимодействия волн разрежения t_L можно определить из (5.1) или (5.2), полагая $V_i = 0$ при $x = 0$. Получаем

$$t_L = \frac{L}{c_{i0}},$$

то есть для точки A имеем $x = 0$, $t = t_L$. Наличие в задаче только одного характерного размера L , в соответствии с п.1.2, позволяет воспользоваться подобием квазинейтральных течений, а именно такие здесь и рассматриваются, и перенормировать задачу к виду, не зависящему от L . Величину t_L можно использовать как единицу времени. Она имеет явный физический смысл, поскольку выражается через скорость звука c_{i0} , определяемую заданной в рассматриваемом случае температурой ионов T_{i0} . Введём новые переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_L}. \quad (5.3)$$

В этих переменных вид уравнений (1.36)–(1.41) в области IV , в целом, не изменится, если воспользоваться следующими величинами:

$$\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_{i0}}, \quad \bar{p}_i = \frac{p}{c_{i0}}, \quad \bar{q}_i = \frac{q}{c_{i0}}, \quad \bar{B} = \frac{B}{Lc_{i0}}. \quad (5.4)$$

После преобразований (5.3) и (5.4) в уравнениях (1.36)–(1.38) все величины будут заменены на их нормированные аналоги, обозначенные теми же символами, но с чертой вверху. При этом полностью сохраняется вид уравнений. В остальных уравнениях, (1.39)–(1.41), преобразования также выразятся в замене всех величин соответствующими нормированными аналогами с чертой. Но, кроме этого, в этих уравнениях несколько изменятся коэффициенты, которые окажутся зависимыми от величины c_{i0} . Последняя определяется ионной температурой, является независимым параметром и не исчезает из задачи при указанных преобразованиях. В уравнении (1.39) коэффициент $1/4c_i^3$ будет заменён на величину $1/4c_{i0}^2\bar{c}_i^3$. Такую же замену следует сделать и в подстановке (1.40), которая в новых переменных запишется следующим образом:

$$\bar{B} = \bar{G} \exp \left[- \int_0^{\bar{p}-\bar{q}} \frac{d\eta}{4c_{i0}^2\bar{c}_i^3(\eta)} \right]. \quad (5.5)$$

Здесь $\bar{c}_i = \bar{c}_i(\bar{p} - \bar{q})$ определяется из перенормированного аналога уравнения (1.34). Уравнение для \bar{G} принимает вид

$$\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \bar{p} \partial \bar{q}} + \bar{b} \bar{G} = 0, \quad (5.6)$$

где

$$\bar{b} = \frac{7 - 6c_{i0}^2 \bar{c}_i^2}{16c_{i0}^4 \bar{c}_i^6}. \quad (5.7)$$

Как видно, в результате преобразований (5.3) и (5.4) в уравнениях, описывающих процесс в области IV , величина L не появляется.

Аналогичная ситуация имеет место также и при переходе к преобразованным согласно (5.3) и (5.4) величинам в уравнениях (5.1) и (5.2), описывающих области волн разрежения II и III . В частности, соотношения между x и t преобразуются к виду, в котором параметр L исчезает:

$$\bar{x} = (\bar{V}_i \pm \bar{c}_i) \bar{t} \mp 1. \quad (5.8)$$

Здесь введено обозначение $\bar{V}_i = V_i/c_{i0}$ и используются двойные знаки \pm и \mp . При этом подразумевается, что верхние знаки относятся к области II , а нижние — к области III . В таком же смысле будут использоваться двойные знаки и далее, а также при записи уравнений граничных характеристик AD (верхние знаки, область II) и AB (нижние знаки, область III).

Параметр L не только не появляется в преобразованных уравнениях, но и, к тому же, исчезает из начальных условий: при $\bar{t} = 0$ плазма занимает область $-1 \leq \bar{x} \leq 1$. Поэтому, нет необходимости решать задачу для каждого значения L ; достаточно решить только одну универсальную задачу. Её решения можно легко применить для заданного значения L . Для этого надо всего лишь восстановить исходные масштабы длины и времени, перейдя от переменных \bar{x}, \bar{t} к переменным x, t . Преимущества такого подхода несомненны.

В рассматриваемой проблеме нерешённой является задача о движении плазмы в области IV . Как уже отмечалось выше, здесь мы имеем задачу Гурса. Она формулируется для уравнения (5.6) и граничных условий на характеристиках AD и AB , которые должны быть записаны как функции от \bar{p} и \bar{q} . Перемена ролей зависимых и независимых

переменных при преобразовании годографа соответствует тому, что для данной задачи различные области в плоскости переменных (x, t) на рисунке 5.1: невозмущенная область I , области волн разрежения II и III , а также область взаимодействия IV трансформируются в плоскости переменных (p, q) на рисунке 1.1, соответственно, в точку A ($p = p_0 = 0, q = q_0 = 0$), линии AD ($p < 0, q = 0$) и AB ($p = 0, q > 0$), а также в область, заключенную между этими линиями ($p < 0, q > 0$). Естественно, сказанное относится и к нормированным величинам \bar{p} и \bar{q} .

На границах AD и AB выполняются соответствующие уравнения (5.8). Подставляя (5.8) в уравнения (1.37), записанные для величин с чертой, легко найти, что на граничных характеристиках имеют место соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{p}} \bar{B}(\bar{p}, 0) = -1, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \bar{B}(0, \bar{q}) = 1.$$

Проинтегрировав эти соотношения вдоль характеристик AD и AB от точки A до некоторых текущих значений, соответственно, \bar{p} и \bar{q} , получим

$$\bar{B}(\bar{p}, 0) = -\bar{p}, \quad \bar{B}(0, \bar{q}) = \bar{q}, \quad \bar{B}(0, 0) = 0.$$

Выбор постоянной $\bar{B}(0, 0)$ зависит от нашего произвола, поскольку согласно (1.38), записанного для величин с чертой, значения \bar{x} и \bar{t} определяются не самой функцией \bar{B} , а её производными. Мы полагаем $\bar{B}(0, 0)$ равным нулю.

Переходя к функции \bar{G} согласно (5.5), получим для уравнения (5.6) граничные условия в виде:

$$\bar{G}(\bar{p}, 0) = -\bar{p} \exp[\Lambda(\bar{p})], \quad \bar{G}(0, \bar{q}) = \bar{q} \exp[\Lambda(-\bar{q})], \quad \bar{G}(0, 0) = 0, \quad (5.9)$$

где введено обозначение

$$\Lambda(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\xi}{4c_{i0}^2 [\bar{c}_i(\xi)]^3}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к решению уравнения (5.6) для функции \bar{G} с граничными условиями (5.9), поставленными на характеристиках. Очевидно, что полученное в п. 1.3.4 решение задачи Гурса (1.46) полностью применимо к функции \bar{G} .

Уравнения границ области IV в плоскости (\bar{x}, \bar{t}) являются важной составной частью решения. Границы AD и AB на рисунке 5.1 представляют

собой C_q - и C_p -характеристики в областях II и III , соответственно. В отличие от C_p -характеристик в области II и C_q -характеристик в области III , которые согласно (5.8) являются прямыми линиями, характеристики AD и AB описываются исходными уравнениями (1.22). Последние представим как

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}_i \mp \bar{c}_i = \frac{\bar{x} \pm 1}{\bar{t}} \mp 2\bar{c}_i, \quad (5.10)$$

где используется (5.3), (5.4) и соотношения (5.8). Подставляя V_i из (5.1) и (5.2) в (5.10), получим

$$\bar{\tau} = \frac{1 \pm \bar{x}}{\bar{t}} = 2\bar{c}_i + \frac{1}{2}c_{i0}^{-1} \ln \frac{\bar{c}_i - c_{i0}^{-1}}{\bar{c}_i + c_{i0}^{-1}} - \left(1 + \frac{1}{2}c_{i0}^{-1} \ln \frac{1 - c_{i0}^{-1}}{1 + c_{i0}^{-1}} \right). \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) может рассматриваться как новая неявная функция $\bar{c}_i = \bar{c}_i(\bar{\tau})$, отличная от используемой ранее функции $\bar{c}_i = \bar{c}_i(\bar{p} - \bar{q})$ по (1.34). Подставим её в (5.10) и заменим \bar{x} на $\pm(\bar{\tau}\bar{t} - 1)$. В результате мы придем к дифференциальному уравнению (срав. с (3.5))

$$\bar{t} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{t}} = -2\bar{c}_i(\bar{\tau}).$$

Интегрируя это уравнение по области $\bar{t} \geq 1$, получим

$$\int_1^{\bar{\tau}} \frac{d\xi}{\bar{c}_i(\xi)} = -2 \ln \bar{t}, \quad \bar{t} \geq 1. \quad (5.12)$$

Подчеркнём, что в (5.12) функция $\bar{c}_i = \bar{c}_i(\bar{\tau})$ определена по (5.11). Здесь мы использовали то обстоятельство, что характеристики AD и AB исходят из точки $\bar{x} = 0, \bar{t} = 1$, где $\bar{\tau} = 1$. Уравнение (5.12) описывает обе пограничные характеристики AD и AB . Отличие между ними проявляется при выборе знака в выражении для $\bar{\tau}$. В случае холодных ионов ($T_{i0} = 0$) уравнение (5.12) принимает более простой вид:

$$\bar{x} \mp 1 = \pm(2\bar{t} \ln \bar{t} - \bar{t}) \quad \text{при } \bar{t} \geq 1. \quad (5.13)$$

На рисунке 5.2 для нескольких значений $T_{i0} \neq 0$ представлены рассчитанные по формулам (5.12) пограничные характеристики между областями III и IV на плоскости (\bar{x}, \bar{t}) и на плоскости $(\bar{x}, t/L)$. В первом случае при любом x вертикальные координаты пограничных характеристик принимают

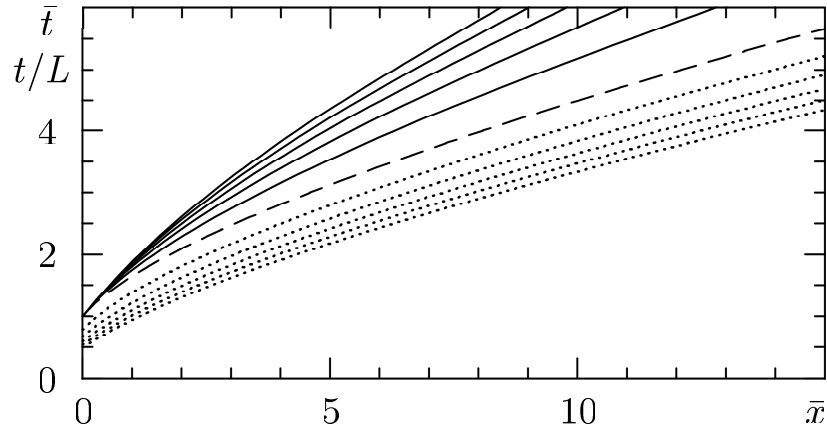


Рисунок 5.2. Пограничные характеристики при значениях T_{i0} , равных 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 и 1 на плоскости (\bar{x}, \bar{t}) (сплошные кривые, соответственно, снизу вверх) и на плоскости $(\bar{x}, t/L)$ (пунктирные кривые, соответственно, сверху вниз); пограничная характеристика при $T_{i0} = 0$ показана штрихами

тем большее значение, чем больше T_{i0} , то есть область взаимодействия волн разрежения IV , ограниченная пограничными характеристиками, сужается с ростом T_{i0} . Здесь величина \bar{t} нормирована на единицу времени $t_L = L/c_{i0}$, которая уменьшается с ростом T_{i0} . Во втором случае единица времени, на которую нормируется вертикальная координата, не зависит от T_{i0} . Можно видеть, что реально вертикальные координаты пограничных характеристик уменьшаются при любом x , если T_{i0} увеличивается. Иными словами, область взаимодействия волн разрежения IV расширяется с ростом T_{i0} . В случае $T_{i0} = 0$ величина $c_{i0} = 1$, и поэтому рассчитанная по (5.13) пограничная характеристика не меняется при переходе от \bar{t} к t/L .

5.1.2 Аналитическое решение в случае $T_{i0} = 0$

Из-за сложной зависимости коэффициента \bar{b} в (5.7) от $\bar{p} - \bar{q}$ в общем случае для решения уравнения (5.6) с условиями (5.9) надо использовать численные методы. В частном случае плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ решение можно записать в аналитической форме. В этом случае имеем: $\bar{c}_i = c_{i0} = 1$, $\bar{b} = 1/16$, $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$, а из (5.9) получаем значения \bar{G} на границе:

$$\bar{G}(\bar{p}, 0) = -\bar{p} \exp(\bar{p}/4), \quad \bar{G}(0, \bar{q}) = \bar{q} \exp(-\bar{q}/4), \quad \bar{G}(0, 0) = 0. \quad (5.14)$$

Учитывая граничные условия (5.14), а также то, что согласно (5.1) и (5.2) область IV лежит в квадранте $p \leq 0, q \geq 0$, решение сформулированной здесь задачи Гурса в соответствии с (1.50) может быть записано для функции \bar{G} следующим образом:

$$\bar{G}(\bar{p}, \bar{q}) = \int_0^{\bar{q}} \Theta(-\eta) I_0(y_2) d\eta - \int_0^{\bar{p}} \Theta(\xi) I_0(y_3) d\xi,$$

где используются обозначения

$$\Theta(\xi) = \left(1 + \frac{1}{4}\xi\right) \exp\left(\frac{1}{4}\xi\right), \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{p}(\eta - \bar{q})}, \quad y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{q}(\xi - \bar{p})}.$$

В рассматриваемом случае $T_{i0} = 0$ связь между \bar{B} и \bar{G} имеет вид соотношения (1.42), в котором все величины заменены на величины с чертой. Отсюда легко определяются производные от \bar{B} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{p}} &= \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{p}} - \frac{1}{4}\bar{G}\right) \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{p} - \bar{q})\right], \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{q}} &= \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{q}} + \frac{1}{4}\bar{G}\right) \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{p} - \bar{q})\right]. \end{aligned}$$

Подставляя последние в уравнения (1.38), записанные для величин с чертой, можно найти зависимости $\bar{x} = \bar{x}(\bar{p}, \bar{q})$ и $\bar{t} = \bar{t}(\bar{p}, \bar{q})$ в виде суммы выражений, в которые входят известные функции и интегралы. Мы здесь не выписываем достаточно длинные окончательные выражения, которые получаются после подстановки. Конкретные зависимости приходится находить численно. Подчеркнём, что при этом речь идёт не о численном решении исходной весьма сложной краевой задачи, а об определении численных значений, рассчитываемых по уже известному точному аналитическому решению.

В рассматриваемом случае плазмы с холодными ионами зависимости плотности и скорости ионов от \bar{p} и \bar{q} легко найти из (1.23) и (1.26):

$$n_i = n_{i0} \exp\left[\frac{1}{2}(\bar{p} - \bar{q})\right], \quad V_i = \frac{1}{2}(\bar{p} + \bar{q}). \quad (5.15)$$

Как и в общем случае (п. 1.3.4), эти соотношения совместно с решениями $\bar{x}(\bar{p}, \bar{q})$ и $\bar{t}(\bar{p}, \bar{q})$ дают параметрическое представление зависимостей n_i и V_i от \bar{x} и \bar{t} , где параметрами служат инварианты Римана \bar{p} и \bar{q} . Следовательно, мы можем полностью рассчитать процесс взаимодействия волн разрежения в области IV .

В областях *II* и *III* решения в виде волн разрежения могут быть записаны в переменных \bar{x}, \bar{t} . Из (5.1), (5.2) при $T_{i0} = 0$ и (5.15) имеем:

$$n_i = n_{i0} \exp\left(\frac{1 \pm \bar{x}}{\bar{t}} - 1\right), \quad V_i = \frac{\bar{x} \pm 1}{\bar{t}} \mp 1.$$

Таким образом, весь процесс расширения плазменного слоя в вакуум в случае плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$ описывается решениями, представленными в аналитическом виде. В течении имеются две области волн разрежения и область их взаимодействия. Каждая область описывается своим аналитическим решением.

5.1.3 Численные решения в случае $T_{i0} = 0$

Сравним результаты, которые можно получить с помощью предложенного выше в рамках КПТМ аналитического подхода к описанию расширения слоя плазмы в вакуум, с данными численного эксперимента по методу частиц в ячейке. Размер плазменного слоя в начальный момент времени равнялся $2L = 40$ в первом варианте и $2L = 80$ — во втором варианте. Длина расчётной области выбиралась такой, чтобы за рассматриваемый промежуток времени минимальное заметное в расчётах возмущение не достигало границ счётной области. В частности, если эти границы располагались при $\bar{x} = \pm 30$, то имелась возможность изучать процесс до $\bar{t} \sim 4,5$. Возможность уменьшить размер расчётной области в два раза за счёт пространственной симметрии относительно точки $x = 0$ не использовалась. Моделировалось расширение плазмы в обе вакуумные области. Электрическое поле определялось из решения уравнения Пуассона с нулевыми значениями электрического поля на границах расчётной области. В численном эксперименте наблюдалась высокая степень симметрии пространственных распределений, что служит дополнительным подтверждением надёжности расчётов. Ниже данные будут представлены для $x > 0$.

Расширение плазменного слоя при $T_{i0} = 0$ иллюстрируют рисунки 5.3–5.6. На рисунках 5.3 и 5.4 пространственно-временные зависимости плотности и потоковой скорости ионов, рассчитанные по формулам аналитического решения п. 5.1.2, сравниваются с соответствующими зависимостями, полученными

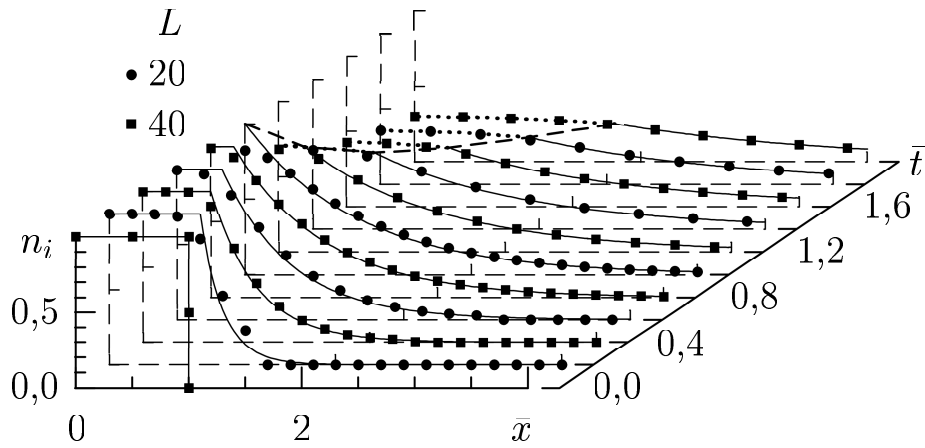


Рисунок 5.3. Плотность ионов $n_i(\bar{x})$ при разных \bar{t} в случае $T_{i0} = 0$. Аналитические зависимости в областях *I* и *III* — сплошные кривые, в области *IV* — пунктирные кривые, численный эксперимент — символы. Штриховая кривая — n_i на границе между областями *III* и *IV*

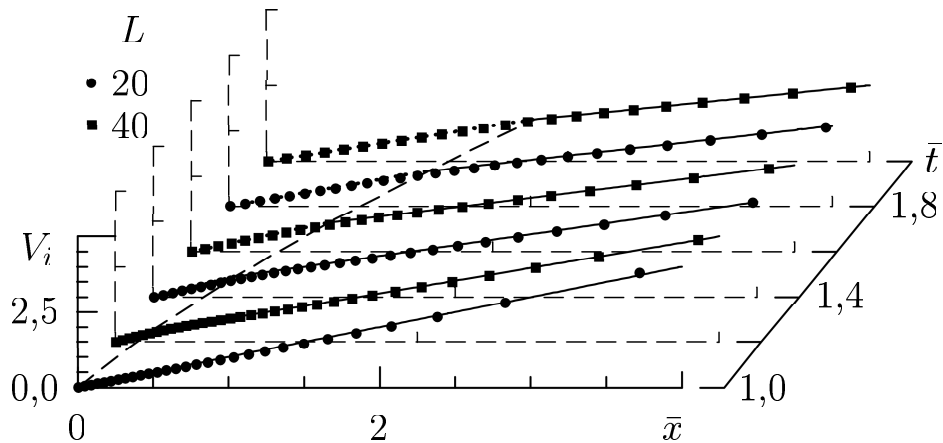


Рисунок 5.4. Поточковая скорость ионов $V_i(\bar{x})$ при разных \bar{t} в случае $T_{i0} = 0$. Аналитические зависимости в области *III* — сплошные кривые, в области *IV* — пунктирные кривые, численный эксперимент — символы. Штриховая кривая — V_i на границе между областями *III* и *IV*

в численных экспериментах при двух значениях L . Во избежание избыточного нагромождения символов на рисунке 5.4 нанесено небольшое число точек фазовой плоскости модельных ионов. Видно, что данные численных экспериментов, соответствующие как случаю $L = 20$, так и случаю $L = 40$, хорошо ложатся на одну и ту же поверхность аналитического решения в переменных \bar{x}, \bar{t} . Предположенное выше подобие между процессами с разными L действительно

наблюдается в численных экспериментах.

Имеется небольшое отличие решения КПТМ, содержащего слабый разрыв, от гладкого численного решения. Расхождение образуется на границе между областями невозмущённой плазмы и волны разрежения в области $\bar{t} < 1$ (рисунок 5.3). Оно обусловлено различием в методе нахождения потенциала и уже подробно обсуждалось в п. 3.2.3. для случая полубесконечной плазмы. Очевидно, что тот случай эквивалентен рассматриваемому здесь при $\bar{t} < 1$.

Область волны разрежения *III* (или *II*) при $\bar{t} < 1$ отделена слабым разрывом от невозмущенной области *I*, а при $\bar{t} > 1$ — от области взаимодействия волн разрежения *IV*. Слабый разрыв относительно невелик, но всё же виден на рисунках 5.3 и 5.4. Несмотря на то, что в точном численном решении он размывается, аналитическое решение, составным элементом которого является слабый разрыв, несёт важную информацию. В частности, местоположение слабого разрыва определяет границу между двумя областями, описываемыми отходящими аналитическими решениями. На слабом разрыве эти решения сшиваются.

Различие между решениями в двух областях, разделённых слабым разрывом, хорошо демонстрируют рисунки 5.5 и 5.6, где представлены линии уровня плотности и уровня скорости ионов. Линии уровня на плоскости

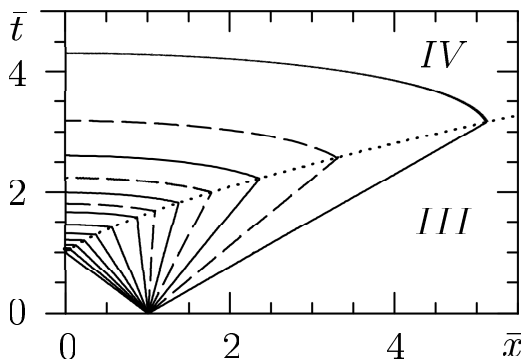


Рисунок 5.5. Линии уровня n_i на плоскости (\bar{x}, \bar{t}) при $T_{i0} = 0$. Уровни n_i (слева направо): от 1 до 0,1 (шаг 0,1) — сплошные кривые, 0,35, 0,25 и 0,15 — штрихи. Граница между областями *III* и *IV* — пунктир

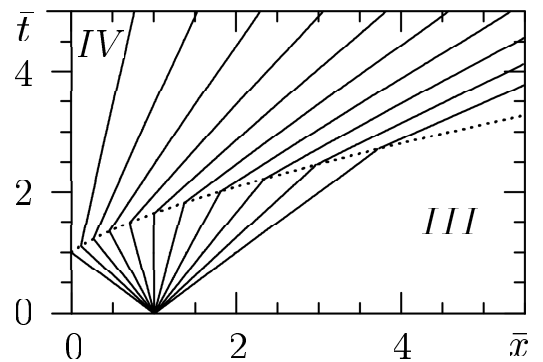


Рисунок 5.6. Линии уровня V_i на плоскости (\bar{x}, \bar{t}) при $T_{i0} = 0$. Уровни V_i от 0 до 2 с шагом 0,2 — сплошные кривые, соответственно, слева направо. Граница между областями *III* и *IV* — пунктирная кривая

(\bar{x}, \bar{t}) являются C_q -характеристиками центрированной волны разрежения III , исходящими из точки $\bar{x} = 1, \bar{t} = 0$. При переходе в область взаимодействия волн разрежения IV линии уровня резко отклоняются от первоначального направления в плоскости (\bar{x}, \bar{t}) . Здесь волны разрежения движутся одна в другую. Их взаимодействие характеризуется тенденцией к выравниванию параметров потока в разных частях области IV . В этой области, и особенно в её центральной части вблизи точки $\bar{x} = 0$, распределение плотности ионов в каждый момент времени не сильно отличается от однородного, а градиент потоковой скорости ионов уменьшается с ростом времени.

5.1.4 Конечная температура ионов

Процесс расширения слоя плазмы с ненулевой температурой ионов также может быть рассмотрен в рамках КПТМ. Для этого потребуется найти численное решение уравнения (5.6) при граничных условиях (5.9). Результаты такого решения, полученные в расчётах с использованием относительно простой разностной схемы, ниже сравниваются с результатами численного моделирования. Моделирование производилось для случаев с разными значениями T_{i0} . При этом, как и в случае $T_{i0} = 0$, использовались два значения пространственного размера слоя: $2L = 40$ и $2L = 80$.

На рисунках 5.7 и 5.8 показаны профили n_i и V_i при разных T_{i0} в момент времени $\bar{t} = 2c_{i0}$. При таком \bar{t} исключается влияние перенормировки (5.3), (5.4) на данные при переходе к другому значению T_{i0} , так как в этом случае все зависимости соответствуют одному и тому же моменту времени $t = 2L$. В отличие от рисунка 5.4, где данные численного эксперимента являются точками фазовой плоскости (и при $T_{i0} = 0$ представляют $V_i(x)$), на рисунке 5.8 результаты численного моделирования показаны значениями усреднённой при $T_{i0} \neq 0$ (потоковой) скорости ионов. Легко видеть, что результаты численного решения задачи (5.6), (5.9) и данные численного моделирования достаточно близки даже в случае больших T_{i0} . Ионная плотность в центре системы $x = 0$ с ростом T_{i0} значительно уменьшается. Это означает, что процесс расширения идёт тем быстрее, чем выше

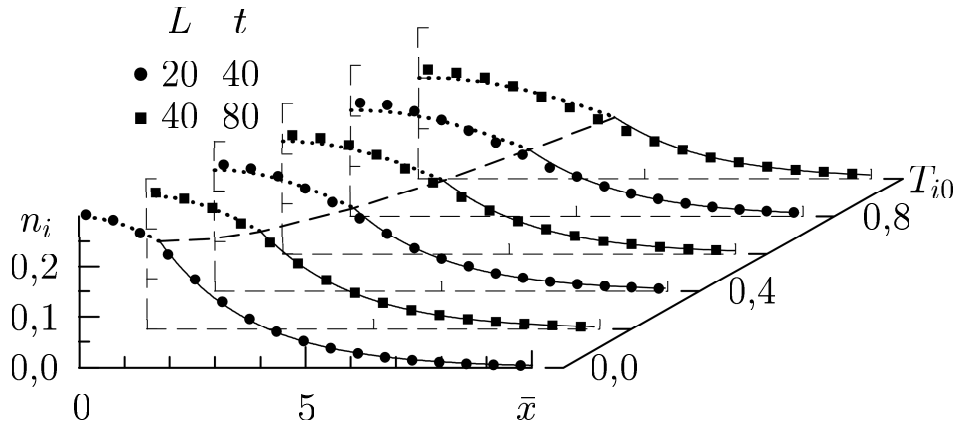


Рисунок 5.7. Плотность ионов $n_i(\bar{x})$ в момент времени $t = 2L$ при разных T_{i0} . Зависимости для области *III* в соответствии с (5.2) — сплошные кривые, для области *IV*, как численные решения задачи (5.6), (5.9), — пунктирные кривые, численный эксперимент — символы. Штриховая кривая — n_i на границе между областями *III* и *IV*

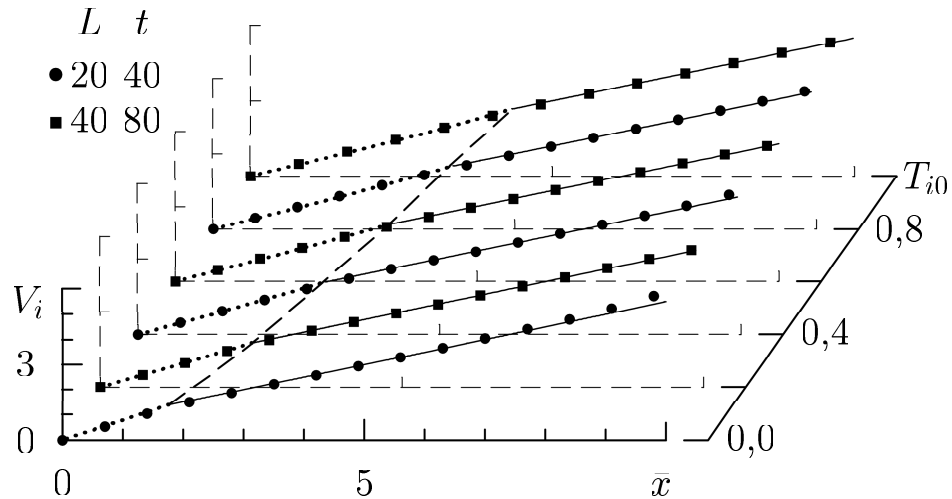


Рисунок 5.8. Поточковая скорость ионов $V_i(\bar{x})$ в момент времени $t = 2L$ при разных T_{i0} . Зависимости для области *III* в соответствии с (5.2) — сплошные кривые, для области *IV*, как численные решения задачи (5.6), (5.9), — пунктирные кривые, численный эксперимент — символы. Штриховая кривая — V_i на границе между областями *III* и *IV*

начальная температура ионов T_{i0} . Как и в случае $T_{i0} = 0$, при $T_{i0} \neq 0$ имеется слабый разрыв на границе между областями *III* и *IV*.

Для случая расширения в вакуум полубесконечной плазмы с $T_{i0} \neq 0$ выше (п. 3.2.3) было показано, что решения КПТМ не могут правильно описать

профиль ионной температуры $T_i(x)$, поскольку эти решения не учитывают перенос тепла ионами. Очевидно, что это в не меньшей степени относится и к плазме конечного размера. В пространственно ограниченной плазме любой ион с ненулевой тепловой скоростью в конце концов окажется движущимся от центра системы наружу. По истечении некоторого промежутка времени самые быстрые ионы покинут центральную область плазмы. Затем то же самое случится с ионами, скорость которых несколько ниже, и далее подобным образом из центральной области будут уходить наиболее быстрые на данный момент ионы. При этом даже малая часть уходящих быстрых ионов будет уносить значительную долю энергии. В результате этого ионная температура в центральной области плазмы должна уменьшаться. Немонотонность функции $T_i(\bar{x})$ иллюстрирует рисунок 5.9. Несмотря на то, что значения ионной температуры в рассматриваемый момент времени довольно малы, можно видеть её постепенное повышение в области *IV* по мере приближения к границе с областью *III*. В области *III* значения T_i падают, что и следовало ожидать в волне разрежения.

Падение ионной температуры в центре системы несколько замедляет процесс расширения. Об этом свидетельствует то, что значения ионной плотности в окрестности точки $x = 0$, полученные в численных экспериментах, при всех $T_{i0} \neq 0$ немного выше, чем соответствующие значения, найденные при численном решении задачи (5.6), (5.9), где, в отличие от численного эксперимента, тепловым потоком ионов пренебрегается (рисунок 5.7). В численных экспериментах этот поток действительно не очень велик (рисунок 5.10), он не оказывает какого-либо заметного воздействия на распределение плотности и потоковой скорости ионов, но всё же влияет на распределение ионной температуры.

В численных экспериментах при $T_{i0} \neq 0$, как и ранее при $T_{i0} = 0$, наблюдается подобие процессов с разными пространственными размерами слоя $2L$, но при одном и том же значении T_{i0} . Было установлено, что полученные при двух значениях L профили ионных плотности n_i и потоковой скорости V_i ложатся на одни и те же зависимости, если только в качестве пространственной координаты используется переменная \bar{x} при одном и том же значении \bar{t} .

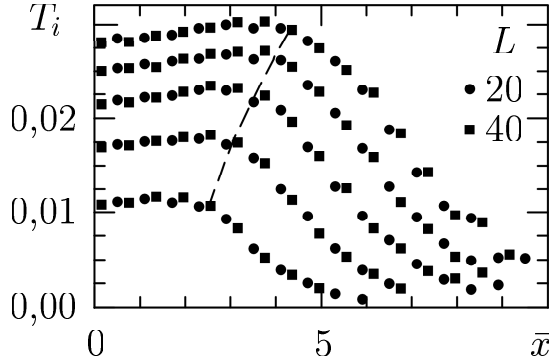


Рисунок 5.9. Температура ионов $T_i(\bar{x})$ в момент времени $t = 2L$ при разных значениях T_{i0} от 0,2 до 1 с шагом 0,2, соответственно, снизу вверх. Штриховая кривая — значения T_i на границе между областями *III* и *IV*

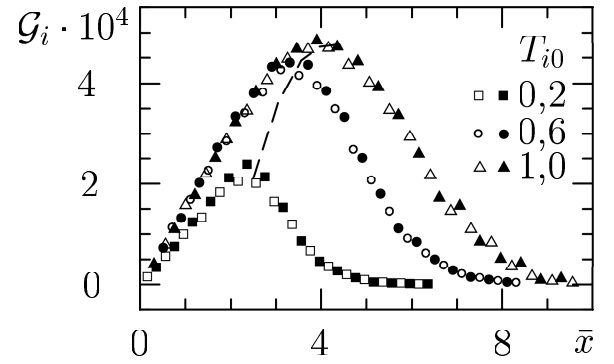


Рисунок 5.10. Тепловой поток ионов при $t = 2L$ для $L = 20$ (светлые символы) и $L = 40$ (тёмные символы). Штриховая кривая — значения $G_i \cdot 10^4$ на границе между областями *III* и *IV*

Более того, оказалось, что такое подобие наблюдается и для профилей ионной температуры (рисунок 5.9) и теплового потока (рисунок 5.10), рассчитанных в кинетическом приближении. Поэтому результаты решения для некоторого заданного значения L могут быть представлены как универсальное решение в переменных \bar{x}, \bar{t} , которое можно затем использовать для нахождения решения при любом другом значении L .

Отметим, что все полученные решения симметричны относительно плоскости $x = 0$, а потоковая скорость ионов при $x = 0$ равна нулю. Последнее условие обычно возникает при постановке граничного условия на твёрдой неподвижной стенке. Принимая плоскость $x = 0$ за такую стенку, мы можем интерпретировать то или иное найденное здесь решение в области $x > 0$ как решение задачи об отражении простой волны от твёрдой стенки.

5.2 Обтекание тел разреженной плазмой

Выше мы рассматривали расширение слоя плазмы конечного размера в две окружающие вакуумные области. В некотором смысле противоположной этому случаю является ситуация, при которой наоборот область вакуума

окружена плазмой. Примером этого может служить образование вакуумной области в следе за быстро движущимся в плазме телом. Если скорость тела значительно превышает скорость звука, то расположенная сразу за телом область практически свободна от частиц. В поперечном распределении плотности плазмы возникает скачкообразное возмущение вплоть до нулевого значения плотности. Иными словами, обтекающая тело плазма расширяется в вакуумную область конечного размера со всех сторон. Подобным образом может происходить обтекание плазмой космических объектов, например, при движении в ионосферной плазме искусственных спутников Земли.

Рассмотрим задачу об обтекании плазмой быстро движущегося тела, ориентируясь для определённости на ее приложение как раз к описанию течения в следе, образуемого искусственным спутником Земли в ионосферной плазме. Мы не ставим здесь цель подробно исследовать обтекание тел разной формы в разных условиях. Основное внимание уделяется характерным особенностям течения, в том числе подобию течений с разными размерами обтекаемого тела. Весьма важным является вопрос о взаимодействии образующихся потоков плазмы и развитии двухпотоковой неустойчивости. Как будет показано, существенной особенностью течения является возникновение за счет неустойчивости «дыр» на фазовой плоскости, где плотность ионов оказывается заметно пониженной. Представленное ниже изложение основано на статьях [207,209], написанных с участием автора, и на работах автора [206,229].

5.2.1 Постановка задачи

Как правило, спутник в ионосфере движется со скоростью V_s , в несколько раз превышающей скорость звука, но V_s мало по сравнению с тепловой скоростью электронов, что в размерных единицах можно выразить в виде

$$\sqrt{T_{e0}/m_i} \ll V_s \ll \sqrt{T_{e0}/m_e}. \quad (5.16)$$

Рассматривая движение тел при таких условиях, можно считать, что все ионы, находящиеся в цилиндрической области с сечением, равным сечению тела в плоскости, перпендикулярной направлению движения, оседают и поглощаются

на поверхности тела, а непосредственно за телом образуется область, свободная от частиц. В эту область, как в вакуум, происходит расширение плазмы, прошедшей мимо тела. По мере движения тела все новые области покоящейся плазмы вовлекаются в затекание следа.

В лабораторной системе координат, в которой плазма вдали от тела покоится, процесс выглядит как нестационарное движение плазмы в области следа за телом перпендикулярно направлению скорости тела. Тело движется с постоянной скоростью, и можно предположить, что следующая за ним структура следа перемещается с той же скоростью. Расширение плазмы во времени оказывается развёрнутым в пространстве вдоль траектории тела. В результате, в системе координат, связанной с обтекаемым телом, схема течения имеет вид, показанный на рисунке 5.11. Здесь тело представляет собой тонкую прямоугольную пластинку, расположенную в плоскости (x, y) , на которую слева вдоль оси z налетает поток плазмы со скоростью $-\mathbf{V}_s$. Короткая сторона пластинки расположена вдоль оси x на интервале $[-L, L]$, а ее длинная сторона — вдоль оси y , причем длина пластинки значительно превышает ширину $2L$.

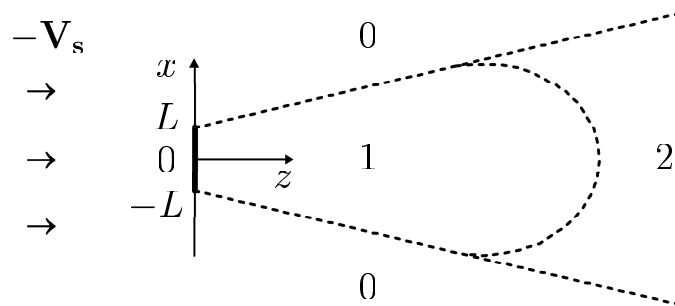


Рисунок 5.11. Схема течения. Пластинка показана толстой линией. Пунктирные линии изображают границы между невозмущенной областью (0), ламинарной областью (1) и областью неустойчивости (2)

Запишем исходную систему уравнений, следуя работе [26]. Поскольку вдоль оси y ничего не меняется, задача сводится к определению решения в плоскости (x, z) . Более того, при постоянной скорости \mathbf{V}_s в системе координат, связанной с телом, временные изменения функции распределения ионов f_i очень малы по сравнению с пространственными изменениями f_i . Поэтому

кинетическое уравнение для ионов из (1.8), обобщенное на случай двух пространственных измерений, можно записать как стационарное уравнение

$$v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f_i}{\partial v_z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} = 0, \quad (5.17)$$

где используются две компоненты скорости v и v_z , соответственно, вдоль двух пространственных координат x и z .

При выполнении условия (5.16) тепловым разбросом вдоль оси z можно пренебречь и, как предлагается в [26], принять $v_z \approx V_s$. Кроме того, область следа всегда больше вытянута вдоль продольной оси z , чем вдоль поперечной оси x . Отношение характерных размеров вдоль этих осей будет близко к V_s (в наших безразмерных единицах). Поэтому $|\partial \varphi / \partial x| \gg |\partial \varphi / \partial z|$, и третьим членом в (5.17) можно пренебречь. Сделаем в (5.17) замену переменных

$$z = V_s t. \quad (5.18)$$

Тогда (5.17) примет вид кинетического уравнения в (1.8). Поскольку в рассматриваемом случае скорость тела мала по сравнению с электронной тепловой скоростью (условие (5.16)), будем полагать, что электроны подчиняются больцмановскому распределению. В результате исходной системой уравнений для нашей задачи будет система уравнений (1.8), как и было предложено в [26].

Введенная в (5.18) переменная t может рассматриваться как время. Проведенные преобразования осуществляют переход от описания процесса с помощью стационарного уравнения (5.17) в системе координат, связанной с движущимся телом, к описанию нестационарного движения. Вместо решения стационарной двумерной задачи в координатах x и z мы можем воспользоваться развитыми выше методами решения нестационарной одномерной задачи о движении плазмы вдоль координаты x с течением времени t . Решение этой задачи в момент времени t можно легко представить в виде решения исходной задачи в точке z , определяемой по (5.18).

Рассмотрим нестационарную задачу, предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ (соответственно и $z = 0$) плазма однородно распределена вне области тела с плотностью n_{i0} . На границах тела плотность частиц падает скачком до нуля и остаётся таковой во всей области, занятой телом. Принимая

для простоты $Z_i = 1$, запишем начальное распределение плотности в виде

$$n_i(x, 0) = n_e(x, 0) = \begin{cases} n_{i0} & \text{при } -\infty < x < -L, \\ 0 & \text{при } -L \leq x \leq L, \\ n_{i0} & \text{при } L < x < \infty. \end{cases}$$

В задаче имеются две характерные величины размерности длины: одна из них — дебаевская длина λ_{De} — определяется параметрами плазмы, а вторая — половина ширины обтекаемого тела L — задается извне. Как уже обсуждалось, в течениях, при которых характерные пространственные масштабы значительно превосходят дебаевскую длину, плазма с хорошей точностью может считаться квазинейтральной и описываться квазинейтральным приближением, из которого величина λ_{De} вообще исключается. В этом случае единственной характерной величиной размерности длины остается полуширина тела L . Как мы уже видели в п. 1.2, в этом случае можно ожидать, что процессы с разными L будут подобными. В самом деле, если в системе уравнений квазинейтрального кинетического приближения (1.4) после нормировки на величины (1.6) с $m_* = m_i$, $n_* = n_{e0}$ и $Z_* = Z_i$ сделать замену

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L}, \quad (5.19)$$

то как сами уравнения, так и область начального возмущения для рассматриваемой задачи ($-1 \leq \bar{x} \leq 1$) не будут зависеть от L . Иными словами, заменой (5.19) мы сводим задачу к виду, в котором величина L вообще не фигурирует, а решение при заданной ионной температуре T_{i0} описывается зависимостями от \bar{x} и \bar{t} . С помощью такого перемасштабирования задача сводится к универсальной. Решение для конкретного значения L легко получается после соответствующего перехода к исходным величинам x и t (или z). В плоскости (x, z) следы, оставляемые в плазме телами разного размера L , но движущимися с одной и той же скоростью V_s , будут иметь одну и ту же форму, но отличаться размерами (геометрическое подобие).

Поскольку система уравнений (1.8), к которой мы свели рассматриваемую задачу, не зависит от V_s , можно предположить, что процессы с разными скоростями V_s , но при одном и том же размере L , также будут подобными. Однако при сравнении таких процессов окажется, что форма следа в плоскости

(x, z) будет различной. В этом случае можно говорить о подобии в общем смысле слова, как о возможности решить задачу, используя решение, полученное при других параметрах задачи.

Заметим, что в нашем случае описанное подобие можно рассматривать как частное проявление общего правила подобия, сформулированного для ионосферной аэродинамики в [26]: течения, возникающие вокруг тел разных размеров, подобны, если тела имеют одну и ту же форму.

5.2.2 Численное моделирование

Задача имеет симметрию относительно координаты $x = 0$. Поэтому решение при $x > 0$ являются зеркальным отражением решения при $x < 0$. Эту симметрию можно использовать и для облегчения численных расчетов, рассматривая задачу только в одной половине пространства $x < 0$ или $x > 0$. Мы, однако, не будем так делать при численном моделировании процесса. Более того, как и в предыдущей главе, мы будем различать частицы плазмы, первоначально расположенные в области отрицательных x , от частиц плазмы, первоначально расположенных в области положительных x , именуя первые l -частицами, а вторые — r -частицами. Это упрощает описание взаимодействия двух потоков. В численных экспериментах плазма моделируется двумя «сортами» ионов (l - и r -ионы) и бальцмановскими электронами.

Очевидно, что на начальном этапе процесс можно рассматривать как расширение плазмы в вакуумную область, происходящее в поперечном направлении с двух сторон. Две волны разрежения движутся в невозмущенные области. Их фронты условно показаны прямыми пунктирными линиями на рисунке 5.11. В некоторый момент времени $\bar{t} > 0$ встречные потоки l - и r -ионов сталкиваются в центре системы $\bar{x} = 0$. Здесь ионная плотность начинает постепенно увеличиваться, и картина течения отклоняется от того, что происходит при свободном расширении плазмы в вакуум. Потоки начинают взаимодействовать, и процесс существенно усложняется.

Обсуждение результатов начнем с демонстрации подобия решений при разных L . На рисунке 5.12 представлено сравнение данных расчетов при двух

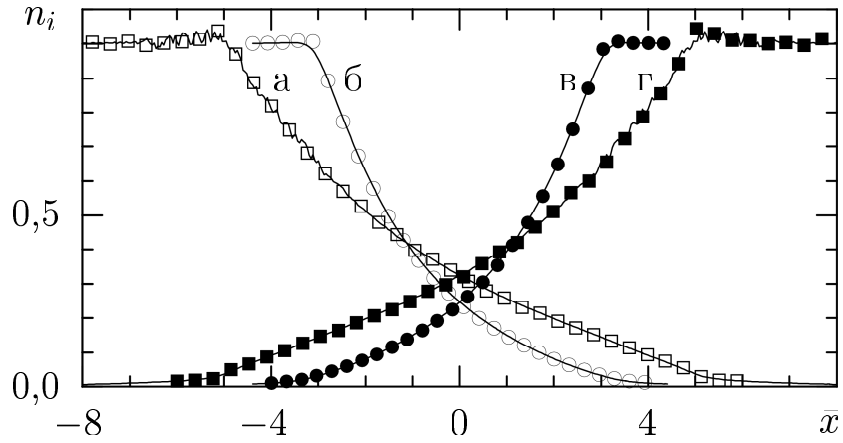


Рисунок 5.12. Плотности l - и r -ионов как функции от \bar{x} при $T_{i0} = 0$. 1) $\bar{t} = 2$: плотность l -ионов (r -ионов) показана кривой б (в) при $L = 25$ и окружностями (кружками) при $L = 50$; 2) $\bar{t} = 4$: плотность l -ионов (r -ионов) показана кривой а (г) при $L = 25$ и светлыми квадратами (темными квадратами) при $L = 50$

значениях L для случая плазмы с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Рассматриваются два момента времени \bar{t} (перенормированная величина \bar{t} соответствует продольной координате z по формуле $\bar{t} = z/LV_s$). Выбирая данные численных экспериментов, соответствующих одному и тому же \bar{t} при разных L , мы получаем идентичные зависимости плотностей от перенормированной координаты \bar{x} . Подобие решений для вариантов с разными L с хорошей точностью наблюдается и для всех остальных зависимостей, найденных в численных экспериментах, включая фазовые плоскости ионов (\bar{x}, v) . Отметим также достаточно хорошую степень симметрии численных решений относительно $\bar{x} = 0$.

Структура следа может быть продемонстрирована распределением в плоскости (\bar{t}, \bar{x}) линий равной плотности ионов, показанным на рисунке 5.13. Видно, что за телом плотность меняется достаточно гладко, а в невозмущенную плазму движется волна разрежения. Для сравнения на рисунке по формуле, аналогичной (3.2), построены линии уровня плотности в волне разрежения при расширении плазмы в вакуум. Линии, соответствующие большей плотности, отклоняются от вакуумного решения при больших \bar{t} . Исключение составляет случай $n_i = 1$, где кривая численного эксперимента изначально не совпадает с линией волны разрежения. Различие связано с тем, что слабый разрыв, возникающий в волне разрежения на границе

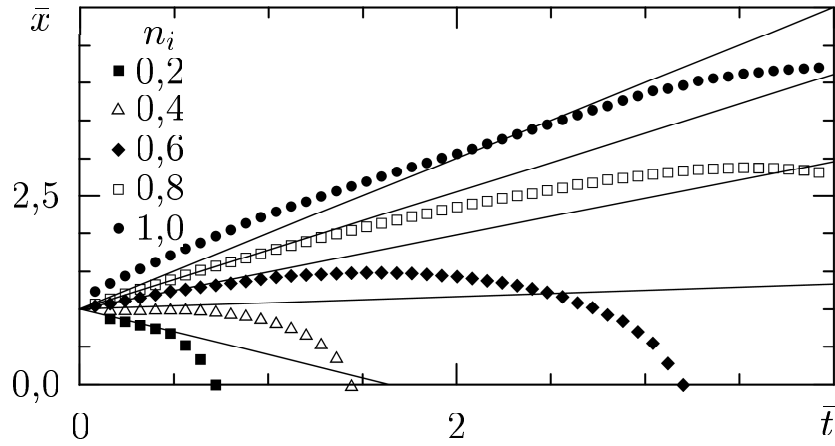


Рисунок 5.13. Линии уровня на плоскости (\bar{t}, \bar{x}) для значений плотности ионов n_i от 0,2 до 1 (символы), полученные в численном эксперименте при $T_{i0} = 0$, $L = 25$, в сравнении с аналогичными линиями в волне разрежения при расширении плазмы в вакуум (сплошные линии, соответственно, снизу вверх)

с невозмущенной областью, в численном эксперименте размывается. Это уже обсуждалось в п. 3.2.3. Из рисунков 5.12 и 5.13 видно, что в течение рассматриваемого промежутка времени движение носит гладкий характер, никаких неустойчивостей не развивается.

Однако описанная структура следа может сильно измениться при больших \bar{t} . Причиной этого является то, что движение состоит из двух потоков, и при определенных условиях их взаимодействие приводит к развитию неустойчивости. Сразу отметим, что в этом случае нельзя ожидать полного подобия решений для задач с разными L . Дело в том, что образование небольших структур с большими градиентами, как это имеет место при возбуждении коротковолновых осцилляций, сопряжено с нарушением квазинейтральности течения. Пренебречь конечностью дебаевской длины λ_{De} в этом случае нельзя, и движение не будет адекватно описываться квазинейтральным приближением.

В рассматриваемой задаче двухпотоковая неустойчивость возникает при больших значениях $\bar{t} \gtrsim 6$. Сначала неустойчивость развивается в двух небольших областях вблизи фронтов волн разрежения, распространяющихся в невозмущенную плазму (рисунки 5.14 и 5.15). Постепенно осцилляции усиливаются, а их области расширяются, охватывая, в конце концов, всю область следа, поперечный размер которой во много раз превышает размер тела.

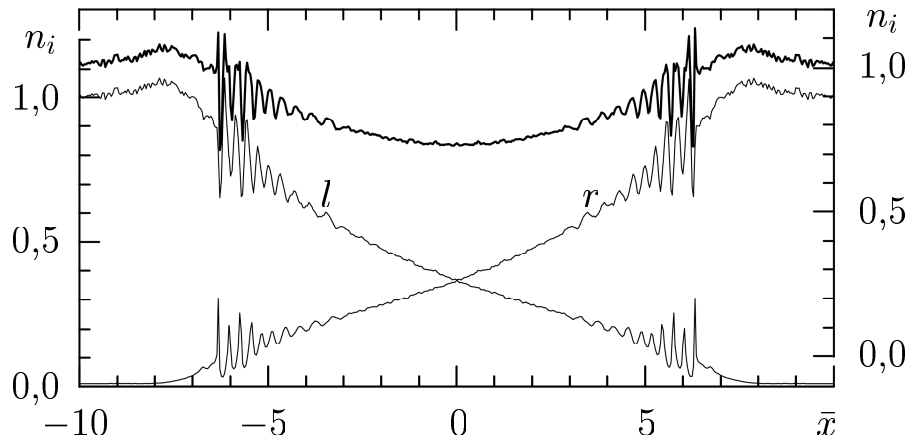


Рисунок 5.14. Пространственные распределения ионных плотностей при $T_{i0} = 0$, $L = 25$, $\bar{t} = 6,8$. Кривые, обозначенные буквами l и r , представляют, соответственно, плотности l - и r -ионов (левая ось ординат); толстой сплошной кривой показана полная плотность ионов (правая ось ординат)

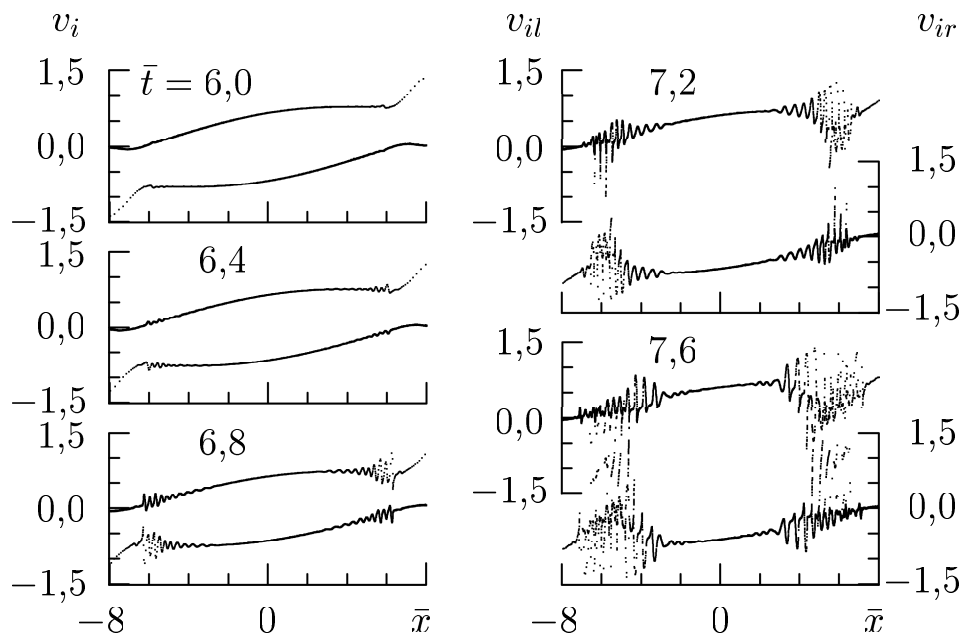


Рисунок 5.15. Фазовые плоскости l - и r -ионов, соответственно, сверху и внизу на каждой части рисунка при $T_{i0} = 0$, $L = 25$ и разных \bar{t} . На рисунках справа левые оси ординат соответствуют l -ионам, а правые оси ординат — r -ионам

На фазовых плоскостях на рисунке 5.15 хорошо видно, что неустойчивость развивается, в первую очередь, в местах, где скорости двух потоков максимально сближены. Это соответствует тому, что для развития неустойчивости двух ионных потоков с горячими электронами разница потоковых скоростей,

умноженная на $\cos \theta$, не должна превышать определенного предела ΔV_b [20,21]. Здесь θ обозначает угол между направлением потоковой скорости и волновым вектором. Мы рассматриваем волны, распространяющиеся в направлении потока и $\theta = 0$. В общем случае возможна генерация косых волн. Как показано в [218], их роль в термализации плазменных потоков не очень велика. Поэтому можно ожидать, что учет косых волн не изменит радикально результаты, полученные без такого учета.

В случае $\theta = 0$ и $T_{i0} = 0$ предел ΔV_b может быть определен по (1.85):

$$\Delta V_b = \frac{\left(n_{il}^{1/3} + n_{ir}^{1/3}\right)^{3/2}}{\left(n_{il} + n_{ir}\right)^{1/2}}, \quad (5.20)$$

где n_{il} и n_{ir} — плотности l - и r -ионов соответственно. При переходе от невозмущенной области в центр системы $\bar{x} = 0$, где $n_{il} = n_{ir}$, величина ΔV_b меняется от 1 до 2. При $\bar{t} > 6$ разница потоковых скоростей вблизи обеих фронтов волн разрежения $|\bar{x}| \sim 6$ становится меньше, чем предельное значение (5.20) $\Delta V_b \sim 1$. Здесь также малы изменения параметров потоков за время развития неустойчивости $1/\gamma$ и, соответственно, не нарушаются скольнибудь сильно резонансные условия для неустойчивости. Именно вблизи фронтов волн разрежения в первую очередь должна возбуждаться неустойчивость. Отметим, что развитие неустойчивости при больших временах вблизи фронтов волн разрежения наблюдалось также в расчетах [119].

С ростом \bar{t} абсолютные значения потоковых скоростей уменьшаются. Уменьшаются также их градиенты и градиенты плотностей. В результате области неустойчивости расширяются. Как видно из рисунка 5.15, неустойчивость зарождается вдали от тела при $\bar{t} > 6$ и $|\bar{x}| \sim 6$. Примерно при $\bar{t} \sim 9$ неустойчивость заполняет всю область следа, а в местах сильного развития вступает в нелинейную стадию. Характерные области течения схематически показаны на рисунке 5.11, где, кроме невозмущенной области 0, выделены две области: область ламинарного течения 1 и область неустойчивости 2, где имеются развитые нерегулярные осцилляции. Отметим, что в экспериментах [62, 121] неустойчивость не была обнаружена. Это можно объяснить тем, что экспериментальные значения \bar{t} были ниже 6 в обоих работах.

Из рисунка 5.15 видно, что неустойчивость проявляется как осцилляции вдоль оси \bar{x} , нарастающие и захватывающие всё большую область с ростом \bar{t} . При увеличении \bar{t} сумма фазовых кривых l - и r -ионов принимает вид двух осциллирующих в противофазе границ, внутри которых находятся «дыры» (рисунок 5.16, (а)). С дальнейшим ростом \bar{t} возникают области «термализации», на фоне которых выделяется некоторое число «дыр» — кольцеобразных структур (рисунок 5.16, (б)). Области «термализации»

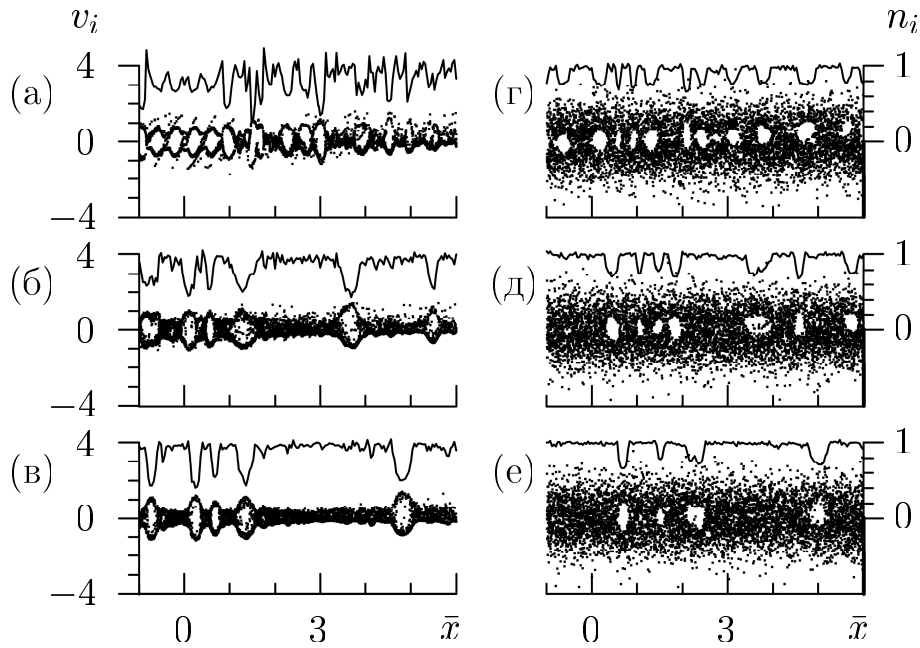


Рисунок 5.16. Фазовые плоскости ионов (символы, левые оси ординат) и распределения полной плотности ионов (сплошные линии, правые оси ординат) при $L = 25$. Случай $T_{i0} = 0$: (а) $\bar{t} = 9,6$, $t = 240$, (б) $\bar{t} = 14,4$, $t = 360$, (в) $\bar{t} = 19,2$, $t = 480$. Случай $T_{i0} = 1$: (г) $\bar{t} = 8$, $t = 200$, (д) $\bar{t} = 12,8$, $t = 320$, (е) $\bar{t} = 17,6$, $t = 440$.

характеризуются наличием заметного разброса скоростей ионов даже в случае $T_{i0} = 0$ и отсутствием потокового движения; ионная плотность здесь близка к единице. Области «дыр» представляют собой потенциальные «ямы», в которых существенно снижены плотности частиц. Поэтому представляется уместным назвать для краткости такие области кавитонами.

В процессе формирования кавитон может захватить ионы с малыми скоростями. В то же время пролетные ионы ускоряются и замедляются

в кавитонах, образуя на фазовой плоскости кольцеобразные структуры. Численные эксперименты, проведенные при высокой температуре ионов $T_{i0} = 1$, дали примерно такую же картину следа. Из рисунков 5.16, (г)–(е) видно, что и в этом случае развивается неустойчивость и образуются кавитоны.

Кавитоны оказываются достаточно устойчивыми образованиями. С ростом \bar{t} положения кавитонов на оси \bar{x} меняются очень медленно, если они расположены вблизи центра системы $\bar{x} = 0$. Однако удаленные от центра кавитоны подвержены более значительному смещению на периферию при увеличении \bar{t} . В лабораторной системе отсчета такое смещение выглядит как движение кавитонов с небольшой скоростью, которая тем больше, чем дальше находится кавитон от точки $\bar{x} = 0$.

Таким образом, структура следа сразу за пластинкой представляет собой постепенно расширяющееся со временем (с координатой z) гладкое возмущение. Однако при некотором достаточно большом \bar{t} (или z) на этом широком гладком возмущении появляются нарастающие осцилляции, постепенно трансформирующиеся в отдельные мелкие возмущения, кавитоны, между которыми параметры плазмы принимают невозмущенные значения.

В точке $z = 0$ (в начальный момент времени $t = 0$) за пластинкой нет ионов. В расчете на единицу длины вдоль оси y полное число ионов, изъятых при столкновении с телом из невозмущенной области на интервале $[-L, L]$, составляет $2Ln_{i0}$. Такой дефицит ионов будет сохраняться и при других значениях $z > 0$ (в последующие моменты времени $t > 0$). В ламинарной области 1 этот дефицит ионов создает гладкое возмущение по всей области x между фронтами волн разрежения. Но в глубине области неустойчивости 2 весь дефицит ионов оказывается разделенным между некоторым количеством кавитонов. Если предположить, что все кавитоны имеют одинаковый размер d_{cv} вдоль оси x и одинаковую плотность ионов n_{icv} , то условие сохранения дефицита ионов можно записать в виде $2Ln_{i0} = N_{cv}(n_{i0} - n_{icv})d_{cv}$. Отсюда следует оценка полного числа кавитонов

$$N_{cv} = \frac{2}{\bar{d}_{cv}(1 - n_{icv}/n_{i0})}, \quad (5.21)$$

где $\bar{d}_{cv} = d_{cv}/L$. Из численных экспериментов было установлено, что $n_{icv}/n_{i0} \sim$

0,5–0,8 и $\bar{d}_{cv} \sim 0,2–0,4$, причем эти значения не зависят от L . Тогда (5.21) дает грубую оценку числа кавитонов: $10 < N_{cv} < 50$.

Здесь следует сделать важное дополнение. Используемый здесь термин «кавитон» в физике плазмы часто употребляется также для обозначения нелинейных структур, образующихся при развитии ленгмюровской турбулентности. Их появление обусловлено модуляционной неустойчивостью. Они имеют вид ямок плотности (каверн), заполненных электронными колебаниями плазмы [243]. Естественно, свойства таких кавитонов существенно отличаются от свойств кавитонов, образованных на нелинейной стадии двухпоточковой неустойчивости. Это демонстрируют рисунки 5.17 и 5.18. На рисунке 5.17 показаны распределения плотности ионов и квадрата электрического поля в развитой стадии ленгмюровской турбулентности. Эти распределения получены при численном моделировании воздействия радиоволны на ионосферную плаз-

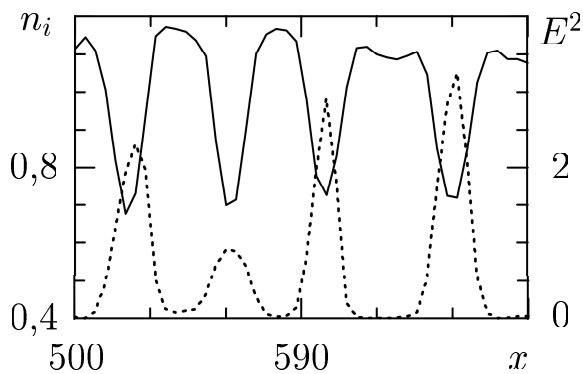


Рисунок 5.17. Пространственные распределения n_i (сплошная кривая) и E^2 (пунктирная кривая, правая ось ординат) при ленгмюровской турбулентности. $T_{i0} = 1$, $E_0 = 0,01$, $t = 350$ (электронная нормировка)

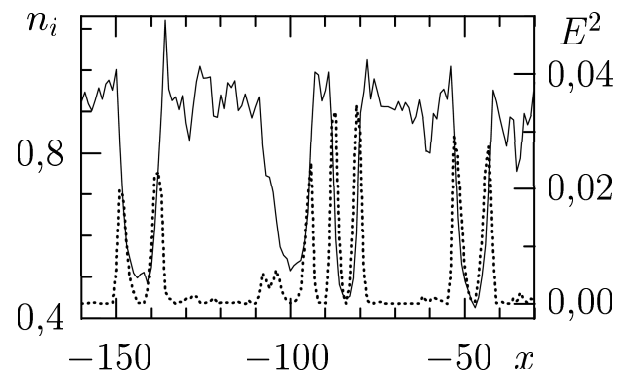


Рисунок 5.18. Пространственные распределения n_i (сплошная кривая) и E^2 (пунктирная кривая, правая ось ординат) при обтекании плазмой тела. $T_{i0} = 0$, $L = 50$, $t = 600$ (ионная нормировка)

му [215]. Волна накачки имела амплитуду электрического поля $E_0 = 0,01$. Здесь видно образование кавитонов, ямок плотности, которые полностью заполнены электрическим полем, причём последнее сосредоточено только в области кавитонов. В отличие от этого, в кавитонах, образующихся в следе за обтекае-

мым плазмой телом, электрическое поле определяется градиентом плотности. В точке минимума плотности поле меняет знак, а его квадрат принимает минимальное значение (рисунок 5.18).

Отметим, что двухпотоковая неустойчивость может приводить к образованию кавитонов не только при возмущении плотности плазмы до нулевого значения, но и при возмущении плотности в виде ямки с конечным значением плотности [206].

Несмотря на то, что здесь изучалась задача для тонкой пластинки, ее решение может быть полезно и при изучении следа за не сильно вытянутым телом и рассматриваться как первое приближение к точному решению.

5.3 Эволюция возмущения плотности

Рассмотрим ещё одну задачу, в которой изучается эволюция возмущения плотности, расположенного в области между двумя разрывами плотности. В отличие от предыдущего случая, плотность плазмы в возмущённой области не понижена, а повышена по сравнению с плотностью окружающей возмущение плазмы. Распределение плотности подобного типа может возникнуть, например, в лазерной плазме, образующейся при облучении тонких мишеней.

5.3.1 Постановка задачи

Задача об эволюции возмущения плотности плазмы рассматривается здесь на примере, когда начальное возмущение плотности имеет вид «горба», на границах которого плотность падает разрывным образом:

$$n_i(x, 0) = n_e(x, 0) = \begin{cases} n_{i0} & \text{при } -\infty < x < -L, \\ n_{im} & \text{при } -L \leq x \leq L, \\ n_{i0} & \text{при } L < x < \infty, \end{cases} \quad (5.22)$$

где постоянная величина n_{im} представляет собой плотность частиц в области возмущения на фоне невозмущённой плазмы с плотностью n_{i0} и $n_{im} > n_{i0}$.

Чтобы иметь представление о том, к чему может привести изменение начальной формы возмущения, мы также рассматриваем гладкое начальное возмущение. Предполагаем, что оно симметрично относительно $x = 0$ и, следовательно, нам достаточно записать $n_i(x)$ при $t = 0$ лишь в области $x > 0$. Эта функция выбрана нами в виде

$$n_i(x) = \begin{cases} n_{im} & \text{при } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{n_{im} + n_{i0}}{2} + \frac{n_{im} - n_{i0}}{2} \cos\left(\pi \frac{x - L}{L_f}\right) & \text{при } L < x < L + L_f, \\ n_{i0} & \text{при } L + L_f \leq x < \infty, \end{cases} \quad (5.23)$$

где L_f — размер гладкого фронта возмущения.

Эволюция таких возмущений плотности плазмы изучается с помощью численного моделирования по методу частиц в ячейке, исходя из системы уравнений (1.8), применимой в предположении, что электроны распределены по закону Больцмана. Соответственно, модельными частицами представлены только ионы. Мы предполагаем, что $Z_i = 1$ и при $t = 0$ ионы распределены по (5.22) или (5.23) с $n_{im} = 2$, $n_{i0} = 1$. Симметрия задачи позволяет моделировать движение плазмы лишь в одной половине области плазменного течения. При этом левая граница вычислительной области находится в точке $x = 0$. В этой точке и на правой границе вычислительной области $x = 5000$ ставятся граничные условия: электрическое поле равно нулю, а модельные частицы испытывают зеркальное отражение. На правой границе плазма невозмущена и квазинейтральна. Здесь $n_i = n_{i0} = 1$, $\varphi = \ln n_{i0} = 0$.

При моделировании мы будем различать две группы модельных ионов по их начальному положению. При $t = 0$ группа 1 состоит из ионов, расположенных в области возмущения, ионы группы 2 находятся в невозмущённой области.

5.3.2 Плазма с холодными ионами

Развитие процесса существенно зависит от начальной ионной температуры T_{i0} . Рассмотрим плазму с холодными ионами $T_{i0} = 0$. Мы изучим три случая. В случае I начальное распределение плотности описывается уравне-

нием (5.22) с $L = 50$ (рисунок 5.19), в случаях II и III — уравнением (5.23) с $L_f = 50$ (рисунок 5.20). При этом мы полагаем, что $L = 12,5$ в случае II и $L = 50$ в случае III.

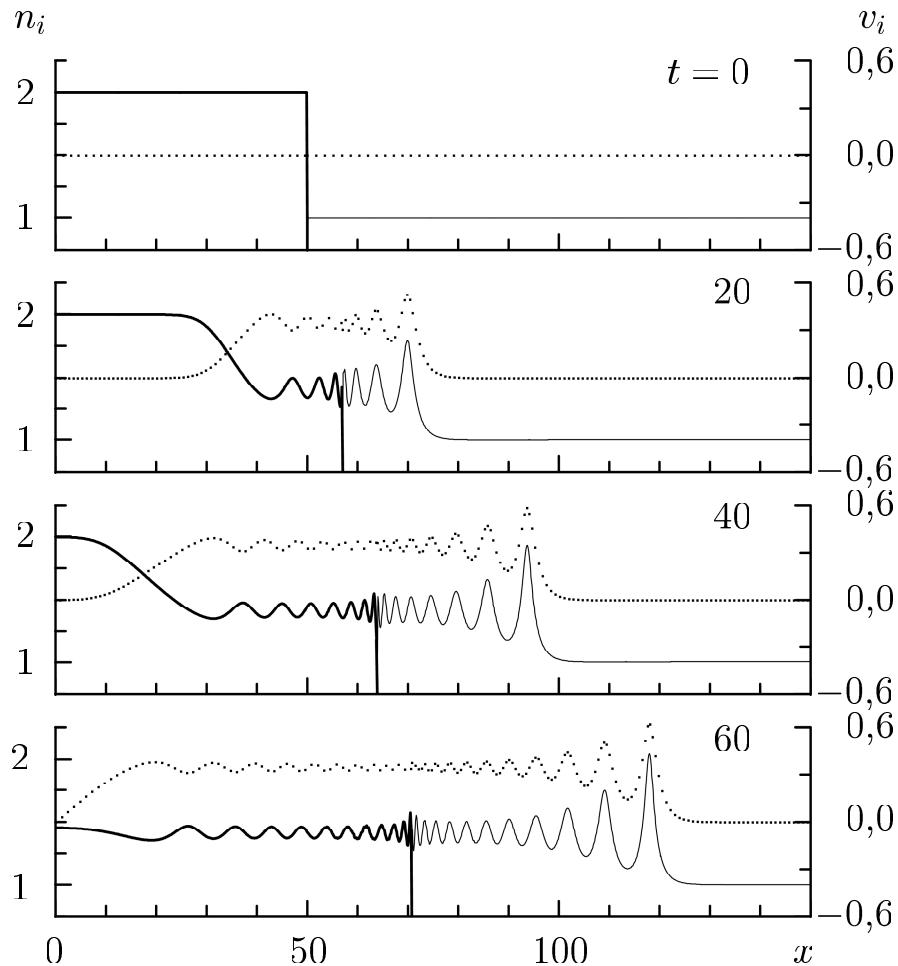


Рисунок 5.19. Ионные плотность $n_i(x)$ (кривые) и фазовая плоскость (x, v_i) (точки, правая ось ординат) при нескольких t в случае I. Плотность ионов группы 1 — толстые, группы 2 — тонкие кривые. $T_{i0} = 0$

В начальные моменты времени движение плазмы как вблизи левой, так и вблизи правой границ области возмущения будет представлять собой расширение плазмы в плазму меньшей плотности. Как мы видели в п. 4.2, такой процесс при $T_{i0} = 0$ приводит к образованию волны разрежения, движущейся в область более плотной плазмы, и БУВ, движущейся в область плазмы меньшей плотности. Между этими волнами устанавливается область осцилляций. Эта область при усреднении осцилляций имеет вид плато.

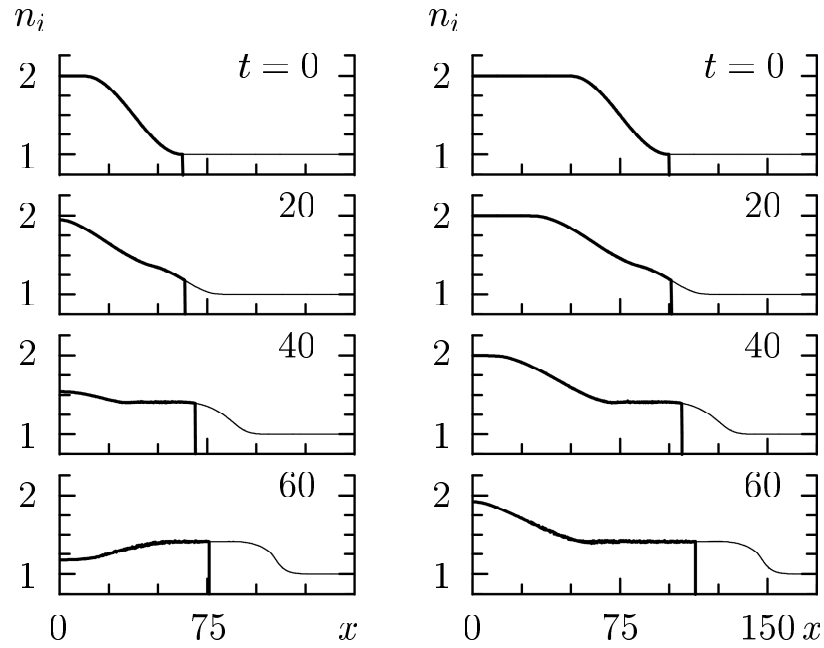


Рисунок 5.20. $n_i(x)$ при нескольких t в случаях II (слева) и III (справа). Плотность ионов группы 1 — толстые, группы 2 — тонкие кривые. $T_{i0} = 0$

Рисунок 5.19 иллюстрирует течение в рассматриваемом случае. Хорошо видно наличие контактной границы между ионами группы 1 и ионами группы 2. С течением времени волны разрежения, движущиеся с двух сторон, встречаются в центре системы $x = 0$ и начинают взаимодействовать примерно так же, как описано в п. 5.1. В результате плотность ионов здесь начинает падать.

Значения величин на плато и скорость БУВ определяются по формулам (4.4) и (4.9). Аналогичным образом мы можем найти значения этих величин и для рассматриваемого случая. Потребуется только учесть, что здесь плотность нормирована на меньшую невозмущённую плотность ($n_{i0} < n_{im}$), а не на бóльшую, как было раньше. Получим следующие оценки:

$$n_{ip} = \sqrt{n_{im}n_{i0}}, \quad V_{ip} = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{im}}{n_{i0}}, \quad \varphi_p = \frac{1}{2} \ln(n_{im}n_{i0}), \quad D = \frac{n_{ip}V_{ip}}{n_{ip} - n_{i0}}. \quad (5.24)$$

Используя (5.24) для случая I, найдём

$$n_{ip} \approx 1,414, \quad V_{ip} \approx 0,347, \quad \varphi_p \approx 0,347, \quad D \approx 1,183. \quad (5.25)$$

При численном моделировании было получено, что осцилляции ионных плотности и скорости (рисунок 5.19), а также потенциала происходят около соответствующих значений (5.25). Скорость БУВ принимала значение $D \approx 1,193$ при $t \leq 40$. Из этого видно, что оценки (5.24) достаточно разумны.

Как и в случае возмущения с резкими начальными границами (5.22), в случае с гладкими границами (5.23) также возникает волна разрежения, за которой образуется плато и гладкий фронт движущейся по невозмущённой области волны (рисунок 5.20). На плато нет осцилляций, а значения величин, как было установлено, с хорошей точностью могут быть определены по (5.24).

Последующее развитие процесса иллюстрируют рисунки 5.21 (случай I) и 5.22 (случаи II и III). В случае I ионы группы 2 осциллируют так же, как и ранее, и осцилляторная структура расширяется. Но осцилляции ионов

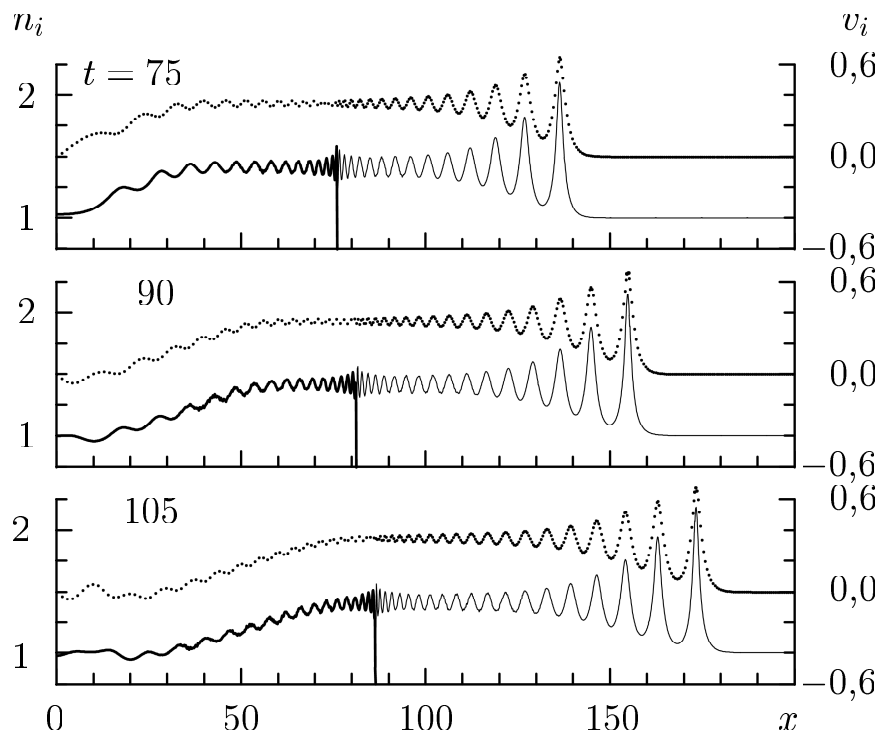


Рисунок 5.21. Плотность $n_i(x)$ (кривые) и фазовая плоскость (x, v_i) (точки, правая ось ординат) при нескольких t в случае I. Толстые кривые показывают плотность ионов группы 1, тонкие — плотность ионов группы 2. $T_{i0} = 0$

группы 1 постепенно затухают. В случаях II и III гладкий фронт со временем становится более крутым. Процесс сопровождается образованием осцилляций. Число осцилляций и их амплитуды увеличиваются со временем. Амплитуды достигают значений, лишь немного меньших, чем амплитуды в случае I. Это хорошо видно из рисунка 5.23, где распределение плотности ионов показаны для всех случаев при $t \geq 120$.

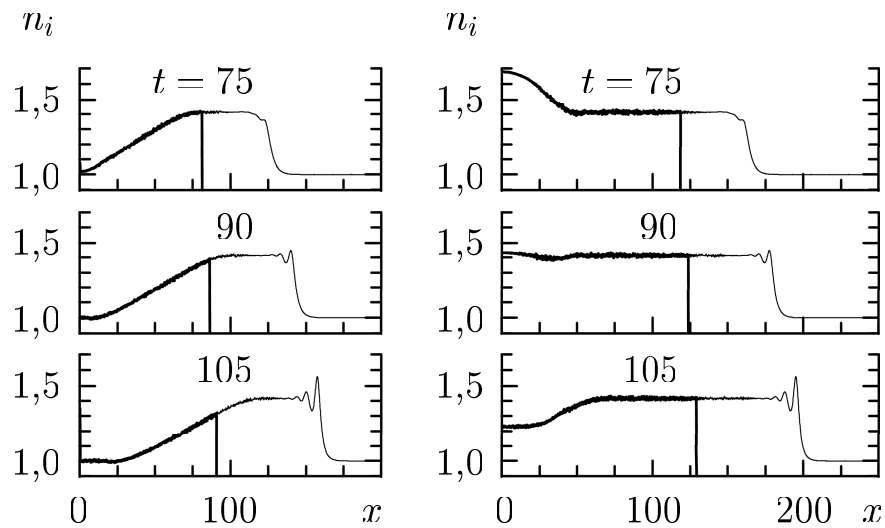


Рисунок 5.22. $n_i(x)$ при нескольких t в случаях II (слева) и III (справа). Плотность ионов группы 1 — толстые, группы 2 — тонкие кривые. $T_{i0} = 0$

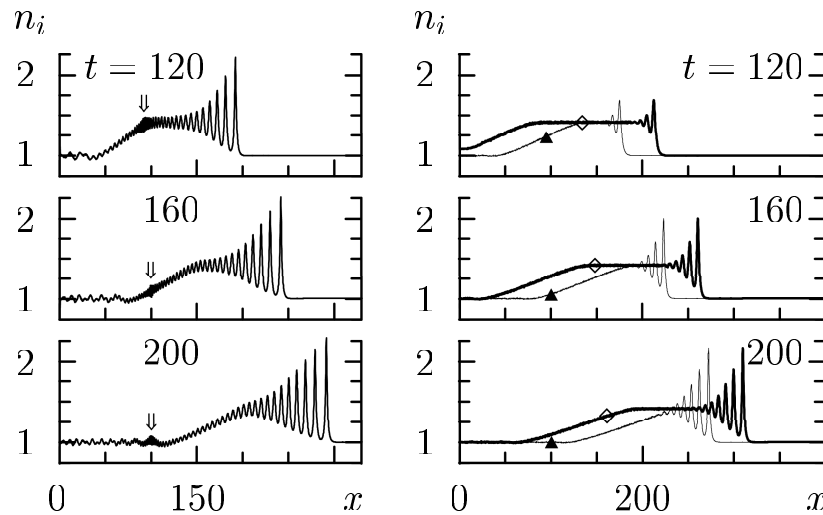


Рисунок 5.23. Ионная плотность как функция x при нескольких t в случаях I (слева), II (тонкие кривые справа) и III (толстые кривые справа). Контактные границы между ионами группы 1 и ионами группы 2 показаны стрелками, треугольниками и ромбами в случаях I, II и II, соответственно. $T_{i0} = 0$

Представленные рисунки демонстрируют эволюцию волны разрежения вплоть до полного исчезновения в результате взаимодействия с такой же волной, движущейся навстречу в области $x < 0$. Начальное уединённое возмущение распадается на два новых возмущения конечного размера. Одно такое возмущение находится в правом полупространстве $0 < x < \infty$ и распространяется в положительном направлении. Другое возмущение располагается

в левом полупространстве $-\infty < x < 0$ и движется в отрицательном направлении. Каждое из этих возмущений содержит рассмотренную выше платоподобную область с осцилляциями. Наряду с этим возникает новая платоподобная область вблизи точки $x = 0$ между возмущениями. Эта область со временем увеличивается, а плотность ионов здесь устанавливается на уровне невозмущённого значения $n_i = n_{i0} = 1$.

К моменту времени $t = 200$ ионы группы 1 практически не осциллируют даже в случае I. Осцилляции ионов группы 2 сохраняются и сосредоточены ближе к фронту волны, движущейся по невозмущённой области с плотностью $n_{i0} = 1$. Сам фронт имеет вид солитоноподобного импульса и распространяется со сверхзвуковой скоростью: $D \approx 1,250$ в случае I и $D \approx 1,232$ в обоих случаях II и III при $t = 200$. Иными словами, мы имеем БУВ во всех трёх случаях.

Как мы видим, на этом этапе развития процесса различия между случаями I, II и III весьма незначительны и не являются принципиальными. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением одного из них. Пусть это будет случай I. Пространственное распределение плотности ионов для этого случая, представленное на рисунке 5.23, эволюционирует далее таким образом, что нижняя огибающая осцилляторной структуры постепенно приближается к прямой линии, соответствующей невозмущённым значениям $n_i = 1$, $V_i = 0$, $\varphi = 0$ при любом x , а сама структура трансформируется в цепочку отдельных импульсов.

При больших t течение имеет вид, представленный на рисунке 5.24. Движущееся направо возмущение состоит из 18 импульсов, упорядоченных по амплитуде. При $t = 3800$ (рисунок 5.24(a)) цепочка импульсов доходит почти до правой границы вычислительной области. На вкладке пространственные распределения ионной скорости в импульсах 9 и 10 показаны в бóльшем масштабе. Эти распределения имеют солитоноподобный вид. Поэтому интересно сравнить их с аналогичными распределениями в ионно-звуковых солитонах с теми же самими амплитудами. Мы рассчитали профиль ионно-звукового солитона по изложенному в главе 1 методу. Амплитуда потенциала φ_m выбиралась в первом случае равной амплитуде импульса 9 ($\varphi_m = 0,465$) и во втором случае равной амплитуде импульса 10 ($\varphi_m = 0,427$). Представленное

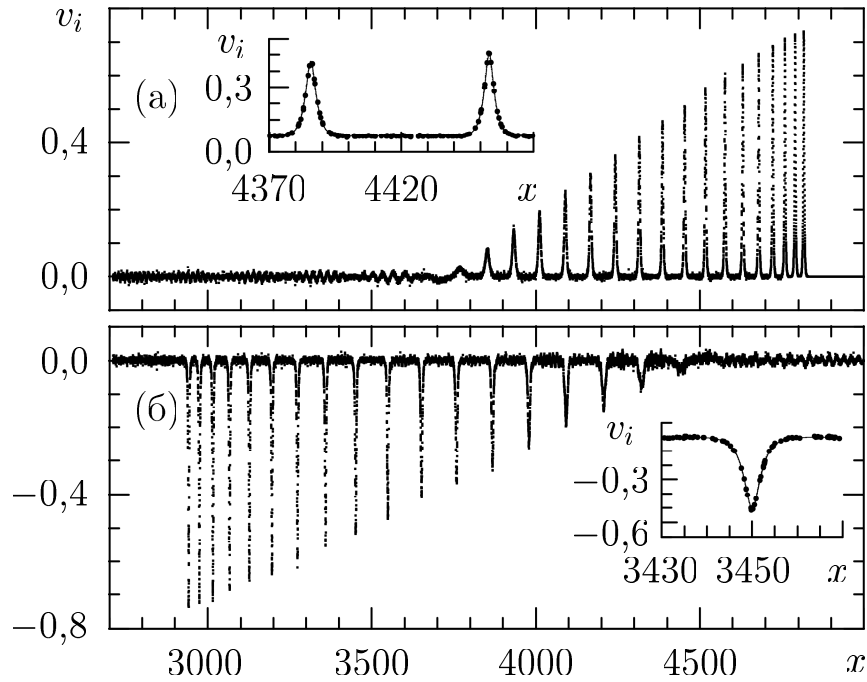


Рисунок 5.24. Фазовая плоскость ионов (x, v_i) : (а) $t = 3800$, на вставке фазовые плоскости импульсов 9 и 10 (точки) сравниваются с соответствующими солитонными решениями (сплошные кривые). (б) $t = 5600$, на вставке фазовые плоскости импульса 9 (точки) сравниваются с соответствующими солитонными решениями (сплошные кривые). $T_{i0} = 0$, $L = 50$

на рисунке 5.24 сравнение солитонных решений с результатами численного эксперимента показывает хорошее согласие двух решений. Отсюда видно, что правая половина распавшегося начального возмущения трансформируется в цепочку ионно-звуковых солитонов. Очевидно, что аналогичная трансформация происходит и с левой половиной возмущения в области $x < 0$.

Поздняя стадия процесса проиллюстрирована на рисунке 5.24(б). Здесь мы видим цепочку ионно-звуковых солитонов в момент времени $t = 5600$. Эти солитоны отражены от правой границы вычислительной области. Здесь граница действует как стенка, которая зеркально отражает ионы. Как и при $t = 3800$ (рисунок 5.24(а)), солитоны пространственно упорядочены по амплитуде, но распространяются в противоположном направлении. Сравнение ионной фазовой плоскости с солитонным решением дано для 9 - го солитона на вставке. Хорошее согласие подтверждает солитонный характер импульса. Видно, что со временем расстояние между соседними солитонами увеличива-

ется. Чем меньше амплитуда двух соседних солитонов, тем больше расстояние между ними. Как было показано в главе 2, ширина ионно-звукового солитона уменьшается при увеличении его амплитуды. Естественно, это соблюдается и для солитонов, представленных на рисунке 5.24.

Процесс отражения солитонов от стенки можно рассмотреть более подробно. На рисунке 5.25 мы видим не только общую картину, но и прохождение одного солитона через другой, движущийся в противоположном направлении. Например, при $t = 4300$ солитоны 3 и 5 проходят через солитоны 14 и 15, соответственно (рисунок 5.25(б)).

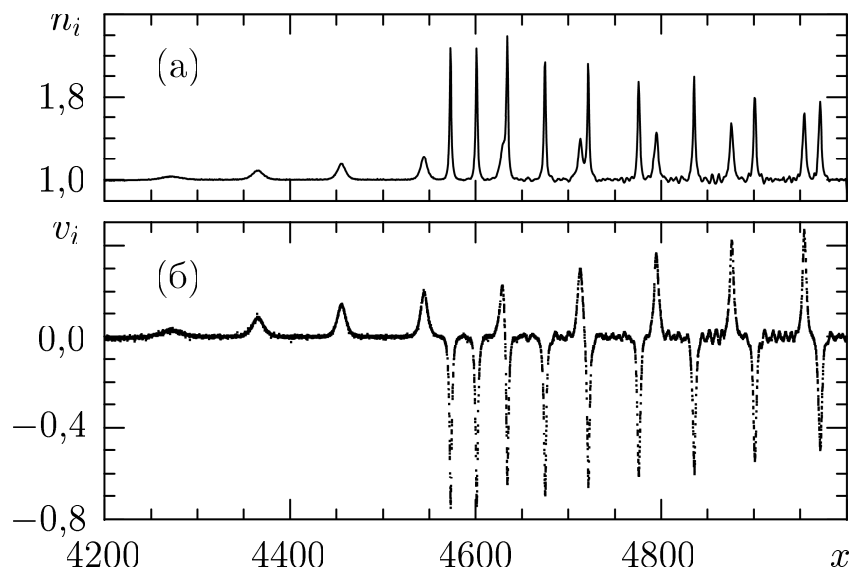


Рисунок 5.25. Отражение солитонов.(а): Ионная плотность как функция x . (б): Ионная фазовая плоскость (x, v_i) . $T_{i0} = 0$, $L = 50$, $t = 4300$

Наконец, рассмотрим структуру впереди идущего солитона с максимальной амплитудой потенциала. Рисунок 5.26 представляет пространственные распределения ионных и электронных плотностей и фазовую плоскость ионов, полученные в численном эксперименте при $t = 3800$. Здесь пространственная координата x' отложена от точки $x_m = 4816,25$; то есть $x' = x - x_m$. При $x = x_m$ потенциал имеет максимальное значение $\varphi_m = 0,645$. Те же распределения, рассчитанные для ионно-звукового солитона с той же самой амплитудой φ_m , также показаны на рисунке 5.26. Видно, что данные численного эксперимента полностью согласуются с солитонным решением. Отметим, что

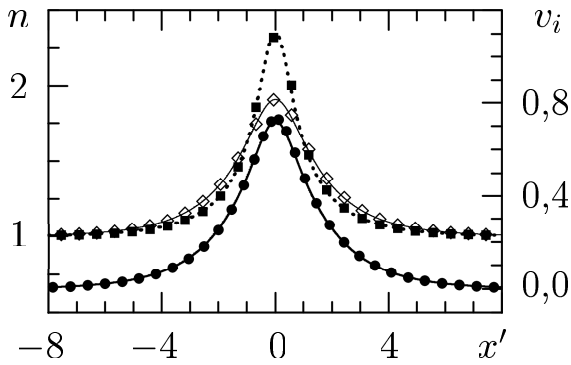


Рисунок 5.26. Зависимости для первого солитона (символы) и солитонные решения (кривые): $n_i(x')$ (квадраты и пунктирная кривая), $n_e(x')$ (ромбы и тонкая кривая) и $v_i(x')$ (кружки и толстая кривая, правая ось ординат)

имеет место соотношение $n_i = n_e$ в двух точках перегиба $\varphi(x')$: $x'_1 = -0,98$ и $x'_2 = 0,98$. Между этими точками n_i больше, чем n_e . Максимальная разность $n_i - n_e$ равна 0,453. Избыток электронов наблюдается при $x' < x'_1$ и при $x' > x'_2$. Вдали от центра солитона при $|x'| > 7$ плазма становится квазинейтральной $n_i = n_e$. Иными словами, здесь имеет место пространственное разделение зарядов, которое мы уже обсуждали в главе 2. Заметим, что к рассматриваемому моменту времени скорость распространения D впереди идущего солитона увеличивается от значения 1,193 на ранней стадии до 1,256.

Таким образом, в плазме с холодными ионами возмущение плотности может быть использовано как источник цепочки ионно-звуковых солитонов.

5.3.3 Влияние ионной температуры

Как было показано ранее в п.4.3, начальная температура ионов T_{i0} в значительной мере определяет характер течения при расширении плазмы в плазму. Именно с этого процесса начинается распад возмущения плотности плазмы. Поэтому рассмотренные в п.4.3 температурные эффекты проявляются и здесь. Прежде всего, с ростом температуры ионов затрудняется образование солитонных структур, поскольку при этом резко падают все критические значения величин, характеризующих стационарно движущуюся волну (рисунки 1.2 – 1.4). Поэтому решения, содержащие солитоноподобные структуры могут существовать только при достаточно малой ионной температуре. При высокой температуре ионов профиль течения будет гладким. Важно также то, что при увеличении T_{i0} существенную роль могут играть отражённые ионы.

Рассмотрим сначала случай небольшой ионной температуры: $T_{i0} = 0,01$. Рисунок 5.27 представляет пространственные распределения в тот момент времени, когда начальное уединённое возмущение уже распалось на два отдельных возмущения. Видно, что (правое здесь) возмущение эволюционирует почти так же, как и в случае $T_{i0} = 0$. Возникает хорошо определённая осцилляторная структура, занимающая конечную область пространства. Наряду с этим, появился новый элемент — отражённые от фронта БУВ ионы. Все отражённые ионы имеют примерно одну и ту же скорость 2,1. Потенциал в области, занятой отражёнными ионами, слегка повышен по сравнению с невозмущённым потенциалом $\varphi_0 = 0$.

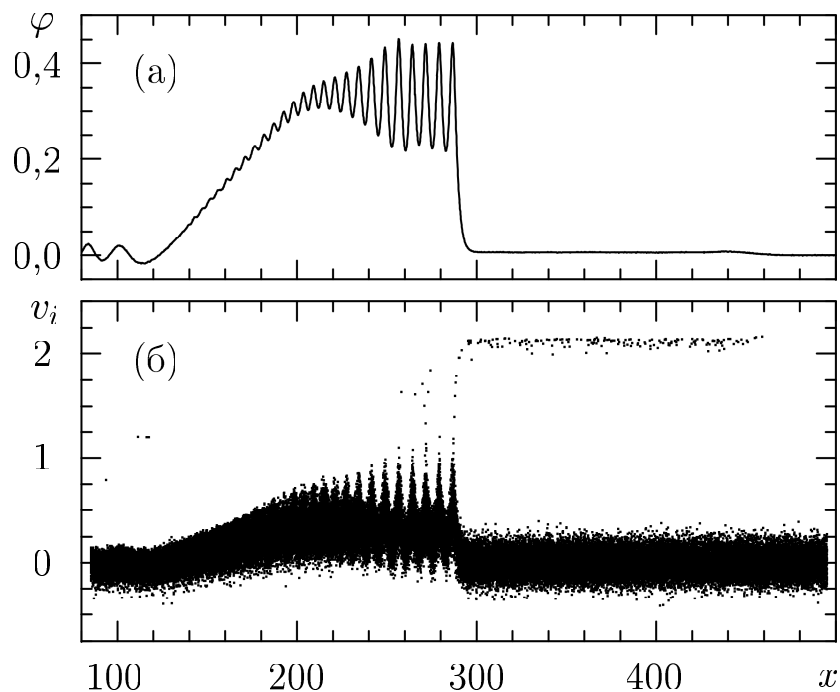


Рисунок 5.27. Пространственные распределения при $t = 200$ в случае $T_{i0} = 0,01$. (а): Потенциал $\varphi(x)$. (б): Фазовая плоскость ионов (x, v_i)

Последующее развитие процесса иллюстрирует рисунок 5.28. Здесь показано распределение потенциала как перед отражением БУВ от правой границы вычислительной области при $x = 5000$, так и после отражения. Несколько впереди идущих осцилляций отрываются от осцилляторной структуры и принимают вид отдельных солитонов. Отдельные солитоны наблюдаются и в конце осцилляторной структуры. Здесь расстояния между

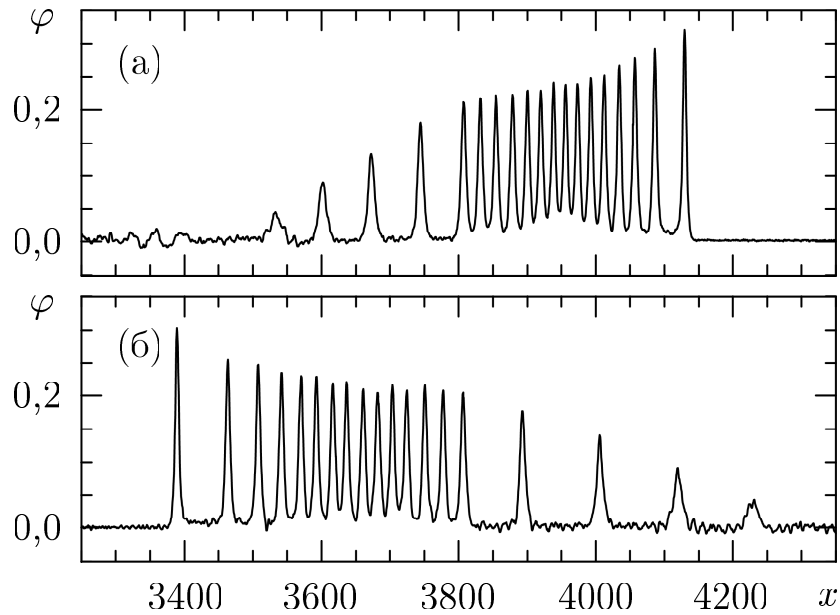


Рисунок 5.28. Пространственные распределения φ в случае $T_{i0} = 0,01$. (а): $t = 3500$, (б): $t = 5700$

двумя соседними солитонами достаточно большие. К моменту времени $t = 5700$ не все осцилляции превращаются в отдельные солитоны, как это было в случае $T_{i0} = 0$. Имеется ряд осцилляций, объединённых в общую структуру. Такая замедленная эволюция осцилляторной структуры происходит из-за того, что при $T_{i0} \neq 0$ амплитуда осцилляций ниже таковых в случае $T_{i0} = 0$.

На рисунках 5.29 и 5.30 показана эволюция возмущения в случае $T_{i0} = 0,1$. Волна разрежения, распространяющаяся вглубь возмущения на ранних временах ($t = 20$ и $t = 40$), платоподобная область и фронт движущийся в невозмущённую область волны могут быть идентифицированы примерно так же, как и в предыдущих случаях. Но, по существу, область плато превращается в область, где потенциал медленно падает с ростом $|x|$. Более того, нет никаких осцилляций (рисунок 5.29). При больших t амплитуда

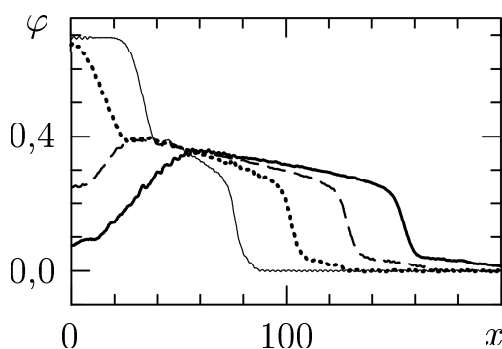


Рисунок 5.29. Пространственные распределения φ в случае $T_{i0} = 0,1$ при t , равных 20 (тонкая кривая), 40 (пунктирная кривая), 60 (штриховая кривая) и 80 (толстая кривая)

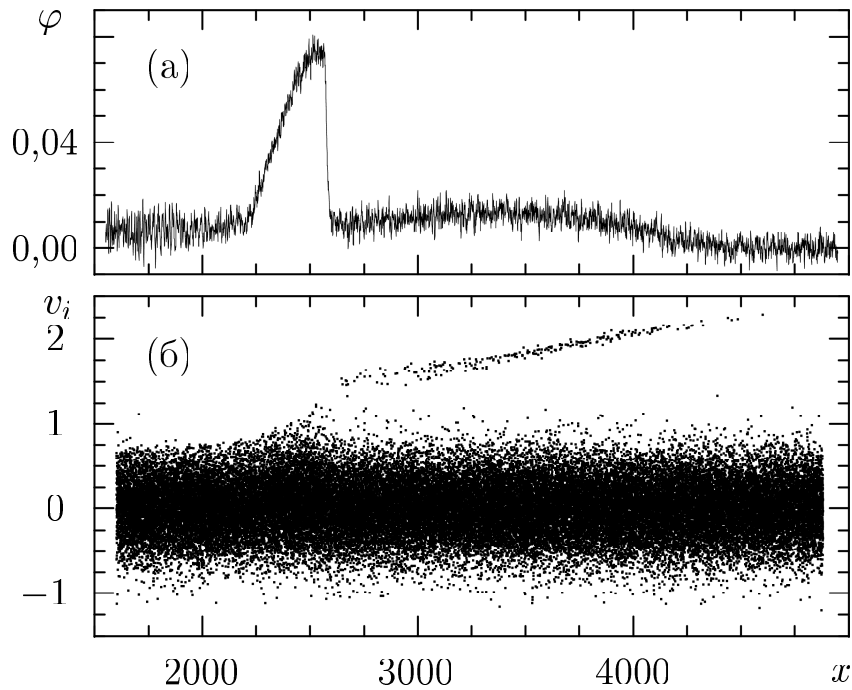


Рисунок 5.30. Пространственные распределения при $t = 2000$ в случае $T_{i0} = 0,1$. (а): Потенциал $\varphi(x)$. (б): Фазовая плоскость ионов (x, v_i)

потенциала имеет меньшие значения, чем наблюдаемые в случае $T_{i0} = 0,01$, а также образуется хорошо определённый поток ионов, отражённых от фронта возмущения (рисунок 5.30). За счёт отражённых ионов потенциал перед фронтом основного возмущения повышен. Сравнивая фазовые плоскости ионов на рисунках 5.30(б) и 5.27(б), можно видеть влияние величины T_{i0} на скорость отражённых ионов. При $T_{i0} = 0,1$ разброс скоростей отражённых ионов становится очевидным. Этот разброс увеличивается с ростом T_{i0} .

Наконец, случай равных температур ионов и электронов $T_{i0} = 1$ проиллюстрирован на рисунке 5.31. Как и в предыдущих случаях, со временем начальное возмущение трансформируется в два новых возмущения: левое в области $-\infty < x < 0$ и правое в области $0 < x < \infty$. Пространственные распределения гладкие, осцилляции отсутствуют. Здесь, за исключением волны разрежения, распространяющейся в начальное возмущение на ранней стадии, однозначно идентифицировать элементы течения нельзя. Со временем постепенно образуется минимум потенциала вблизи точки $x = 0$, а максимум потенциала появляется в середине каждого из двух новых возмущений. Максимумы потенциала и каждое новое возмущение, как целое,

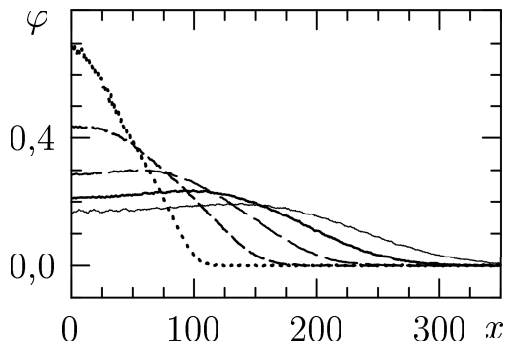


Рисунок 5.31. Пространственные распределения φ при $t = 20$ (пунктирная кривая), $t = 40$ (штриховая кривая), $t = 60$ (длинные штрихи), $t = 80$ (сплошная кривая), $t = 100$ (тонкая сплошная кривая) в случае $T_{i0} = 1$

распространяются от центра $x = 0$. Максимумы потенциала уменьшаются со временем, и происходит постепенный распад каждого возмущения.

Отметим, что в отличие от двух других задач, рассмотренных выше в этой главе, в задаче об эволюции возмущения плотности не было обнаружено областей квазинейтрального движения. Поэтому здесь не имеет места количественное подобие профилей течений с разными значениями размера возмущения L .

Глава 6

Разрывы в плазме с отрицательными ионами

До сих пор мы рассматривали течения двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и положительных ионов. Однако в природных условиях, в лабораторных установках и в технических устройствах плазма часто оказывается состоящей из электронов и нескольких сортов ионов, которые отличаются друг от друга значениями масс и зарядов ионов. Из огромного многообразия многокомпонентных плазм весьма важным для приложений является случай плазмы с отрицательными ионами, то есть трехкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов двух сортов. Ионы одного сорта заряжены положительно, другого — отрицательно.

Целью исследований данной главы является анализ возможных типов течения плазмы с отрицательными ионами, а также определение характера её движения при расширении в вакуум. Изучается расширение плазмы, занимающей полупространство, и описывается влияние состава плазмы и ионных температур на процесс. Значительное внимание уделено формированию и движению нелинейных структур, а также особенностям развития неустойчивости, возникающей при взаимодействии потоков положительных и отрицательных ионов. Кроме того, процесс расширения в вакуум рассматривается для случая, когда плазма в начальный момент сосредоточена в плоском слое (задача с двумя разрывами), и для случая плазмы с ничтожно малым количеством электронов, то есть ион-ионной плазмы. Изложение следует работам автора [206, 214, 217, 224, 226, 227].

6.1 Основные уравнения и типы движения

Мы рассматриваем плазму с отрицательными ионами в предположении, что она является бесстолкновительной. В её состав, кроме электронов и положительных ионов, входят отрицательные ионы. Движение такой трёхкомпонентной плазмы можно изучать либо с учётом электронного движения, либо в предположении, что безынерционные электроны находятся в равновесии с электрическим полем, а их плотность определяется формулой Больцмана. В первом случае исходная система уравнений Власова имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \mu_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial f_j}{\partial t} + v \frac{\partial f_j}{\partial x} - \mu_j \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial f_e}{\partial t} + v \frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_e}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -(Z_i n_i + Z_j n_j - n_e).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Во втором случае кинетическое уравнение для электронов опускается, исходная система уравнений выглядит как

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial f_j}{\partial t} + v \frac{\partial f_j}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -(Z_i n_i + Z_j n_j - n_{e0} \exp \varphi),
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

где

$$\mu_i = \frac{Z_i m_e}{m_i}, \quad \mu_j = \frac{Z_j m_e}{m_j}, \quad \mu = \frac{\mu_j}{\mu_i} = \frac{Z_j m_i}{Z_i m_j}. \tag{6.3}$$

Здесь и в последующем изложении используются принятые в предыдущих главах обозначения для физических величин, а новым является индекс j , идентифицирующий величины, относящиеся к отрицательным ионам. Заметим что система уравнений (6.2) уже рассматривалась в п. 1.5 (см. (1.72)).

Нам понадобится также система уравнений в приближении трёх моментов для трёхкомпонентной плазмы. Она может быть записана следующим об-

разом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x} (n_i T_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial n_j}{\partial t} + V_j \frac{\partial n_j}{\partial x} + n_j \frac{\partial V_j}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial V_j}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_j}{\partial x} + \frac{1}{n_j} \frac{\partial}{\partial x} (n_j T_j) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
T_i = T_{i0} (n_i/n_{i0})^2, \quad T_j = T_{j0} (n_j/n_{j0})^2, \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(Z_i n_i + Z_j n_j - n_e), \quad n_e = n_{e0} \exp \varphi.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

В представленных уравнениях и везде ниже все величины нормированы на единицы (1.6), в которых за единицу плотности n_* принята плотность положительных ионов в невозмущённой области n_{i0} . Это удобно, поскольку $n_{i0} > n_{e0}$ и $n_{i0} > n_{j0}$ (n_{j0} — плотность отрицательных ионов в невозмущённой области). При записи уравнений (6.1) использовалась электронная нормировка: за единицу массы m_* принять массу электрона $m_* = m_e$, а единица зарядового числа $Z_* = 1$. Уравнения (6.2) и (6.4) нормированы на единицы, определяемые массой и зарядовым числом положительных ионов $m_* = m_i$ и $Z_* = Z_i$ (ионная нормировка). Индекс 0, как и ранее, обозначает величину в невозмущённой области, где электростатический потенциал φ предполагается равным нулю.

Легко видеть, что движение плазмы, описываемое приведенными системами уравнений, будет зависеть от параметров μ_i и μ_j (в случае системы (6.1)), либо от одного параметра μ (в случае системы (6.2) или (6.4)). Эти параметры определяются ионным составом, то есть массами и зарядами обоих сортов ионов. Если выполняется соотношение $Z_i = -Z_j = 1$, то характеристикой ионного состава может служить относительная масса отрицательного иона m_j/m_i . В этой главе мы представляем данные расчетов, а также все величины и уравнения в ионной нормировке с $m_* = m_i$. Поэтому под m_j далее следует понимать относительную массу отрицательного иона.

В таблице 5.1 приведены ионные составы плазмы, с которыми чаще всего проводятся экспериментальные исследования. Вариант A^+ и A^- представляет

те случаи, когда как положительные, так и отрицательные ионы плазмы имеют одинаковые по величине заряды и образованы из одних и тех же атомов А.

Таблица 5.1. Ионные составы плазмы с отрицательными ионами

Состав	μ	m_j	Состав	μ	m_j
Cs ⁺ и Cl ⁻	-3,748	0,267	Ar ⁺ и SF ₆ ⁻	-0,273	3,657
Ar ⁺ и F ⁻	-2,102	0,476	K ⁺ и SF ₆ ⁻	-0,268	3,736
A ⁺ и A ⁻	-1,000	1,000	O ⁺ и SF ₅ ⁻	-0,126	7,942
Cs ⁺ и SF ₆ ⁻	-0,910	1,099	O ⁺ и SF ₆ ⁻	-0,109	9,129
Ar ⁺ и SF ₅ ⁻	-0,314	3,181	K ⁺ и C ₆₀ ⁻	-0,0542	18,431

Вторым важным параметром является величина n_{j0} , характеризующая количественный состав плазмы. Она может принимать любые значения от 0 до 1. В последнем случае мы имеем дело с ион-ионной плазмой.

Рассмотрим возможные типы движений, следуя [238], на частном, но важном примере — стационарном движении разрыва, который представляет собой переход от одного течения с постоянными параметрами к другому течению с другими постоянными параметрами, и при этом в каждом течении выполняется условие квазинейтральности. Записывая систему уравнений (6.4) в виде законов сохранения для стационарного движения со скоростью D , получим систему уравнений, связывающую значения величин на одной стороне 1 разрыва со значениями тех же величин на второй стороне 2:

$$\begin{aligned}
 n_{i1}(D - V_{i1}) &= n_{i2}(D - V_{i2}), \\
 \frac{1}{2}(D - V_{i1})^2 + \varphi_1 + \frac{3}{2}T_{i0}\frac{n_{i1}^2}{n_{i0}^2} &= \frac{1}{2}(D - V_{i2})^2 + \varphi_2 + \frac{3}{2}T_{i0}\frac{n_{i2}^2}{n_{i0}^2}, \\
 n_{j1}(D - V_{j1}) &= n_{j2}(D - V_{j2}), \\
 \frac{1}{2}(D - V_{j1})^2 + \mu\varphi_1 + \frac{3}{2}\frac{m_i}{m_j}T_{j0}\frac{n_{j1}^2}{n_{j0}^2} &= \frac{1}{2}(D - V_{j2})^2 + \mu\varphi_2 + \frac{3}{2}\frac{m_i}{m_j}T_{j0}\frac{n_{j2}^2}{n_{j0}^2}, \\
 Z_i n_{i1} + Z_j n_{j1} &= n_{e0} \exp \varphi_1, \quad Z_i n_{i2} + Z_j n_{j2} = n_{e0} \exp \varphi_2.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Предположим, что в области 2 все параметры известны. Тогда система уравнений (6.5) содержит пять уравнений с шестью неизвестными n_{i1} , n_{j1} , V_{i1} , V_{j1} , φ_1 и D . Если задать, например, значение величины D , то из (6.5) можно найти все остальные величины.

Как и в случае двухкомпонентной плазмы (см. п. 4.2.1, (4.3)), все параметры стационарного течения в области 1 могут быть представлены в виде функций от скачка перенормированного потенциала:

$$\Psi = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_2)}{(D - V_{i2})^2}.$$

Эти функции в случае плазмы с холодными положительными ($T_{i0} = 0$) и отрицательными ($T_{j0} = 0$) ионами, как нетрудно установить из (6.5), имеют вид:

$$\begin{aligned} n_{i1}/n_{i2} &= (1 - \Psi)^{-1/2}, \\ n_{j1}/n_{j2} &= (1 - \mu_D \Psi)^{-1/2}, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \ln \left\{ (1 + \rho)^{-1} \left[(1 - \Psi)^{-1/2} + \rho(1 - \mu_D \Psi)^{-1/2} \right] \right\}, \\ V_{i1} - V_{i2} &= \pm \left(1 - \sqrt{1 - \Psi} \right) \sqrt{2(\varphi_1 - \varphi_2)/\Psi}, \\ V_{j1} - V_{j2} &= \pm \sqrt{\mu/\mu_D} \left(1 - \sqrt{1 - \mu_D \Psi} \right) \sqrt{2(\varphi_1 - \varphi_2)/\Psi}, \\ D - V_{i2} &= \pm \sqrt{2(\varphi_1 - \varphi_2)/\Psi}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где введены обозначения

$$\rho = \frac{Z_j n_{j2}}{Z_i n_{i2}}, \quad \mu_D = \mu \left(\frac{D - V_{i2}}{D - V_{j2}} \right)^2. \quad (6.7)$$

Верхний знак в трёх последних уравнениях (6.6) соответствует движению разрыва по области 2 в положительном направлении, а нижний знак — в отрицательном. При заданных параметрах в области 2 и заданном D величина μ_D представляет собой просто отрицательное число. В важном частном случае, когда в области 2 отсутствует потоковое движение ионов одного сорта относительно ионов другого сорта $V_{i2} = V_{j2}$, величина μ_D зависит только от ионного состава и равна μ . В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот последний случай.

Формулы (6.6) существенно упрощаются для слабых волн $\Psi \ll 1$. Разложим правые части этих формул по степеням Ψ , предполагая, что волна движется по невозмущённой области 0 с нулевым потенциалом. При этом индекс 2 заменим на индекс 0 и будем считать, что $\mu_D = \mu$, $n_{i2} = n_{i0} = 1$, $\varphi_2 = \varphi_0 = 0$. С точностью до членов второго порядка по Ψ получим следующие

ЗАВИСИМОСТИ:

$$\begin{aligned}
 n_{i1} &= 1 + \frac{1}{2} \Psi + \frac{3}{8} \Psi^2, \\
 n_{j1} &= n_{j0} \left(1 + \frac{1}{2} \mu \Psi + \frac{3}{8} \mu^2 \Psi^2 \right), \\
 \varphi_1 &= \frac{1}{2} c_0^2 \Psi (1 + 2\sigma \Psi), \\
 V_{i1} - V_{i0} &= \pm \frac{1}{2} c_0 \Psi \left[1 + \left(\sigma + \frac{1}{4} \right) \Psi \right], \\
 V_{j1} - V_{j0} &= \pm \frac{1}{2} c_0 \mu \Psi \left[1 + \left(\sigma + \frac{\mu}{4} \right) \Psi \right], \\
 D - V_{i0} &= \pm c_0 (1 + \sigma \Psi + \varsigma \Psi^2),
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{8} \left(3 \frac{1 + \mu^2 \rho}{1 + \mu \rho} - c_0^2 \right), \quad \varsigma = \frac{1}{48} \left(2c_0^4 - 9 \frac{1 + \mu^2 \rho}{1 + \mu \rho} c_0^2 + 15 \frac{1 + \mu^3 \rho}{1 + \mu \rho} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2,$$

а величина

$$c_0 = \left(\frac{1 + \mu \rho}{1 + \rho} \right)^{1/2} \tag{6.9}$$

представляет собой скорость звука в невозмущённой области в плазме с отрицательными ионами.

Различая в общем случае волны сжатия и волны разрежения по знаку скачка потенциала: $\Psi > 0$ и $\Psi < 0$, соответственно, легко установить, в каком направлении по отношению к невозмущённой области происходят изменения плотностей и скоростей ионов в волнах сжатия и в волнах разрежения. Соответствующие неравенства для случая волны, движущейся в отрицательном направлении, приведены в таблице 5.2. Для волны, движущейся в положительном направлении, знаки для изменения скоростей меняются на противоположные.

Таблица 5.2. Изменения величин в волнах сжатия и разрежения при $D < 0$

Волна сжатия $\Psi > 0$	$n_{i1} > n_{i0}$ $n_{j1} < n_{j0}$	$V_{i1} - V_{i0} < 0$ $V_{j1} - V_{j0} > 0$
Волна разрежения $\Psi < 0$	$n_{i1} < n_{i0}$ $n_{j1} > n_{j0}$	$V_{i1} - V_{i0} > 0$ $V_{j1} - V_{j0} < 0$

Из формул (6.8) видно, что разные квадранты в плоскости переменных (Ψ, σ) соответствуют разным типам движения. Они все представлены на рисунке 6.1. Линия $\Psi = 0$ отделяет волны сжатия ($\Psi > 0, n_{i1} > 1$) от волн разрежения ($\Psi < 0, n_{i1} < 1$), а линия $\sigma = 0$ представляет границу между сверхзвуковым течением ($|D - V_{i0}| > c_0$) и дозвуковым ($|D - V_{i0}| < c_0$). Записывая уравнение этой границы через параметры μ и ρ , можно установить, что, например, сверхзвуковая (ударная) волна разрежения ($\Psi < 0, \sigma < 0$) существует при определённом выборе параметров плазмы:

$$\rho_2 < \rho < \rho_1,$$

где

$$\rho_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \mu^{-2}}, \quad \zeta = \frac{3\mu^2 - 2\mu + 3}{4\mu^2}.$$

В случае $Z_j = -Z_i = -1$ эти соотношения могут быть записаны в виде:

$$n_{j0} > n_{jcr} = \frac{3 + 2m_j + 3m_j^2}{4} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{16m_j^2}{(3 + 2m_j + 3m_j^2)^2}} \right]. \quad (6.10)$$

Здесь не указан верхний предел для n_{j0} , поскольку он превосходит максимально допустимое значение $n_{j0} = 1$.

Критическая плотность отрицательных ионов n_{jcr} соответствует линии $\sigma = 0$. Поэтому (6.10) не только представляет область существования ударной волны разрежения, но и определяет границу между сверхзвуковыми волнами сжатия и разрежения. В частности, волны могут иметь вид солитонов. Из нашего рассмотрения следует, что солитоны разрежения могут образовываться



Рисунок 6.1. Типы движений в разных областях плоскости переменных (Ψ, σ)

при $n_{j0} > n_{jcr}$, а солитоны сжатия — при $n_{j0} < n_{jcr}$. Такой же результат и такое же выражение для критического значения невозмущённой плотности отрицательных ионов n_{jcr} , определяющего границу между областями существования солитонов сжатия и солитонов разрежения, были получены при исследовании солитонов в плазме с отрицательными ионами [180].

6.2 Расширение в вакуум плазмы с холодными ионами

Рассмотрим задачу о расширении бесстолкновительной плазмы с отрицательными ионами в вакуум. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ плазма имеет однородное распределение с плотностями n_{e0} , n_{i0} и n_{j0} , соответственно, электронов, положительных и отрицательных ионов и расположена в левом полупространстве $-\infty < x \leq 0$, где электростатический потенциал равен нулю $\varphi_0 = 0$ и выполняется условие квазинейтральности

$$Z_i n_{i0} + Z_j n_{j0} = n_{e0}.$$

Начальные температуры положительных и отрицательных ионов, T_{i0} и T_{j0} , будем считать весьма малыми по сравнению с начальной температурой электронов T_{e0} и здесь просто полагать их равными нулю. Правое полупространство $0 < x < \infty$ представляет собой вакуумную область. Задача состоит в исследовании эволюции начального состояния во времени.

6.2.1 Аналитическая модель течения

Процесс расширения плазмы в вакуум может быть описан в кинетическом приближении системами уравнений (6.1) или (6.2). Для их решения приходится применять численные методы. Здесь мы будем использовать численное моделирование по методу частиц в ячейке и анализировать точные численные решения. Наряду с этим, представляется полезным и более простое рассмотрение, позволяющее оценить основные параметры течения. Оно оказалось возможным благодаря тому, что всё течение можно приближённо представить в виде последовательности таких элементов как разрывы, плато и волна раз-

режения. Из численных решений было установлено, что профили плотности и скорости обоих сортов ионов состоят из четырёх различных областей. Представление об этих областях даёт рисунок 6.2. В трёх из рассматриваемых областей значения параметров оказываются постоянными (область 0) либо почти постоянными (области 1 и 2), а в четвёртой области движется волна разрежения. Возмущение, распространяющееся в область 0, может рассматриваться как волна, движущаяся с постоянной скоростью. Обозначим скорость волны буквой D . Область 1 занята осцилляторной структурой, где все величины осциллируют около некоторых практически не меняющихся средних значений, что позволяет рассматривать эту область в первом приближении как плато. К платоподобным близки и распределения плотности и скорости положительных

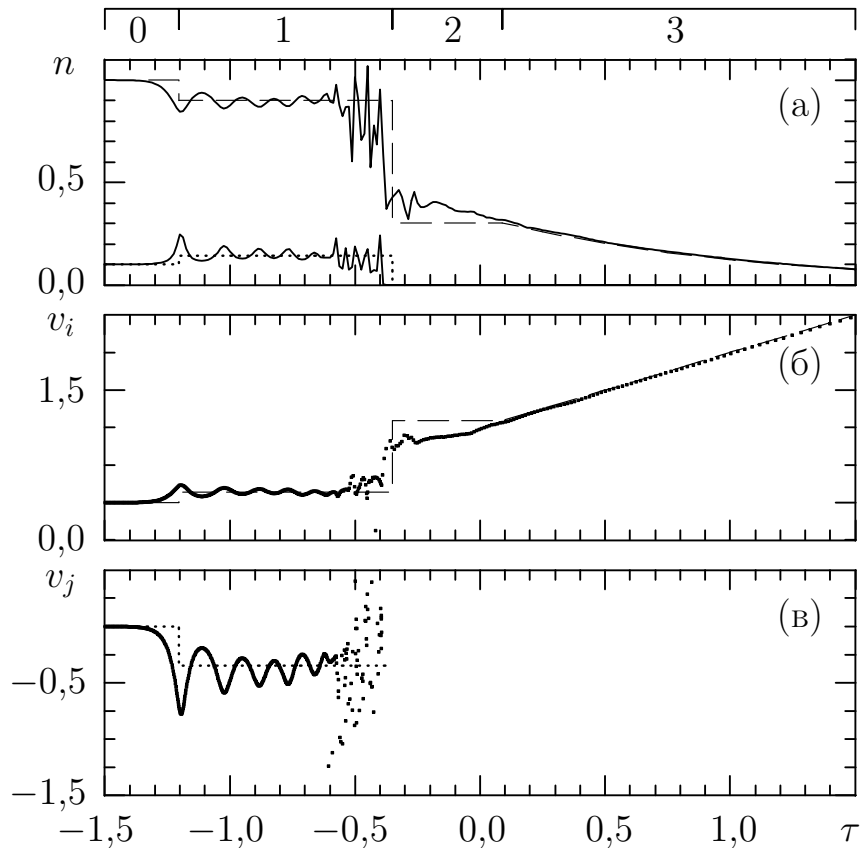


Рисунок 6.2. (а): плотности ионов n_i и n_j (соответственно верхняя и нижняя сплошные кривые) как функции от τ ; (б): фазовая плоскость положительных ионов (τ, v_i) ; (в): фазовая плоскость отрицательных ионов (τ, v_j) . Решения уравнений (6.11)–(6.15) даны штриховыми кривыми для положительных ионов и пунктирными кривыми — для отрицательных. Разные области течения обозначены вверху цифрами. $Z_j = -Z_i = -1$, $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$, $t = 80$

ионов в области 2. Здесь нет отрицательных ионов. Граница между областями 1 и 2 достаточно резкая и движется в сторону области 1 с некоторой скоростью D_s . Область 3 занята двухкомпонентной плазмой, состоящей из положительных ионов и электронов. Она представляет собой обычную волну разрежения. Ниже мы будем использовать цифровые индексы 0, 1, 2 и 3 для обозначения величин в соответствующих областях.

Движущаяся в область 0 волна представляет собой переход от невозмущённой области 0 к области 1 с примерно постоянными параметрами. Воспользуемся уравнениями (6.5) и запишем соотношения между величинами в областях 0 и 1. Учитывая, что $T_{i0} = T_{j0} = 0$, $n_{i0} = 1$ и $\varphi_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} (D - V_{i0}) &= n_{i1}(D - V_{i1}), \\ \frac{1}{2}(D - V_{i0})^2 &= \frac{1}{2}(D - V_{i1})^2 + \varphi_1, \\ n_{j0}(D - V_{j0}) &= n_{j1}(D - V_{j1}), \\ \frac{1}{2}(D - V_{j0})^2 &= \frac{1}{2}(D - V_{j1})^2 + \mu\varphi_1, \\ Z_i n_{i1} + Z_j n_{j1} &= n_{e0} \exp \varphi_1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Знание параметров в одной из областей, в невозмущённой области 0, недостаточно для определения всех величин в области 1, поскольку нам неизвестно D , и система уравнений (6.11) остаётся не замкнутой. Поэтому систему надо дополнить соотношениями между величинами в областях 1 и 2. Используя тот же подход и учитывая, что $n_{j2} = 0$, получим:

$$\begin{aligned} n_{i1}(D_s - V_{i1}) &= n_{i2}(D_s - V_{i2}), \\ \frac{1}{2}(D_s - V_{i1})^2 + \varphi_1 &= \frac{1}{2}(D_s - V_{i2})^2 + \varphi_2, \\ Z_i n_{i2} &= n_{e0} \exp \varphi_2, \\ D_s &= V_{j1}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Замыкает систему уравнений (6.11) и (6.12) соотношение

$$V_{i2} = -\varphi_2. \tag{6.13}$$

Оно следует из условия непрерывности скорости положительных ионов и потенциала на границе τ_r между областями 2 и 3 и равенства $V_{i3} = -\varphi_3$

в волне разрежения в области 3. Сама волна разрежения вполне идентична волне разрежения, возникающей при расширении двухкомпонентной плазмы, и может быть при $\tau > \tau_r$ записана в виде

$$\begin{aligned} n_{i3} &= (1 + \rho) \exp(-\tau - 1), \\ V_{i3} &= \tau + 1, \\ \varphi_3 &= -\tau - 1, \end{aligned} \tag{6.14}$$

где в качестве начальной невозмущённой плотности принята величина $1 + \rho$. Последняя представляет собой плотность положительных ионов, значение которой уменьшается за счёт экранировки отрицательными ионами. Величина ρ , введённая по формуле (6.7), определяется для области 0 как

$$\rho = \frac{Z_j n_{j0}}{Z_i n_{i0}}.$$

Решение замкнутой системы уравнений (6.11)–(6.13) даёт все параметры плазмы в областях 1 и 2, а формулы (6.14) — в области 3. Очевидно, что

$$\tau_r = V_{i2} - 1. \tag{6.15}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении мы можем найти решение задачи во всех областях и определить общую структуру течения.

Представляет интерес профиль фронта волны, движущейся в невозмущённую плазму. При стационарном сверхзвуковом течении этот профиль сохраняется во времени и может быть рассчитан. Очевидно, что на фронте волны, где происходит достаточно резкое изменение потенциала, квазинейтральность не соблюдается, и поведение потенциала описывается уравнением Пуассона. Запишем это уравнение для стационарного движения, используя переменную $z = x - Dt$ и перенормированный потенциал $\psi = 2\varphi/(D - V_{i0})^2$. По аналогии с записью уравнения (1.57), представим плотности положительных и отрицательных ионов на фронте волны в виде функций $n_i(\psi)$ и $n_j(\psi)$. Легко видеть, что эти функции имеют тот же вид, что и зависимости n_{i1} и n_{j1} от Ψ в (6.6), которые получены из законов сохранения (6.5) и справедливы не только для области 1, но и на фронте волны. (Заметим, что остальные формулы (6.6) связывают величины только в таких точках пространства, где непременно выполняется условие квазинейтральности.) Производя в формулах (6.6) для n_{i1}

и n_{j1} соответствующие переобозначения и подставляя полученные выражения для плотностей ионов в уравнение Пуассона в (6.4), получим:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{Z_i}{\kappa} \left[(1 + \rho) \exp(\kappa\psi) - (1 - \psi)^{-1/2} - \rho(1 - \mu\psi)^{-1/2} \right]. \quad (6.16)$$

Здесь, как и при рассмотрении двухкомпонентной плазмы, мы вводим обозначение $\kappa = (D - V_{i0})^2/2$.

Проведём преобразование уравнения (6.16), аналогичное преобразованиям, выполненным над уравнением (1.57). Учтём при этом, что в невозмущённой области $d\psi/dz = 0$. В результате получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 = \bar{\mathcal{K}}(\psi), \quad (6.17)$$

где

$$\bar{\mathcal{K}}(\psi) = \frac{Z_i}{\kappa^2} \left\{ (1 + \rho) [\exp(\kappa\psi) - 1] - 2\kappa \left[1 - \sqrt{1 - \psi} + \frac{\rho}{\mu} (1 - \sqrt{1 - \mu\psi}) \right] \right\}.$$

Отметим, что поскольку здесь плотность нормируется на n_{i0} , а не на n_{e0} , как в п. 1.3, то при переходе к двухкомпонентной плазме $\rho = 0$ выражение для $\bar{\mathcal{K}}(\psi)$ не будет полностью совпадать с выражением для $\mathcal{K}(\psi)$ в (1.58).

Для решения уравнения (6.17) можно применить приём, предложенный в п. 1.4.2, и получить неявную зависимость ψ от z вида (1.61) на фронте волны.

Таким образом, мы получили ряд важных соотношений, в совокупности представляющих некоторую упрощённую аналитическую модель течения и позволяющих приближённо оценить основные параметры течения и определить профиль фронта волны.

6.2.2 Основные свойства течений

Рассмотрим результаты численного моделирования расширения плазмы с отрицательными ионами в вакуум. Процесс моделировался с помощью метода частиц в ячейке, исходными уравнениями для которого являются уравнения (6.2) в кинетическом приближении [224]. Частицами моделировалось движение как положительных, так и отрицательных ионов, а электроны предполагались распределёнными по закону Больцмана. Здесь и везде ниже полагается, что

$Z_j = -Z_i = -1$, то есть $\mu = m_j^{-1}$, $\rho = -n_{j0}$. Поэтому ионный состав в дальнейшем будем идентифицировать только значениями m_j и n_{j0} , опуская значения μ и ρ . Обсуждаемые здесь результаты иллюстрируют процесс на примере плазмы, состоящей из ионов Ar^+ и F^- ($m_j = 0,476$), и/или плазмы, состоящей из ионов Ar^+ и SF_6^- ($m_j = 3,657$).

Возвращаясь к обсуждавшемуся выше рисунку 6.2, отметим, что на этом рисунке, наряду с данными численного моделирования, показаны решения уравнений (6.11)–(6.15), приближённо описывающие течение. В области 1 эти решения близки к усреднённым значениям, полученным в численном эксперименте. Реально же здесь развивается осцилляторная структура такая же, как и образующаяся за фронтом БУВ в двухкомпонентной плазме (рисунок 4.1).

Определяющим фактором для волны является её число Маха. Для представленного на рисунке 6.2 случая, скорость звука $c_0 \simeq 1,16$, а скорость движения волны, определённая в численном эксперименте, составляет $|D| \simeq 1,23$, то есть число Маха $\mathcal{M} = |D|/c_0 > 1$, волна движется со сверхзвуковой скоростью, и поэтому сохраняет форму своего фронта. Волна представляет собой комбинацию волны сжатия для отрицательных ионов и волны разрежения для положительных ионов. Осцилляции плотности и скорости положительных ионов находятся в противофазе с соответствующими осцилляциями плотности и скорости отрицательных ионов. В области 1 имеет место встречное движение потоков положительных и отрицательных ионов.

При некотором τ ламинарная осцилляторная структура начинает трансформироваться в область, заполненную коротковолновыми пульсациями плотностей и скоростей ионов обоих сортов. На фазовой плоскости наблюдаются группы отрицательных ионов, захваченных положительными ионами, а также группы положительных ионов, захваченных отрицательными ионами. Захваченные частицы меняют знаки скоростей. В результате, ионы обоих знаков приобретают широкий разброс скоростей. Отметим, что на начальной стадии течения существует только ламинарная структура, заполняющая всю область 1, и лишь по истечении некоторого времени ($t > 20$) вблизи границы между областями 1 и 2 начинают нарастать коротковолновые пульсации, область существования которых постепенно увеличивается.

В области 2, за исключением очень малого числа захваченных частиц, отрицательных ионов нет. А положительные ионы при переходе из области 1 в область 2 весьма резко увеличивают свои скорости. Это ведёт к тому, что их плотность так же быстро падает на границе между областями 1 и 2. Область 2 почти платоподобна, и в неё переносятся пульсации из области неустойчивости. Наличие пульсаций никак не учитывается в нашей аналитической модели. Поэтому в области 2 отклонение данных численного эксперимента от решений уравнений (6.11)–(6.15) оказывается более заметным, чем в других областях.

Граница между областями 1 и 2 в предложенной аналитической модели трактуется как разрыв. Предпосылкой к его образованию служит наличие двух сортов отрицательных частиц: быстрых электронов и медленных отрицательных ионов. Ситуация в некоторой степени подобна той, которая возникает при расширении в вакуум плазмы, в состав которой, кроме ионов, входят две электронные компоненты с разными температурами. Такой процесс сопровождается образованием разрывоподобных структур, если отношение температуры более нагретой компоненты электронов к температуре холодной электронной компоненты достаточно велико [69–71]. В нашем случае электроны могут рассматриваться как нагретая до температуры T_{e0} компонента, а отрицательные ионы выполняют роль «сверххолодных» электронов.

За относительно небольшой по размеру областью 2 находится область обычной волны разрежения 3. Результаты численного моделирования в области 3 хорошо подтверждают зависимости (6.14). Отметим, наконец, что на фазовой плоскости видно ускорение положительных ионов электрическим полем волны разрежения (рисунок 6.2).

6.2.3 Влияние плотности отрицательных ионов на течение

В аналитической модели осцилляции на плато 1 не рассматриваются. Модель даёт только средние значения величин в каждой платоподобной области. Кроме того, по значению корня уравнения $\bar{\mathcal{K}}(\psi_m) = 0$ можно определить первые экстремальные значения величин. Интересно сравнить эти оценки с данными численных экспериментов. На рисунке 6.3 представлены диапазоны

величин между первыми максимальными и первыми минимальными значениями в осцилляторной структуре, полученные в численных экспериментах. Видно, что оценки средних величин, следующие из аналитической модели, находятся в указанных диапазонах и смещены ближе к минимуму, если значение рассматриваемой величины на фронте волны увеличивается по отношению к невозмущённому значению, или к максимуму — в обратном случае. Это согласуется с профилем осцилляторной структуры (рисунок 6.2). Отметим, что оценки первого экстремального значения, полученные в аналитической модели, с хорошей точностью совпадают с данными численных экспериментов.

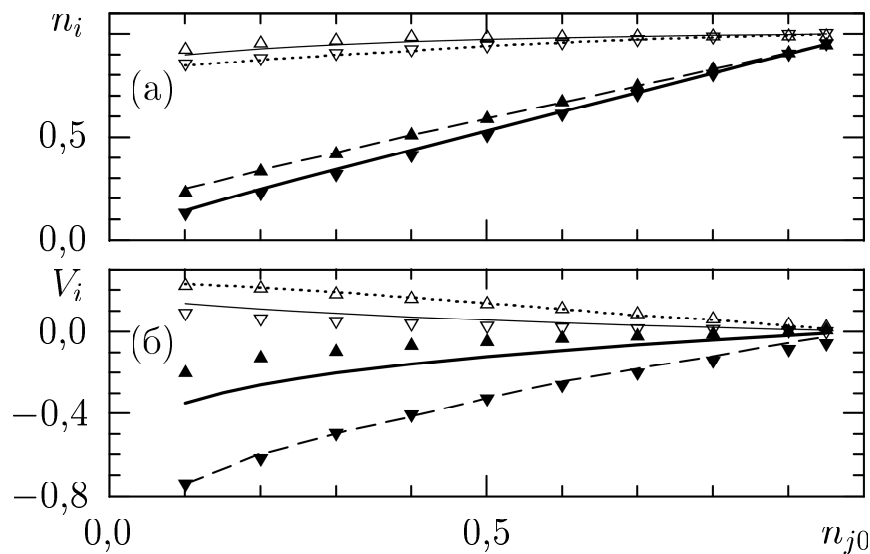


Рисунок 6.3. Первые максимальные (Δ , \blacktriangle) и первые минимальные (∇ , \blacktriangledown) значения ионных плотностей (а) и потоковых скоростей (б) в области 1 как функции от n_{j0} при $m_j = 0,476$. Светлые символы относятся к положительным ионам, темные — к отрицательным. Аналитические решения: средние значения — тонкая и толстая сплошные кривые, первые экстремальные значения — пунктирные и штриховые кривые, соответственно, для положительных и отрицательных ионов

О характере движения волны в невозмущённую область можно судить по величине числа Маха $\mathcal{M} = |D|/c_0$. Последнее существенно зависит не только от m_j , но и от n_{j0} (рисунок 6.4). В частности, при одном и том же значении m_j в зависимости от n_{j0} движение может быть либо дозвуковым,

либо сверхзвуковым. Кроме того, как видно из данных для случая $m_j = 0,476$, эта зависимость может быть немонотонной в области сверхзвукового движения. Отклонение оценок числа Маха по аналитической модели от данных численных экспериментов на рисунке 6.4 имеет ту же причину, что и аналогичное отклонение, наблюдаемое в БУВ в двухкомпонентной плазме (п. 4.2.2). Аналитическая модель представляет фронт волны в виде разрыва, а на самом деле фронт волны образуется первым солитоном, и это различие форм фронта волны приводит к различию двух решений для $D(n_{j0})$. В этой особенности полученных решений проявляется общность двух аналитических моделей, модели двухкомпонентной плазмы и модели плазмы с отрицательными ионами.

Переход из дозвуковой области в сверхзвуковую происходит при некотором критическом значении плотности отрицательных ионов в невозмущённой области $n_{j0} = n_{jcr}$. На рисунке 6.5 представлена зависимость n_{jcr} от относительной массы отрицательных ионов m_j , полученная из решения системы уравнений (6.11)–(6.13) и данных численных экспериментов для течений, при

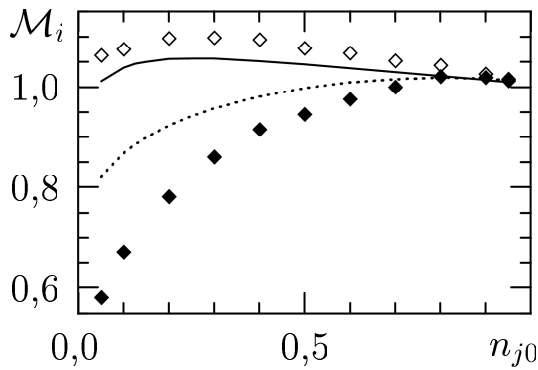


Рисунок 6.4. Число Маха \mathcal{M} первого экстремума как функция от n_{j0} . Решения уравнений (6.11)–(6.13) показаны кривыми, данные численных экспериментов — символами. Сплошная кривая и светлые ромбы соответствуют случаю $m_j = 0,476$, пунктирная кривая и тёмные ромбы — случаю $m_j = 3,657$

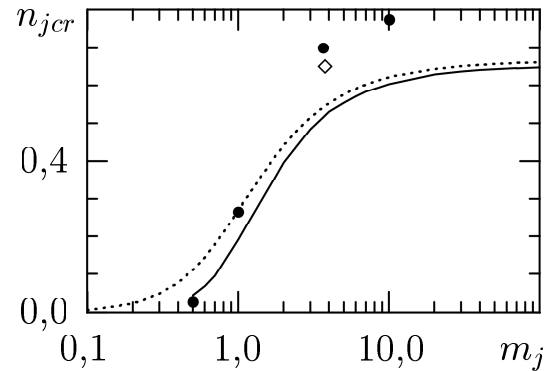


Рисунок 6.5. Критическая плотность n_{jcr} в зависимости от m_j . Решения уравнений (6.11)–(6.13) представлены сплошной кривой, формула (6.10) — пунктирной кривой. Кружки соответствуют $\mathcal{M} = 1$ в численных экспериментах. Критическое значение, найденное в работе [179], показано ромбом

которых число Маха принимает значение, равное единице. Здесь же показано n_{jcr} , вычисленное по соотношению (6.10), и нанесено экспериментальное значение n_{jcr} , полученное в работе [179]. (Более подробное обсуждение эксперимента [179] дано ниже в п. 6.4.4.). При $n_{j0} > n_{jcr}$ волна движется быстрее звука, а при меньших n_{j0} — медленнее. Поэтому устойчивое стационарное движение волны будет в первом случае.

Отметим, что при изучении солитонов в плазме с отрицательными ионами принята терминология, в соответствии с которой солитон, имеющий распределение потенциала в виде «ямы», а не «горба», именуется солитоном разрежения. В таком солитоне положительные ионы испытывают разрежение, а отрицательные ионы — сжатие. Это же имеет место и для рассматриваемой здесь волны. Поэтому в случае сверхзвукового движения эту волну уместно классифицировать как бесстолкновительную ударную волну разрежения (БУВР).

Из газодинамики известно, что в обычных средах ударные волны разрежения не возникают [11]. В рассматриваемом нами случае бесстолкновительной плазмы структура ударной волны определяется дисперсией, а не диссипацией. При этом разрежение испытывает основная составляющая плазмы — положительные ионы, а отрицательные ионы сжимаются. Волна распространяется быстрее звука, и это обеспечивает устойчивость фронта волны.

Выше было показано, что весьма важным параметром, характеризующим стационарно движущуюся волну, имеющую вид перехода между двумя постоянными течениями, является величина скачка перенормированного потенциала. Этот скачок на фронте волны между областями 0 и 1 равен $\Psi = 2\varphi_1/D^2$. Его значения при разных n_{j0} для некоторых ионных составов плазмы приведены на рисунке 6.6. Видно, что с ростом n_{j0} величина скачка

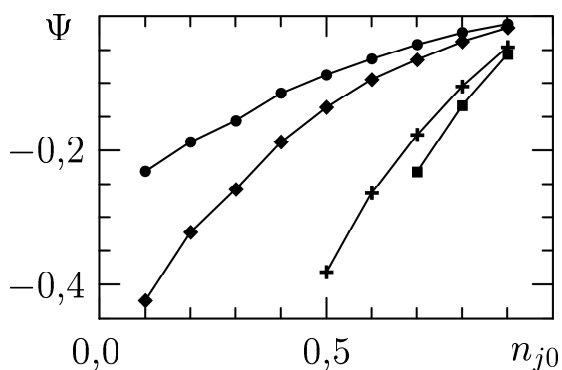


Рисунок 6.6. Зависимость Ψ от n_{j0} для разных ионных составов плазмы: а) Cs^+ и Cl^- , $m_j = 0,267$ (кружки); б) Ar^+ и F^- , $m_j = 0,476$ (ромбы); в) Ar^+ и SF_6^- , $m_j = 3,657$ (знаки плюс); г) K^+ и C_{60}^- , $m_j = 18,431$ (квадраты)

$|\Psi|$ уменьшается, а при увеличении относительной массы отрицательных ионов m_j она увеличивается, оставаясь сравнительно малой величиной [236]. Поэтому для оценки параметров волны можно использовать формулы (6.8).

6.2.4 Структура фронта БУВР

Устойчиво движущийся фронт волны можно рассчитать по предложенной в п. 6.2.1 методике. Дополнительным подтверждением её эффективности служит отмеченный выше факт, что первые экстремальные значения, вычисленные с её помощью, с очень хорошей точностью совпадают с данными численных экспериментов (рисунок 6.3). Это, по существу, свидетельствует о выполнении предполагаемого в аналитической модели начального условия для расчёта профиля фронта волны. Поэтому для определения первого экстремального значения ψ_m и последующего решения уравнения (6.17) нам не требуется каких-либо дополнительных данных о процессе, и для заданных ρ , μ , κ и Z_i расчёт фронта волны может быть произведен независимо.

На рисунке 6.7 показан фронт волны для нескольких вариантов, полученный как с помощью аналитической модели, так и при численном моделировании процесса. Отсчёт координаты z проводился от первого экстремума осцилляторной структуры. Видно, что при сверхзвуковом движении (варианты a , b и c) фронт волны практически не изменяется со временем и неплохо описывается аналитической моделью.

В случае дозвукового движения ($m_j = 3,657$, $n_{j0} = 0,1$) профиль фронта волны расширяется со временем. Численный эксперимент показывает, что с течением времени фронт несколько укрупняется, а его скорость (в отрицательном направлении) слегка возрастает (рисунок 6.8). Как хорошо видно из рисунков 6.7 и 6.8, со временем происходит уменьшение амплитуды первого экстремума. Строго говоря, в дозвуковом случае нарушается стационарность движения волны. Но при этом волна сохраняет осцилляторную структуру и представляет собой разрежение для положительных ионов и сжатие — для отрицательных. Будем в дальнейшем называть такую дозвуковую волну осцилляторной волной разрежения, чтобы

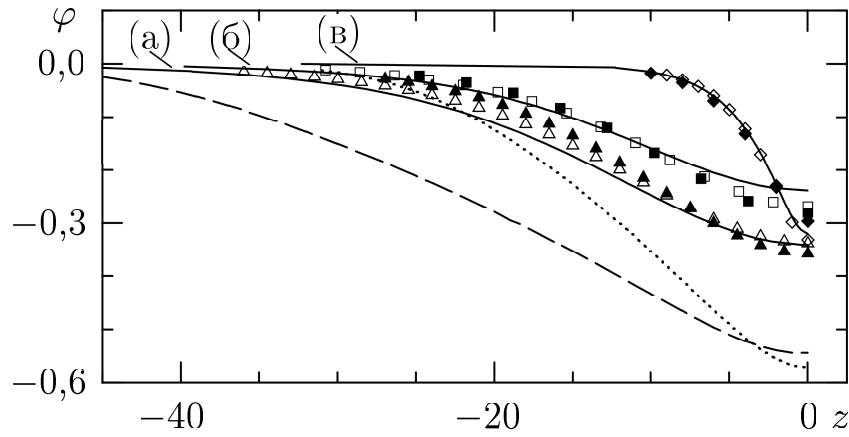


Рисунок 6.7. Профиль потенциала на фронте волны. Сплошные кривые показывают решения уравнения (6.17) для трёх вариантов: (а) : $m_j = 3,657$, $n_{j0} = 0,8$; (б) : $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,8$; (в) : $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$. Треугольники, квадраты и ромбы представляют данные численных экспериментов для тех же вариантов (а), (б) и (в), соответственно. Тёмные и светлые символы используются для $t = 50$ и $t = 100$. Данные численного эксперимента в случае $m_j = 3,657$, $n_{j0} = 0,1$ показаны пунктирной и штриховой кривыми для $t = 50$ и $t = 100$

отличить её и от сверхзвуковой БУВР, и от обычной волны разрежения. Кстати, последняя, как и остальные элементы течения (платоподобные области и разрыв между ними), наблюдаемые в сверхзвуковом случае, находятся на тех же местах и в профиле дозвукового течения. К тому же, было установлено, что при этом результаты численного моделирования неплохо описываются предложенной аналитической моделью, если рассматривать течение в области 1 как стационарную волну, движущуюся со средней скоростью первого экстремума (дозвуковой).

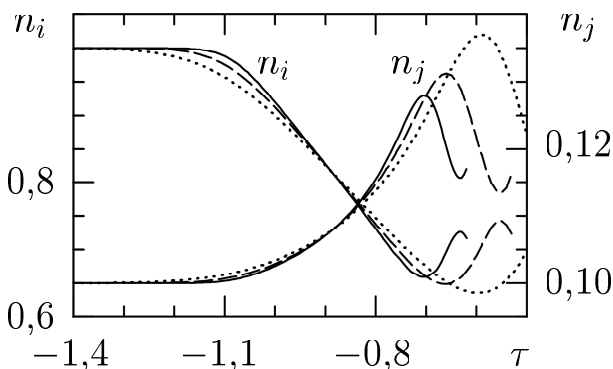


Рисунок 6.8. Зависимости n_i и n_j (правая ось ординат) на фронте волны от τ в разные моменты времени: 50 (пунктирные кривые), 100 (штриховые кривые) и 200 (сплошные кривые) при $m_j = 3,657$, $n_{j0} = 0,1$

6.2.5 Учёт электронного движения

Выше мы предполагали, что электронная компонента плазмы подчиняется распределению Больцмана, а её температура имеет постоянное во времени и пространстве значение T_{e0} . Однако уже сам факт появления ускоренных положительных ионов свидетельствует о том, что процесс сопровождается обменом энергией между компонентами плазмы. Источником энергии для ускоренных ионов является тепловая энергия электронов. Её уменьшение при расширении в вакуум двухкомпонентной плазмы происходит, как было показано в п. 3.4, в виде волны охлаждения. Очевидно, что и при наличии отрицательных ионов температура электронов будет определённым образом уменьшаться. Интересно посмотреть, как повлияет учёт процессов, происходящих в электронной компоненте, на основные особенности течения, такие, например, как осцилляторная структура или формирование и распространение БУВР.

Для изучения роли электронного движения надо использовать численную модель, в которой все три компоненты плазмы представлены модельными частицами. В трёхкомпонентной модели для сокращения времени расчёта мы использовали модельное отношение массы положительного иона к массе электрона, равное 100. Вылет электронов из расчётной области учитывался с использованием рассмотренного в п. 3.2.2 приёма корректировки величины электрического поля на вакуумной границе области.

Рассмотрим результаты численного моделирования. На рисунке 6.9 представлены моменты электронной функции распределения в зависимости от координаты. Хорошо видно, что к рассматриваемому моменту времени ($t = 14$ в ионных единицах) в очень большой пространственной области плотность электронов сохраняет невозмущённое значение, а потоковая скорость электронов лишь слегка флуктуирует около нулевого значения. Заметные изменения плотности и потоковой скорости электронов начинаются при $x \sim -30$, то есть совсем недалеко от точки начального разрыва.

В то же самое время электронная температура не остаётся постоянной, она постепенно уменьшается на протяжении всей области от невозмущённого значения $T_{e0} = 1$. Одновременно в сторону вакуума распространяется нарас-

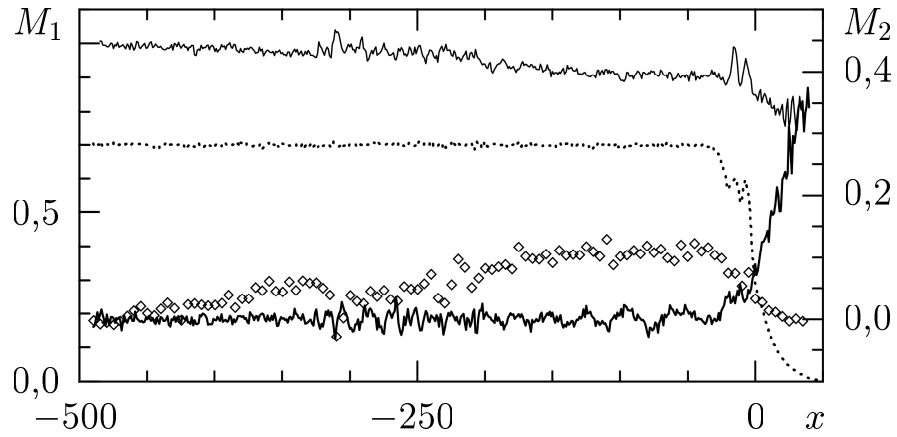


Рисунок 6.9. Моменты электронной функции распределения $M_1 = \{n_e, T_e\}$ и $M_2 = \{V_e, \mathcal{G}_e\}$ в момент времени $t = 14$ в случае $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,3$, $T_{i0} = T_{j0} = 0$. Плотность n_e , температура T_e и потоковая скорость V_e обозначены, соответственно, пунктирной, тонкой сплошной и сплошной кривыми, а поток тепла \mathcal{G}_e — ромбами

тающий поток тепла. Таким образом, в области, где электронная компонента плазмы сохраняет невозмущённое значение плотности и не имеет потокового движения, возникает поток тепла, который приводит к уменьшению температуры электронов с ростом координаты, то есть происходит охлаждение электронов. В невозмущённую плазму распространяется волна охлаждения электронов. Она вполне аналогична волне охлаждения, рассмотренной в п. 3.4.

Таким образом, предположение о постоянстве электронной температуры с течением времени становится неточным. С другой стороны, электронная температура падает в волне охлаждения не очень сильно, на 10–15 процентов. Повлияет ли это всё на общую картину расширения плазмы в вакуум? Для ответа на этот вопрос рассмотрим результаты численного моделирования с учётом электронного движения (трёхкомпонентная модель) и сравним их с результатами, полученными в модели с бальцмановскими электронами (двухкомпонентная модель). Такое сравнение дано на рисунке 6.10. Видно, что движущаяся осцилляторная структура, полученная ранее в двухкомпонентной модели и определённая нами как БУВР, проявляется и при учёте электронной инерции. Средние плотности частиц в осцилляторной структуре имеют примерно одни и те же значения в обоих моделях. То же самое можно

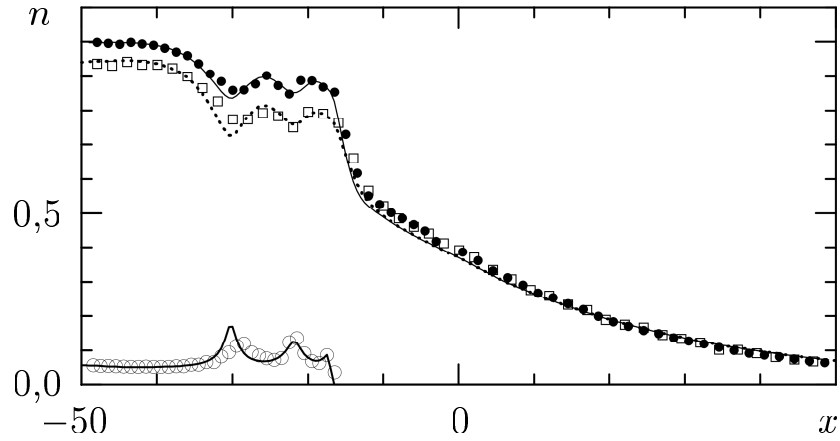


Рисунок 6.10. Сравнение пространственных зависимостей плотностей частиц, полученных в трёхкомпонентной модели (символы) с соответствующими зависимостями в двухкомпонентной модели (кривые) в случае $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,05$, $T_{i0} = T_{j0} = 0$, $t = 30$. Положительным ионам соответствуют кружки и верхняя сплошная кривая, отрицательным ионам — окружности и нижняя сплошная кривая, электронам — квадраты и пунктирная кривая

сказать и о скорости движения БУВР, по крайней мере, для рассматриваемых промежутков времени. Естественно, в трёхкомпонентной модели наблюдается более высокий шум, и осцилляционная структура проявляется менее чётко. Можно ожидать, что при увеличении отношения m_i/m_e для модельных частиц данные трёхкомпонентной модели будут приближаться к данным, найденным в двухкомпонентной модели с бoльцмановскими электронами.

6.3 Неустойчивость расширяющейся плазмы

с холодными ионами

6.3.1 Возбуждение и развитие неустойчивости

Из численных экспериментов следует, что одной из важных особенностей рассматриваемого процесса является возникновение неустойчивости за фронтом БУВР, проявляющейся в виде коротковолновых осцилляций. Рассмотрим эту неустойчивость более подробно [226]. Рисунки 6.2 и 6.11, построенные для разных вариантов, дают представление о неустойчивости. На рисунке 6.12 об-

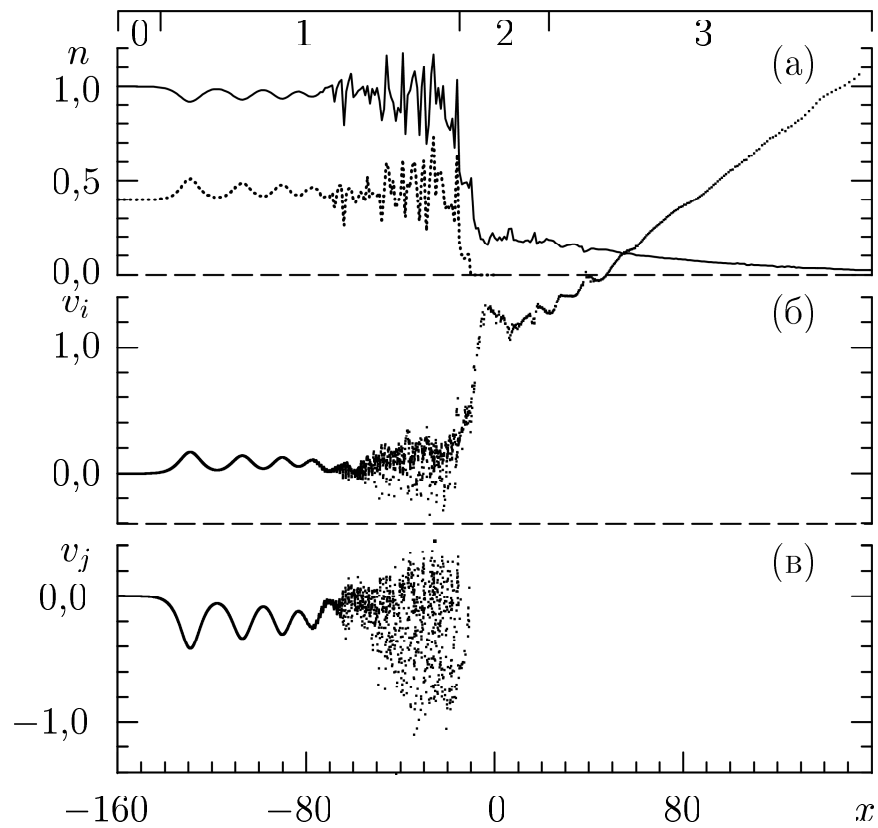


Рисунок 6.11. (а): плотности ионов n_i и n_j (соответственно сплошная и пунктирная кривые) как функции от координаты; (б): фазовая плоскость положительных ионов; (в): фазовая плоскость отрицательных ионов. Разные области течения обозначены сверху цифрами. $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,4$, $t = 70$

ласть неустойчивости показана в увеличенном масштабе.

Естественно предположить, что причиной неустойчивости является встречное движение потоков положительных и отрицательных ионов в области 1, о чём упоминалось выше. Однако рассматриваемый процесс оказывается значительно сложнее, чем обычная двухпотоковая неустойчивость. Рисунки 6.11 и 6.12 демонстрируют наблюдаемые особенности возбуждения и развития неустойчивости. Как правило, неустойчивость возникает не сразу после начала процесса расширения плазмы в вакуум, а через некоторый достаточно большой промежуток времени. Кроме того, неустойчивость сначала развивается вблизи границы плато 1 с областью второго плато 2, и только затем постепенно область возбуждения неустойчивости расширяется влево. При этом в разных точках пространства в один и тот же момент времени неустойчивость находится на разных стадиях развития. В некотором смысле, представленные

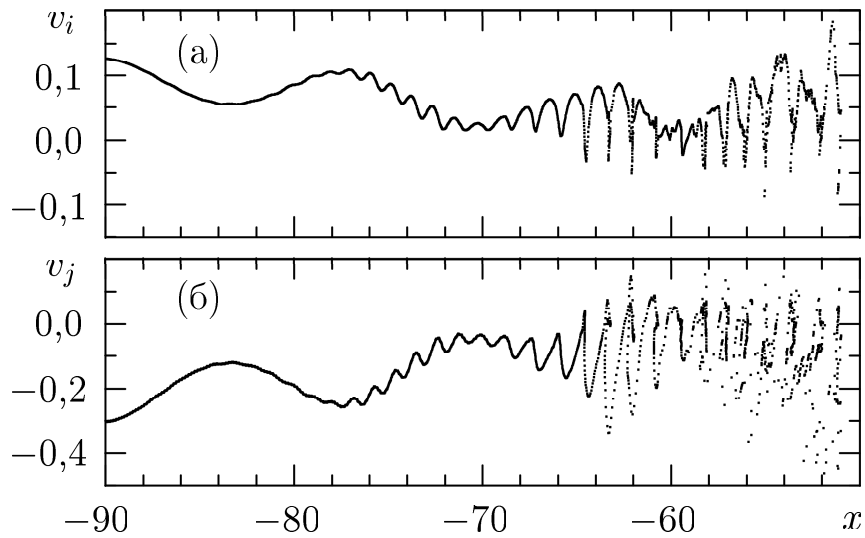


Рисунок 6.12. Фазовые плоскости положительных ионов (а) и отрицательных ионов (б) в увеличенном масштабе при $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,4$, $t = 70$

на рисунках пространственные зависимости показывают развитие неустойчивости во времени. Несмотря на то, что в каждой точке пространства в области плато 1 усреднённые параметры потоков ионов таковы, что должна развиваться неустойчивость, существует область устойчивого относительно возбуждения коротких волн движения. Ламинарная осцилляторная структура сосуществует с областью неустойчивости в течение всего времени наблюдения. Коротковолновые осцилляции не охватывают всю область плато.

Существенной особенностью является то, что неустойчивость развивается на фоне движущейся осцилляторной структуры. Поэтому «невозмущённая» область, то есть область, где неустойчивость ещё не развилась, является неоднородной. Закон изменения параметров здесь не имеет аналитического представления, и записать дисперсионное уравнение не удаётся. В этих условиях приходится ограничиться простейшим приближением, при котором вообще не учитывается осцилляторная структура и рассматривается взаимодействие однородных в невозмущённой области потоков (см. п. 1.5).

Для расчёта необходимо оценить параметры взаимодействующих потоков. Их значения определяются процессом расширения плазмы в вакуум и ионным составом плазмы, то есть величинами m_j и n_{j0} . Мы будем использовать те оценки значений плотностей и скоростей потоков на плато 1, которые даёт аналитическая модель. Эти значения находятся внутри диапазона осцил-

ляций и, что немаловажно, получены из законов сохранения (6.11). К примеру, согласно аналитической модели, для плазмы, состоящей из электронов и ионов Ar^+ и F^- ($m_j = 0,476$) с $n_{j0} = 0,1$, ионные плотности и потоковые скорости на плато 1 имеют следующие значения: $n_{ip} = 0,878$, $n_{jp} = 0,164$, $V_{ip} = 0,174$, $V_{jp} = -0,485$. Здесь величины на плато 1 обозначены индексом p .

На рисунках 6.13 и 6.14 представлены решения дисперсионного уравнения (1.75), соответствующие параметрам потоков, рассчитанных вышеописанным способом для заданных m_j и n_{j0} . Рисунок 6.13 даёт численное решение уравнения (1.75) для действительных волновых чисел k в случае $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$. Здесь также нанесены кривые, следующие из уравнений для независимых потоков (1.77) и (1.78). Дисперсионные кривые проходят через точку $k = 0$, $\text{Re } \omega = 0$, $\text{Im } \omega = 0$. Видно, что дисперсионное уравнение имеет комплексные корни, причём экстремальные значения мнимой части частоты соответствуют тем значения $k = \pm k_c$, при которых происходит пересечение кривых, соответствующих медленным волнам в независимых потоках. Величина k_c определяется по (1.81). Таким образом, параметры потоков на плато 1 таковы, что здесь развивается неустойчивость.

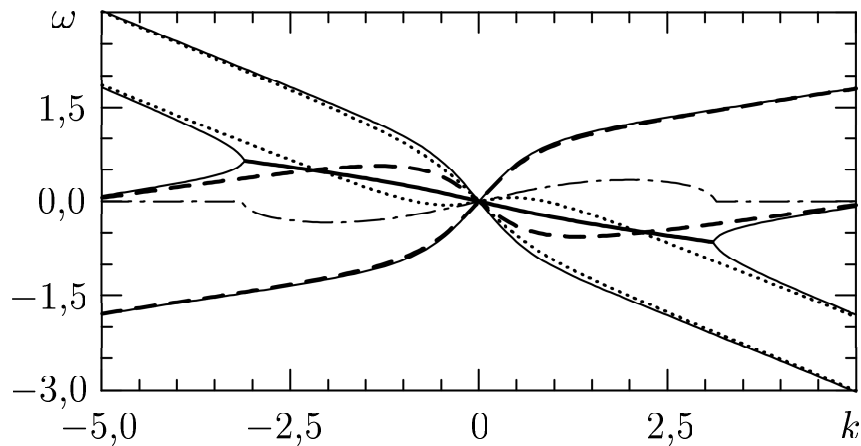


Рисунок 6.13. Зависимость $\omega(k)$ при $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$. Для комплексно-сопряжённых корней уравнения (1.75) $\text{Re } \omega$ показано двойной сплошной кривой, а $\text{Im } \omega$ (один из корней) — штрихпунктирной кривой; вещественные корни изображены сплошной кривой. Дисперсионные кривые независимых потоков нанесены штрихом (положительные ионы) и пунктиром (отрицательные ионы)

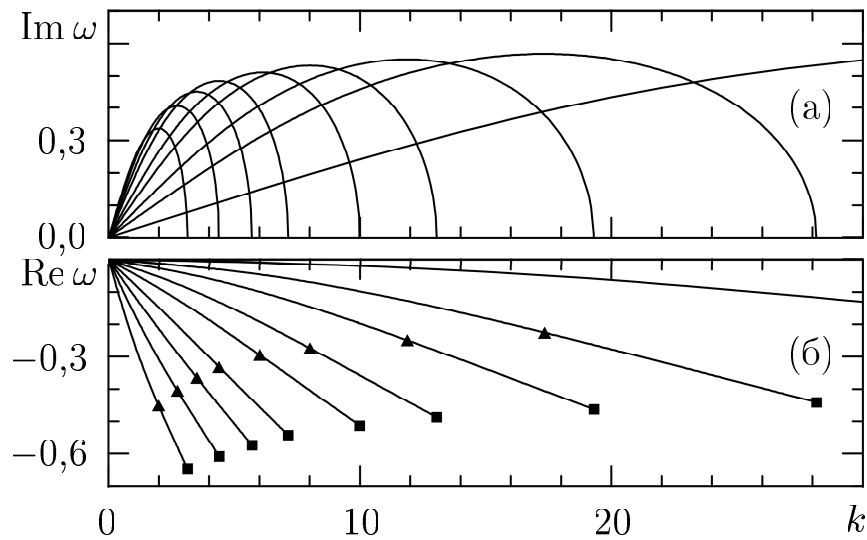


Рисунок 6.14. Зависимость инкремента (а) и частоты (б) от волнового числа при $m_j = 0,476$ для значений n_{j0} от 0,1 (кривые занимают наименьшую область по k) до 0,9 (кривые занимают наибольшую область по k) с шагом 0,1. Треугольники на кривых соответствуют тем $\text{Re } \omega$ и k , при которых инкременты максимальны. Граничные частоты по (1.84) показаны квадратами

Представление о возможных инкрементах и частотах возбуждаемых волн при заданном m_j и разных плотностях отрицательных ионов n_{j0} даёт рисунок 6.14, где показаны решения дисперсионного уравнения (1.75) для параметров потоков, рассчитанных по аналитической модели для выбранных m_j и n_{j0} . При этом максимальные инкременты нарастания не только соответствуют волновым числам и частотам, близким к значениям k_c и ω_c , но и по величине могут быть вычислены по формуле (1.83) с хорошей точностью. Заметим, что максимальные инкременты принимают достаточно большие значения.

6.3.2 Энергия волны

Процесс развития неустойчивости может быть рассмотрен и с другой точки зрения [226]. Волны обладают энергией, могут её переносить или обмениваться ею с другими волнами и частицами. В термодинамическом равновесии энергия волны положительна [246]. Однако если среда неравновесна, то знак энергии волны может быть любым [247, 248]. Если энергия волны отрицательна, то это означает, что энергия среды с возбуждённой в ней волной оказыва-

ется меньше, чем энергия среды в отсутствии волны. Для возбуждения волны с отрицательной энергией надо не вводить, а, наоборот, отводить энергию от волны. В нашем случае с потоками частиц среда неравновесна, и анализ энергетических соотношений представляет несомненный интерес.

Запишем выражение для плотности энергии волны в диспергирующей среде [246, 249]. Для нашего случая оно примет вид:

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{E_{p0}^2}{2Z_i} \frac{d}{d\omega}(\omega\epsilon),$$

где величина E_{p0} представляет собой амплитуду электрического поля волны. Подставляя сюда ϵ из (1.74) при $T_{ip} = T_{jp} = 0$, получим выражение для усреднённой плотности энергии волны $\langle \mathcal{U} \rangle$:

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{E_{p0}^2}{2Z_i} 2\omega \left[\frac{Z_i n_{ip}}{(\omega - kV_{ip})^3} + \frac{Z_j \mu n_{jp}}{(\omega - kV_{jp})^3} \right]. \quad (6.18)$$

Подчеркнём, что здесь используются наши безразмерные величины, а частота ω и волновое число k связаны дисперсионным уравнением (1.75).

Из (6.18) видно, что знак плотности энергии волны в нашем случае зависит от знаков выражений $\omega - kV_{ip}$ и $\omega - kV_{jp}$. Удобно, как и ранее при анализе дисперсионного уравнения, сначала рассмотреть невзаимодействующие потоки. Каждый поток будет вносить свой вклад в плотность энергии волны (6.18), определяемый соответствующим дисперсионным уравнением. Так, подставляя ω из (1.77) в формулу (6.18) при $n_{jp} = 0$, можно получить выражение

$$U_i = \frac{\langle \mathcal{U}_i \rangle}{E_{p0}^2/2Z_i} = 2 \left(1 + \frac{n_{ep}}{k^2} \right) \left(1 \pm \frac{kV_{ip}}{\omega_{is}} \right), \quad (6.19)$$

которое представляет собой вклад в плотность энергии волны от невзаимодействующего потока положительных ионов $\langle \mathcal{U}_i \rangle$, отнесённый к плотности энергии электрического поля. Для анализа удобно пользоваться именно таким выражением, исключая из рассмотрения неизвестную величину E_{p0} . Точно так же можно получить аналогичное выражение для вклада в плотность энергии волны (6.18) невзаимодействующего потока отрицательных ионов $\langle \mathcal{U}_j \rangle$, отнесённого к плотности энергии электрического поля, воспользовавшись дисперсионным уравнением (1.78) при $n_{ip} = 0$:

$$U_j = \frac{\langle \mathcal{U}_j \rangle}{E_{p0}^2/2Z_i} = 2 \left(1 + \frac{n_{ep}}{k^2} \right) \left(1 \pm \frac{kV_{jp}}{\omega_{js}} \right). \quad (6.20)$$

Как было ранее установлено, при выбранных знаках потоковых скоростей знак плюс в (6.19) и знак минус в (6.20) соответствуют быстрым волнам. Очевидно, что быстрые волны всегда обладают положительной энергией. Медленные же волны, определяемые знаком минус в (6.19) и знаком плюс в (6.20), могут изменять знак плотности энергии волны при $kV_{ip} = \omega_{is}$ и $kV_{jp} = -\omega_{js}$, соответственно. Суммарный вклад в плотность энергии волны этих двух невзаимодействующих потоков U_Σ будет выражаться формулой

$$U_\Sigma = 2 \left(1 + \frac{n_{ep}}{k^2} \right) \left[2 - k \left(\frac{V_{ip}}{\omega_{is}} - \frac{V_{jp}}{\omega_{js}} \right) \right]. \quad (6.21)$$

Эта величина не совпадает с энергией волны взаимодействующих потоков

$$U = \frac{\langle \mathcal{U} \rangle}{E_{p0}^2 / 2Z_i},$$

где $\langle \mathcal{U} \rangle$ определяется по (6.18), а частота ω и волновое число k связаны дисперсионным уравнением (1.75) для взаимодействующих потоков.

Из (6.19)–(6.21) легко определить волновые числа k_i , k_j и k_Σ , при которых изменяют знак U_i , U_j и U_Σ , соответственно. Для положительных k получим

$$k_i = \left(\frac{Z_i n_{ip}}{V_{ip}^2} - n_{ep} \right)^{1/2}, \quad k_j = \left(\frac{Z_j \mu n_{jp}}{V_{jp}^2} - n_{ep} \right)^{1/2},$$

$$k_\Sigma = \left[\frac{4Z_i n_{ip} Z_j \mu n_{jp}}{\left(V_{ip} \sqrt{Z_j \mu n_{jp}} - V_{jp} \sqrt{Z_i n_{ip}} \right)^2} - n_{ep} \right]^{1/2}.$$

Если выполняются соотношения $k_j < k_\Sigma < k_i$, как, например, на рисунке 6.15, то в точке $k = k_\Sigma$ волна в потоке положительных ионов вносит положительный вклад в U_Σ , а волна в потоке отрицательных ионов — отрицательный, причём $U_i = -U_j$. Именно для этого волнового числа, как иллюстрирует рисунок 6.15, энергия, которой могут обмениваться волны, достигает наибольшего значения. Можно ожидать, что при $k = k_\Sigma$ волна с отрицательной энергией, для возбуждения которой необходим какой-то канал диссипации, будет отдавать энергию волне с положительной энергией, которой для раскачки как раз требуется энергия извне. При этом амплитуды обеих волн будут нарастать, система станет неустойчивой.

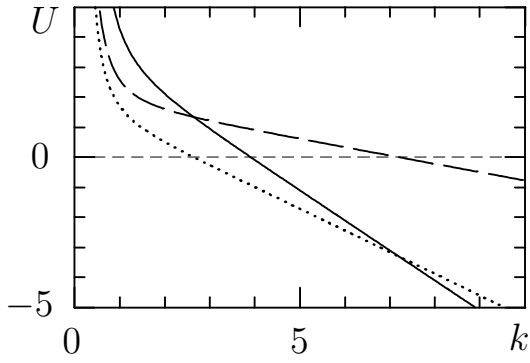


Рисунок 6.15. Вклады в плотность энергии волны от невзаимодействующих потоков ионов: положительных (штрихи) и отрицательных (пунктир), а также их сумма (сплошная кривая) как функции от k при $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,3$

6.3.3 Неустойчивость, нелинейность и дисперсия

Решения дисперсионного уравнения и результаты проведенного анализа энергии волны должны давать близкие друг к другу оценки, которые, в свою очередь, должны согласовываться с данными численных экспериментов. Наиболее точно измеряемой в численном эксперименте величиной, характеризующей неустойчивость, является длина волны λ коротковолновых осцилляций. Зависимость длины волны λ от n_{j0} , полученная в численных экспериментах, представлена на рисунке 6.16. Из рисунка видно, что в пределах разброса длина волны λ достаточно хорошо соответствует как точному решению дисперсионного уравнения (1.75), так и приближённой оценке по формуле $\lambda_c = 2\pi/k_c$. Некоторое отклонение наблюдается при больших n_{j0} , когда λ заметно меньше единицы. На рисунке также показаны длины волн $\lambda_i = 2\pi/k_i$ и $\lambda_j = 2\pi/k_j$, при которых происходит изменение знака вклада в плотность энергии волны в независимых потоках положительных и отрицательных ионов. Кроме того, здесь представлены длина волны $\lambda_\Sigma = 2\pi/k_\Sigma$, соответствующая изменению знака суммарного вклада в плотность энергии волны от обоих потоков, и граничная длина волны $\lambda_b = 2\pi/k_b$, где k_b определяется по (1.84). Значения λ_Σ достаточно хорошо совпадают с данными численных экспериментов. Небольшое расхождение наблюдается при малых n_{j0} . Видно, что выполняются предположенные выше соотношения между k_i , k_j и k_Σ . (Заметим, что наблюдаемый здесь характер взаимодействия медленных волн с энергиями разных знаков, как позже было установлено в [250], может иметь место и в пылевой плазме.)

Мы видим, что основные свойства процесса вписываются в закономерности двухпоточковой неустойчивости. Вместе с тем, неустойчивость характери-

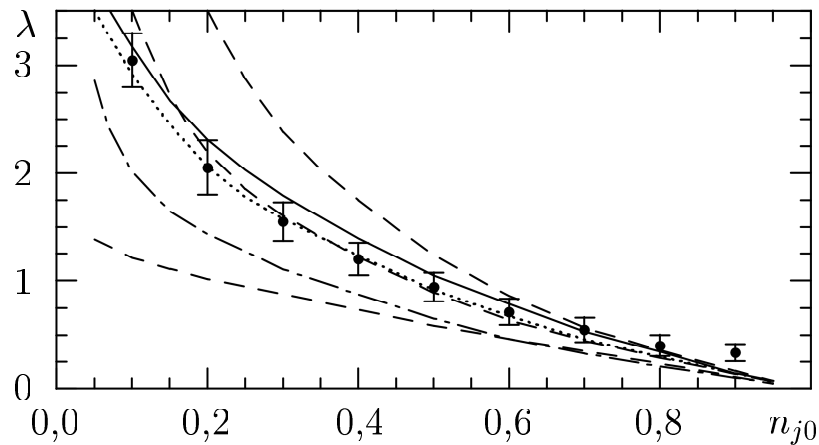


Рисунок 6.16. Длина волны коротковолновых осцилляций λ как функция от n_{j0} при $m_j = 0,476$, полученная в численном эксперименте (кружки) и из численного решения (1.75) при максимальном инкременте (сплошная кривая). Величины λ_c и λ_b представлены пунктирной и штрихпунктирной кривыми. Штриховыми кривыми показаны λ_i (внизу), λ_j (вверху) и λ_Σ (в середине)

зуются некоторыми важными особенностями. К их числу относятся задержка начала развития неустойчивости на время, заметно превосходящее величину γ^{-1} (γ — инкремент неустойчивости (1.83)), строго определённое место возникновения неустойчивости на границе между областями 1 и 2 и существование в течение наблюдаемого времени области устойчивости наряду с неустойчивой областью с постепенным переходом между ними при примерно одних и тех же параметрах потоков. Наличие таких особенностей может означать, что развитие неустойчивости некоторым образом срывается. Причиной этого может быть то, что неустойчивость развивается на фоне осцилляторной структуры. Длинноволновые осцилляции в области 1 распространяются с большой скоростью. В частности, передовые осцилляции БУВР движутся со сверхзвуковой скоростью. Поэтому значения плотностей и скоростей ионов в обоих потоках, а с ними и значения фазовых скоростей медленных волн, весьма быстро изменяются во времени. Это приводит к тому, что за время развития неустойчивости γ^{-1} для любого k условие синхронизма (1.79) может быть сильно нарушено, и неустойчивость не будет развиваться. С течением времени, когда в дисперсионном «следе» за фронтом БУВР появляются более медленные и более слабые осцилляции, максимальная разность фазовых скоростей двух волн уменьша-

ется, и в области этих осцилляций становится возможным развитие неустойчивости. По мере движения таких слабых длинноволновых осцилляций влево туда же с ними расширяется область возбуждения неустойчивости. Развитие процесса во времени оказывается развёрнутым в пространстве со скоростью первой длинноволновой осцилляции, на которой возникает неустойчивость. В результате таких процессов на плато 1 одновременно существуют как область неустойчивости, в разных точках которой неустойчивость находится на разных стадиях своего развития, так и область устойчивого ламинарного течения.

Изложенные соображения, на самом деле, конкретизируют то обстоятельство, что процесс подвержен воздействию трёх факторов: дисперсии, нелинейности и неустойчивости. Воздействие первых двух факторов приводит к образованию на начальной стадии ламинарной структуры волны, при которой увеличение крутизны осцилляций за счёт нелинейности ограничивается дисперсионным размытием профиля. Возникающая спустя некоторое время после начала процесса неустойчивость характеризуется короткими волнами с малыми фазовыми скоростями. Дисперсия приводит к тому, что эти волны не могут нарастать на фоне быстрых длинноволновых осцилляций, и только в той области, где фазовая скорость этих осцилляций заметно уменьшается, неустойчивость начинает развиваться. Можно сказать, что здесь дисперсия препятствует не только влиянию нелинейности, но и развитию неустойчивости в значительной пространственной области. Рисунки 6.2, 6.11 и 6.12 демонстрируют всю полноту влияния дисперсии на характер движения.

Таким образом, в процессе расширения плазмы в вакуум за фронтом БУВР возникает неустойчивость, обусловленная встречным движением потоков положительных и отрицательных ионов. Поскольку неустойчивость возбуждается на фоне меняющихся со временем длинноволновых осцилляций, её развитие за время наблюдения происходит только в ограниченной области пространства. В значительной части осцилляторной структуры за счёт дисперсии неустойчивость не может развиваться.

Подобная неустойчивость наблюдалась экспериментально в индукционном разряде в смеси аргона и газа SF_6 , а также в кислороде [251]. В работах [252, 253] данные, полученные в [251], были уточнены и обобщены.

Разряд осуществлялся при низком давлении, в условиях, близких к рассматривавшемуся выше бесстолкновительному режиму. Установлено, что неустойчивость возбуждается только в электроотрицательных газах. Она проявляется в некоторый момент времени в виде нарастающих возмущений плотности ионов в относительно небольшой области истекающего из источника плазмы потока. Ближе к источнику плазмы плотность ионов повышается, в начальный период времени возникают осцилляции, а затем появляется резкий всплеск плотности с последующими осцилляциями на меньшей частоте. Вниз по течению за неустойчивой областью следует область двухкомпонентной электрон-ионной плазмы. По мере истечения плазмы из источника как положительные, так и отрицательные ионы приобретают направленные потоковые скорости, и возникает двухпотоковость движения. Эти факты согласуются с приведенными выше результатами численного моделирования. Авторы [252,253] утверждают, что именно двухпотоковость является причиной неустойчивости в разряде, и отмечают, что экспериментально наблюдаемая неустойчивость подобна той неустойчивости, которая была обнаружена в нашем численном эксперименте [226] и подробно рассмотрена выше.

Таким образом, результаты численного моделирования и экспериментальные данные согласуются с предложенным описанием неустойчивости.

6.4 Плазма с конечными температурами ионов

6.4.1 Влияние температуры положительных ионов

Если начальные ионные температуры T_{i0} и/или T_{j0} не равны нулю, то тепловое движение ионов будет размывать хорошо наблюдаемые в плазме с холодными ионами разрывы и ламинарную осцилляторную структуру. При этом эффект будет более заметным на лёгких ионах. Рассмотрим влияние начальной температуры положительных ионов $T_{i0} \neq 0$ на процесс при условии, что отрицательные ионы остаются холодными $T_{j0} = 0$. На рисунках 6.17 и 6.18 представлены два типичных случая. Здесь сравниваются пространственные распределения плотностей электронов при разных T_{i0} . Случай, когда более

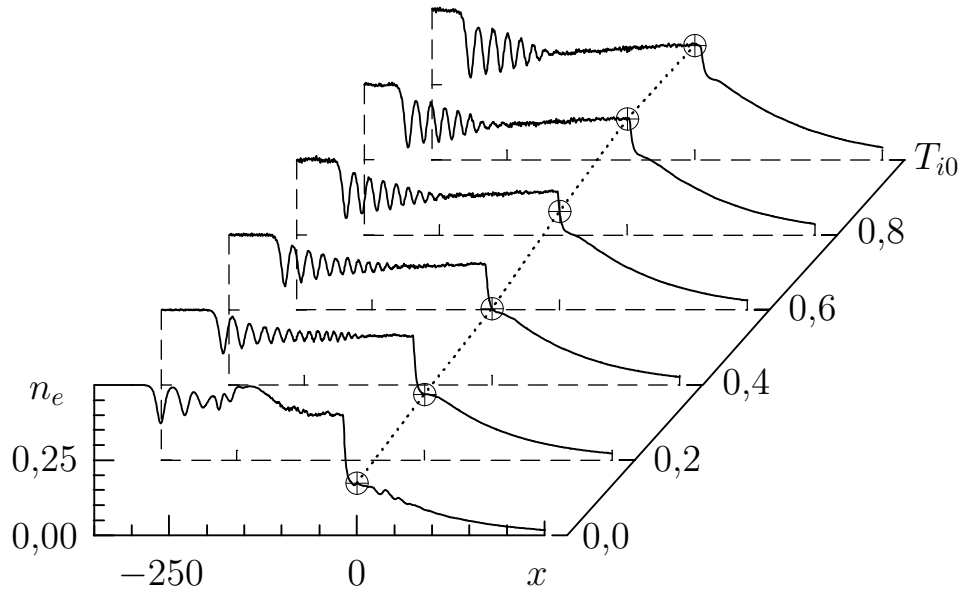


Рисунок 6.17. Пространственное распределение плотности электронов при разных T_{i0} в случае $t = 100$, $m_j = 0,267$, $n_{j0} = 0,5$, $T_{j0} = 0$

лёгкими являются отрицательные ионы с начальной плотностью $n_{j0} = 0,5$ показан на рисунке 6.17, а случай, когда отрицательные ионы тяжелее положительных при том же значении $n_{j0} = 0,5$, — на рисунке 6.18. Пунктирные кривые на рисунках соединяют значения плотности для каждого T_{i0} в точке $x = 0$ (отмечены символами в виде окружностей с вписанным крестиком).

В первом случае $m_j < m_i$ за фронтом движущейся в невозмущённую область волны на электронной плотности хорошо видна осцилляторная структура при всех T_{i0} . Плотность лёгкой компоненты, отрицательных ионов, флуктуирует сильнее, чем плотность тяжёлых положительных ионов. Важное отличие от случая $T_{i0} = 0$ состоит в том, что при рассматриваемых высоких значениях $T_{i0} \geq 0,2$ двухпотоковая неустойчивость не развивается, а на её месте наблюдается линейный рост электронной плотности, которая затем резко падает на границе между трёх- и двухкомпонентной плазмами.

С ростом T_{i0} появляется новый эффект, эффект ускорения отрицательных ионов положительными. Движение последних обусловлено как электрическим полем, созданным быстро расширяющейся электронной компонентой плазмы, так и тепловым расширением, если $T_{i0} \neq 0$. В случае холодных положительных ионов $T_{i0} = 0$ граница отрицательных ионов вообще движется в сторону плазмы и остаётся в области $x < 0$. Тепловое расширение положи-

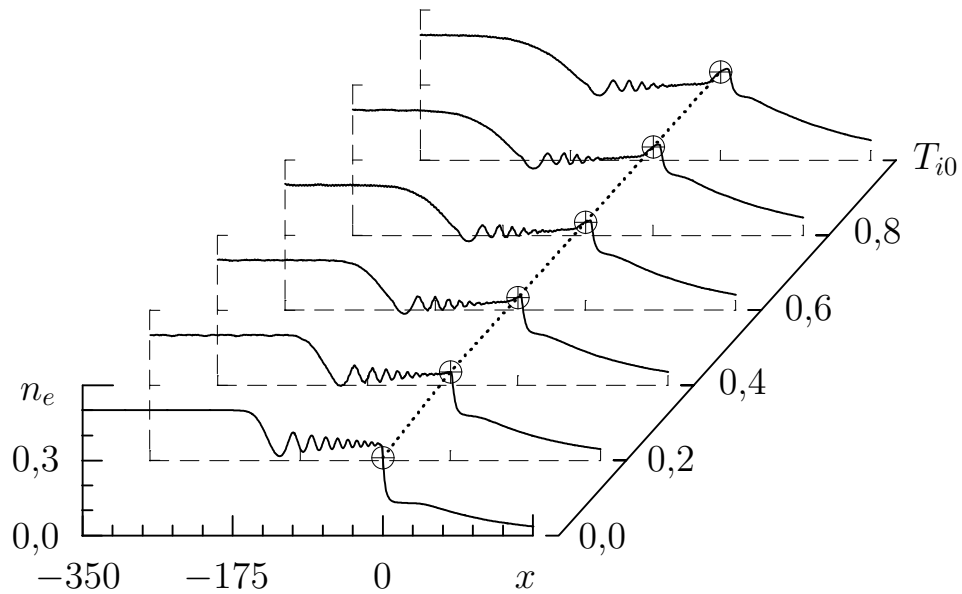


Рисунок 6.18. Пространственные распределения плотности электронов при разных T_{i0} в случае $t = 100$, $m_j = 18,43$, $n_{j0} = 0,5$, $T_{j0} = 0$

тельных ионов растягивает профиль плотности отрицательных ионов в сторону вакуума, и его граница при достаточно больших T_{i0} оказывается в области $x > 0$. Отметим, что здесь положительные ионы за счёт своей тепловой энергии ускоряют в вакуумную область отрицательные, к тому же, более лёгкие, ионы. Очевидно, что в этом случае меняется направление электрического поля, потенциал и электронная плотность должны возрасти (профиль потенциала аналогичен профилю электронной плотности), что и видно на рисунке 6.17.

Во втором случае $m_j > m_i$ (рисунок 6.18) тяжёлые отрицательные ионы не успевают следовать за быстрым движением фронта волны и осцилляторной структуры. Из распределения их плотности нельзя установить, что в невозмущённую плазму движется волна. На месте осцилляторной структуры возникает шум. Вместе с тем плотности положительных ионов и электронов (рисунок 6.18) содержат чётко выраженные фронт и осцилляторную структуру волны. В этом случае также наблюдается ускорение отрицательных ионов за счёт тепловой энергии положительных ионов и растягивание профиля $n_j(x)$ в область $x > 0$. Связанное с этим процессом медленное повышение электронной плотности по мере увеличения x сменяется заметным подъёмом n_e вблизи точки начального разрыва $x = 0$. Здесь, как показали расчёты, скачок потенциала составляет $\sim 0,8T_{i0}$ или несколько выше. За точкой максимума

потенциала электрическое поле меняет знак и тормозит отрицательные ионы на участке резкого спада электронной плотности и потенциала. В более далёкой области за точкой, в которой этот спад существенно замедляется, отрицательные ионы отсутствуют, и процесс представляет собой расширение в вакуум плазмы, состоящей из электронов и только положительных ионов.

6.4.2 Отражённые ионы и неустойчивость

Заметным элементом течения являются отражённые от БУВР отрицательные ионы. Появление отражённых ионов проиллюстрируем результатами численных экспериментов, проведенных для случая холодных положительных ионов $T_{i0} = 0$ при разных значениях температуры отрицательных ионов T_{j0} . Из рисунка 6.19 видно, что отражённые ионы наблюдаются даже при очень малых температурах отрицательных ионов $T_{j0} \sim 0$. Отражение в этом случае возникает на стадии формирования БУВР за счёт процессов, аналогичных тем, которые подробно рассмотрены в п. 4.2.2. При этом отражённые ионы образуют отдельные сгустки. В случае более высокой температуры отрицательных ионов $T_{j0} \geq 0,01$ процесс отражения становится непрерывным (рисунок 6.19, (в)). При ещё большем увеличении T_{j0} тепловой разброс скоростей отрицательных ионов увеличивается и может захватить на фазовой

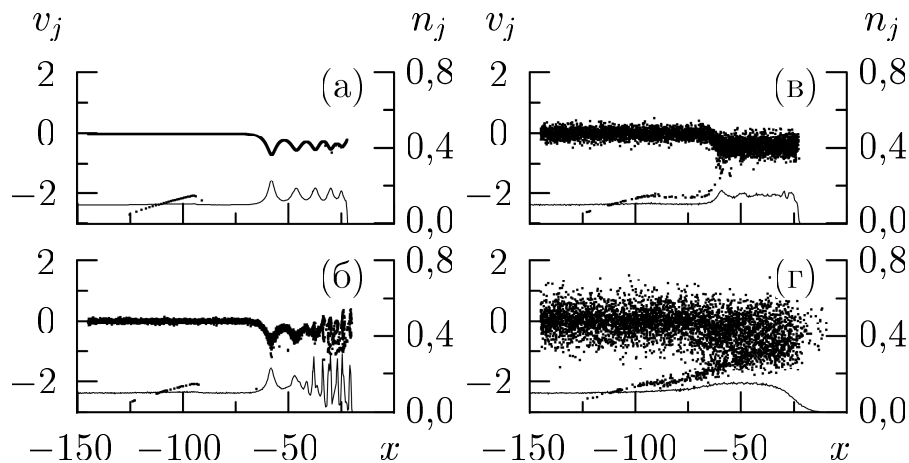


Рисунок 6.19. Фазовые плоскости отрицательных ионов (точки) и зависимости $n_j(x)$ (тонкие кривые, правые оси ординат) в момент времени $t = 50$ при T_{j0} , равных 0 (а), 0,001 (б), 0,01 (в) и 0,1 (г). $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$, $T_{i0} = 0$

плоскости область отражённых ионов (рисунок 6.19, (г)).

При малых $T_{j0} \leq 0,01$ вблизи границы между трёх- и двухкомпонентной плазмами развивается описанная выше двухпоточковая неустойчивость, что хорошо видно на зависимостях $n_j(x)$ на рисунке 6.19. Интересно, что к рассматриваемому моменту времени ($t = 50$) неустойчивость не успевает развиться в случае $T_{j0} = T_{i0} = 0$, а при более высоких значениях $T_{j0} = 0,001$ неустойчивость занимает заметную область. В случае $T_{j0} \geq 0,1$ неустойчивость не возникает, так как тепловая скорость отрицательных ионов становится величиной того же порядка или даже превосходит все возможные в других условиях значения потоковых скоростей, и потока, как такового, не образуется.

Таким образом, при высоких ионных температурах процессы отражения ионов и развития неустойчивости не проявляются заметным образом.

6.4.3 Одинаковые температуры всех сортов частиц

Основной интерес представляют случаи, когда температуры обеих ионных компонент не равны нулю. В таких случаях возникает многопараметрическая задача, зависящая не только от начальной плотности n_{j0} и массы m_j отрицательных ионов, но также и от двух значений ионных температур. Поэтому при численном исследовании приходится ограничиться анализом нескольких частных случаев, соответствующих некоторым заданным значениям T_{i0} и T_{j0} .

Здесь рассматривается случай, когда температуры всех сортов частиц одинаковы $T_{i0} = T_{j0} = 1$. Численное моделирование процесса проведено при разных значениях n_{j0} для двух вариантов $m_j < m_i$ и $m_j > m_i$. Зависимости n_e от переменной $\tau = x/t$ показаны на рисунке 6.20 для обоих вариантов.

В первом случае тепловое движение не позволяет образоваться волне с осцилляторной структурой, и плотность электронов монотонно падает с ростом автомодельной переменной τ . Во втором случае за счёт большей массы отрицательные ионы имеют малые тепловые скорости, их движение не может размыть возникающую волну. На рисунке 6.20 (б) видно образование волны и осцилляторной структуры за её фронтом. В обоих случаях при значительном уменьшении n_{j0} распределение плотности электронов

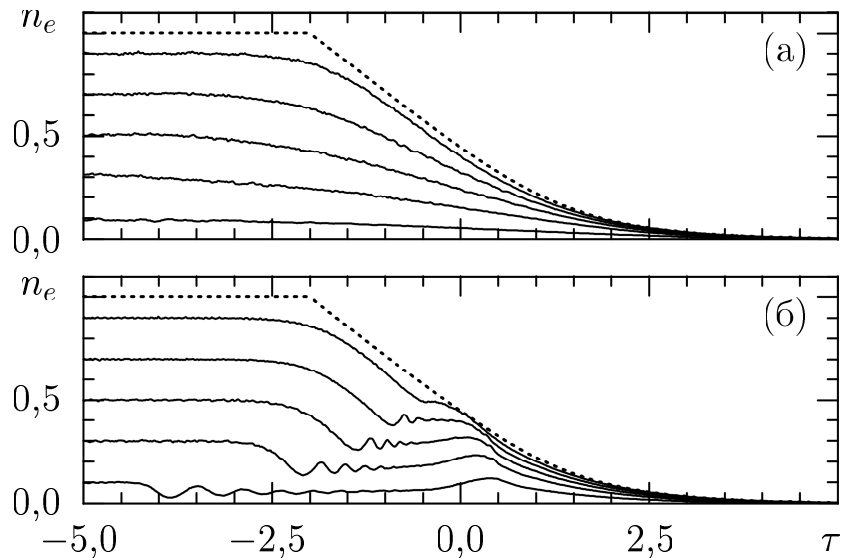


Рисунок 6.20. Плотность электронов как функция от τ в случаях $m_j = 0,267$ (а) и $m_j = 18,43$ (б) при значениях n_{j0} от 0,1 до 0,9 с шагом 0,2 (сплошные кривые сверху вниз). Решение (3.1), соответствующее $n_{j0} = 0$, показано пунктирными кривыми. $T_{i0} = T_{j0} = 1$, $t = 80$

приближается к решению для двухкомпонентной плазмы при $T_{i0} = 1$.

Образование волны и осцилляторной структуры, а также резкая граница области отрицательных ионов отличают случай $m_j > m_i$ от случая $m_j < m_i$, при котором плотности ионов изменяются в пространстве монотонно. Это иллюстрирует рисунок 6.21. Видно, что лёгкие отрицательные ионы ($m_j < m_i$) движутся в сторону вакуума вслед за положительными ионами. Этот эффект менее заметен в случае тяжёлых отрицательных ионов ($m_j > m_i$).

Из рисунка 6.20 (б) видно, что с уменьшением n_{e0} (ростом n_{j0}) скорость фронта волны быстро возрастает, что может привести к изменению характера движения. Так при дозвуковых скоростях фронт волны будет расширяться, а при сверхзвуковых скоростях — сохранять свою форму, и движение будет представлять собой бесстолкновительную ударную волну. Это положение иллюстрирует рисунок 6.22, где продемонстрирована эволюция фронта волны при разных значениях n_{j0} : при $n_{j0} = 0,5$ фронт заметно расширяется, при $n_{j0} = 0,7$ расширение фронта идёт более медленно, а при $n_{j0} = 0,9$ форма фронта волны сохраняется одной и той же с течением времени. Естественно предположить, что в нашем случае критическое значение

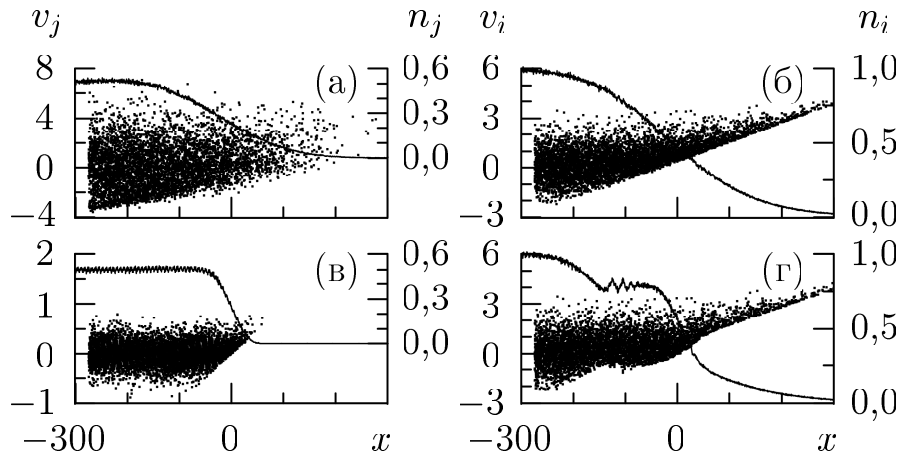


Рисунок 6.21. Фазовые плоскости (точки) и зависимости плотностей от координаты (сплошные кривые, правые оси ординат) отрицательных (слева) и положительных (справа) ионов при $n_{j0} = 0,5$, $T_{i0} = T_{j0} = 1$, $t = 100$ для двух случаев $m_j = 0,267$ ((а) и (б)) и $m_j = 18,43$ ((в) и (г))

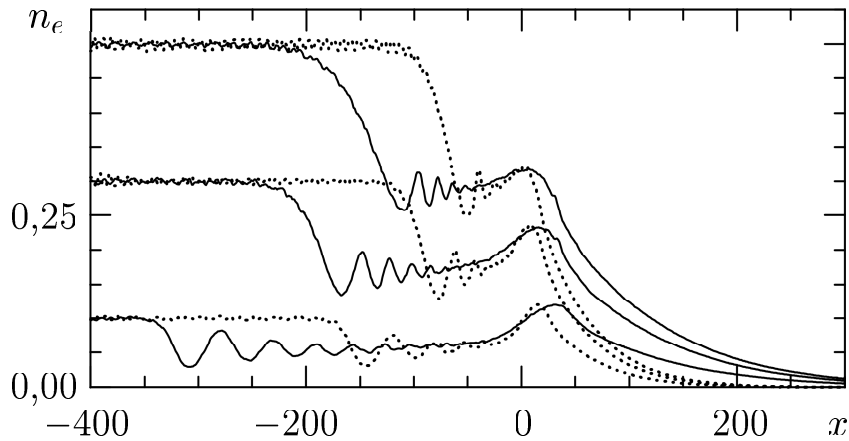


Рисунок 6.22. Зависимости $n_e(x)$ для двух моментов времени: $t = 40$ (пунктирные кривые) и $t = 80$ (сплошные кривые) в случае $m_j = 18,43$, $T_{i0} = T_{j0} = 1$ при значениях n_{j0} , равных 0,5, 0,7 и 0,9 (сверху вниз)

плотности отрицательных ионов n_{jcr} , при котором скорость движения волны сравнивается со звуковой скоростью, лежит в диапазоне от 0,7 до 0,9.

Скорость звука в трёхкомпонентной плазме с учётом конечных ионных температур определяется из дисперсионного уравнения (1.74) как фазовая скорость $c = \omega/k$ длинных волн $k \rightarrow 0$. При $V_{ip} = V_{jp} = 0$ получим

$$c^2 = \frac{1}{2}c_p^2 \left[1 \pm \left(1 + \frac{12 Z_i n_{ip} T_{ip} + Z_j \mu n_{jp} T_{jp} / m_j}{c_p^4 (Z_i n_{ip} + Z_j n_{jp})} \right)^{1/2} \right], \quad (6.22)$$

где c_p определяется по (6.9). Знак плюс в (6.22) соответствует быстрой моде, а знак минус — медленной. Видно, что в случае холодных ионов ($T_{ip} = T_{jp} = 0$) остаётся только одна мода с фазовой скоростью, равной c_p .

Подразумевая под областью p невозмущённую область плазмы 0, вычислим по формуле (6.22) скорость звука для быстрой моды при разных n_{j0} и сравним полученную зависимость с зависимостью от n_{j0} скорости волны, найденной в численных экспериментах при $T_{i0} = T_{j0} = 1$. Результат представлен на рисунке 6.23. Ввидно, что критическое значение начальной плотности отрицательных ионов в случае $m_j = 18,43$, $T_{i0} = T_{j0} = 1$ составляет $n_{jcr} \simeq 0,73$. При $n_{j0} < n_{jcr}$ фронт движется с дозвуковой скоростью, а при $n_{j0} > n_{jcr}$ — со сверхзвуковой. На этом же рисунке точно такое же сравнение проведено и для ниже рассматриваемого случая $T_{i0} = 1$, $T_{j0} = 0,25$.

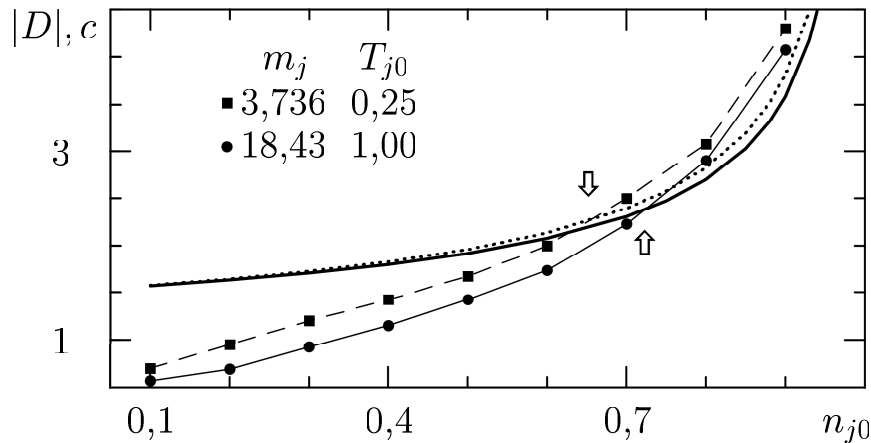


Рисунок 6.23. Зависимости модуля скорости волны $|D|$ и скорости звука c от n_{j0} . Случай $m_j = 18,43$, $T_{i0} = T_{j0} = 1$: $|D|$ — тонкая кривая с кружками, c — сплошная кривая, пересечение кривых указано нижней стрелкой. Случай $m_j = 3,736$, $T_{i0} = 1$, $T_{j0} = 0,25$: $|D|$ — штриховая кривая с квадратами, c — пунктирная кривая, пересечение кривых указано верхней стрелкой

6.4.4 Сравнение с экспериментом, $T_{i0} = 1, T_{j0} = 0,25$

Рассмотренный на рисунке 6.23 случай $T_{i0} = 1$, $T_{j0} = 0,25$ соответствует экспериментам по возбуждению бесстолкновительных ударных волн в плазме с отрицательными ионами, описанным в статье [179]. Эксперименты

проводились в плазме, состоящей из ионов K^+ , SF_6^- и электронов. Было установлено, что существует критическая плотность отрицательных ионов (в единицах плотности положительных ионов), начиная с которой в экспериментальной плазме возбуждается БУВР.

Для изучения этого случая была проведена серия численных экспериментов по определению скорости движения волны при разных значениях n_{j0} . Полученная зависимость сравнивается на рисунке 6.23 с зависимостью $c(n_{j0})$, вычисленной по (6.22). Видно, что эти зависимости пересекаются при начальной плотности отрицательных ионов равной $\simeq 0,66$. Это и есть искомая критическая плотность n_{jcr} для рассматриваемого варианта, и она совпадает с оценкой, полученной в эксперименте [179]. Заметим, что приведенное на рисунке 6.5 значение n_{jcr} , найденное в численных экспериментах, несколько выше ($\simeq 0,69$). Это небольшое несовпадение объясняется тем, что расчёты для рисунка 6.5 проводились при $T_{i0} = T_{j0} = 0$, то есть при других температурах ионов.

Интересно отметить, что в экспериментах [179] скачок плотности в волне формировался с помощью сетки, на которую подавалось напряжение 0,4 вольта, и его величина была $\simeq 0,12$. Примерно такое же значение скачка плотности было получено и в численных экспериментах вблизи точки перехода n_{jcr} от дозвукового движения к сверхзвуковому.

Таким образом, численно определённое значение критической плотности отрицательных ионов n_{jcr} и величина скачка плотности в БУВР практически совпадают с соответствующими экспериментальными значениями.

6.5 Расширение слоя плазмы в вакуум

Выше мы рассматривали расширение в вакуум плазмы, заполняющей полупространство $-\infty < x \leq 0$. В лабораторных устройствах область плазмы конечна, и учёт этого фактора, несомненно, очень важен. Рассмотрим расширение плазмы конечного размера в вакуум в случае простейшей пространственной конфигурации плазменного образования — плоского слоя [217]. Здесь мы снова обращаемся к задаче с двумя разрывами, на сей раз в плазме с отрицательными ионами, и здесь также будет наблюдаться

взаимодействие нелинейных структур.

Задачу сформулируем следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ бесстолкновительная плазма, состоящая из положительных и отрицательных ионов с температурами T_{i0} и T_{j0} и электронов, нагретых до температуры T_{e0} , однородно распределена в конечной области $-L < x < L$ с плотностями, соответственно, $n_{i0}(= 1)$, n_{j0} и n_{e0} . Здесь электростатический потенциал φ равен нулю, и соблюдается зарядовая нейтральность

$$Z_i n_{i0} + Z_j n_{j0} = n_{e0}.$$

Слева и справа от области плазмы расположены вакуумные области $-\infty < x < -L$ и $L < x < \infty$. Надо описать эволюцию такого слоя плазмы при $t > 0$.

Для решения поставленной задачи было проведено численное моделирование расширения плазмы в вакуум с помощью метода частиц в ячейке. Процесс моделировался движением частиц в соответствии с системой уравнений (6.1), и тогда частицами были представлены все три компоненты плазмы (трёхкомпонентная модель), либо в соответствии с (6.2) с представлением частицами только ионных компонент плазмы, а электроны предполагались распределёнными по закону Больцмана (двухкомпонентная модель). Установленные в численных экспериментах зависимости проиллюстрированы здесь на примере расширения слоя плазмы, состоящей из ионов Ar^+ и F^- и электронов ($m_j = 0,476$, $\mu = -2,102$). Разные варианты отличались величиной начальной плотности отрицательных ионов n_{j0} , а также начальными значениями ионных температур. Толщина слоя $2L$ могла иметь одно из трёх значений: 50, 100 или 200.

6.5.1 Начальная стадия

Расширение слоя плазмы с холодными ионами $T_{i0} = T_{j0} = 0$ на первой начальной стадии процесса происходит точно так же, как и в случае плазмы, занимающей полупространство. На этой стадии возникают две волны разрежения, распространяющиеся от левой и от правой начальных границ плазмы $x = \pm L$ внутрь. В зависимости от числа Маха, они являются либо БУВР, либо просто осцилляторными волнами разрежения, передовое

возмущение которых движется со скоростью звука. (Здесь во всех вариантах мы будем иметь дело с БУВР.) В некоторый, зависящий от L , момент времени t_L две волны встречаются в точке $x = 0$. Картина процесса непосредственно перед этой встречей представлена на рисунке 6.24 и выглядит как комбинация двух течений, подобных течению, изображённому на рисунке 6.2. Все особенности последнего, естественно, проявляются и здесь. Видно, что в каждой БУВР положительные ионы движутся от центра системы на периферию, а отрицательные — наоборот, к центру системы.

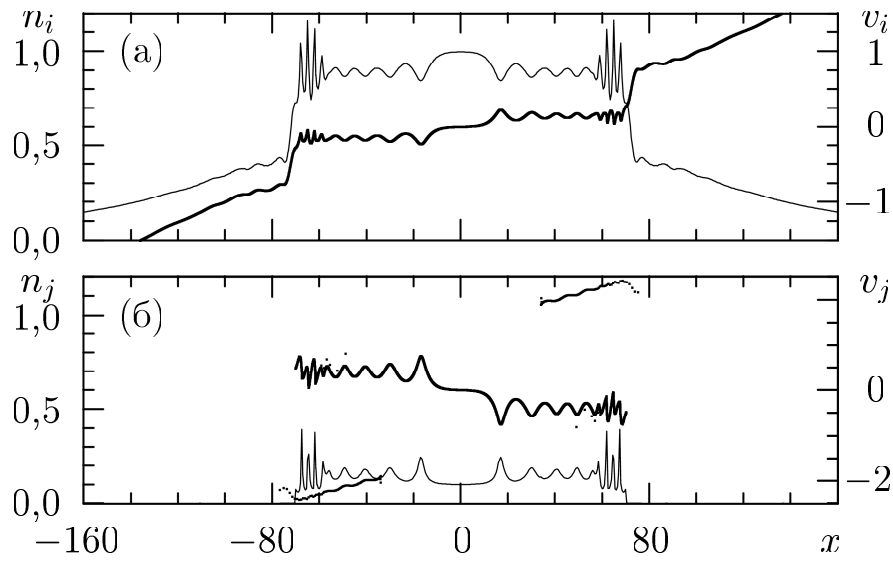


Рисунок 6.24. Плотности (тонкие кривые) и фазовые плоскости (точки, правые оси ординат) положительных (а) и отрицательных (б) ионов при $t = 70$ для случая $n_{j0} = 0,1$, $2L = 200$

На рисунке 6.24 мы снова видим неоднократно встречавшееся нам явление отражения ионов при $T_{i0} = 0$ (см. п. 4.2.2). Здесь отражаются отрицательные ионы (частицы со скоростями по абсолютной величине несколько больше 2). Область отрицательных ионов к рассматриваемому моменту времени заметно сократилась (от начального размера 200 до значения, меньшего 160), а положительные ионы, увлекаемые быстрыми электронами, заняли значительную пространственную область. При этом на периферии образовалась двухкомпонентная плазма, состоящая только из положительных ионов и электронов. Границы между областью трёхкомпонентной и областями двухкомпо-

нентных плазм довольно резкие. На границах плотность положительных ионов падает скачком до некоторого значения, установившегося в небольшой плато-подобной области (область 2 согласно п. 6.2.1). Последняя переходит в область, которая, как было показано выше, представляет собой обычную волну разрежения (область 3), возникающую при расширении двухкомпонентной плазмы в вакуум, с определённой поправкой на величину начальной плотности. Из рисунка 6.24 видно, что в волне разрежения положительные ионы испытывают ускорение, точно так же, как это имеет место в случае расширения электрон-ионной плазмы в вакуум. Отметим также, что рисунок 6.24 демонстрирует развитие обсуждавшейся выше двухпоточковой неустойчивости, порождающей коротковолновые осцилляции вблизи границ трёхкомпонентной плазмы.

6.5.2 Явление опрокидывания

В последующие моменты времени $t > t_L$ процесс вступает в следующую, вторую стадию, стадию взаимодействия БУВР. В это время вблизи точки $x = 0$ возникает недостаток положительных ионов, так как они уходят на периферию, и избыток отрицательных ионов, движущихся в волнах разрежения к центру системы. Некоторая часть отрицательных ионов проходит через точку $x = 0$ в область другой БУВР и далее движется от центра. Этому способствует электрическое поле, направленное так, чтобы уменьшить избыток отрицательных ионов и затормозить уход на периферию положительных ионов. В результате этого, через некоторое время в центре системы соотношение между положительными и отрицательными зарядами меняется на обратное. Соответственно этому меняется и направление движения частиц. Последующее развитие процесса подобным образом приводит к тому, что постепенно возрастает число потоков как положительных, так и отрицательных ионов. Переход к многопоточковости означает появление на функции распределения ионов нескольких максимумов (по терминологии [26] — кинетическое опрокидывание).

Проиллюстрируем сказанное результатами численного моделирования [239]. На рисунках 6.25–6.28 представлены данные, относящиеся к численному эксперименту при начальной плотности отрицательных ионов $n_{j0} = 0,1$ в

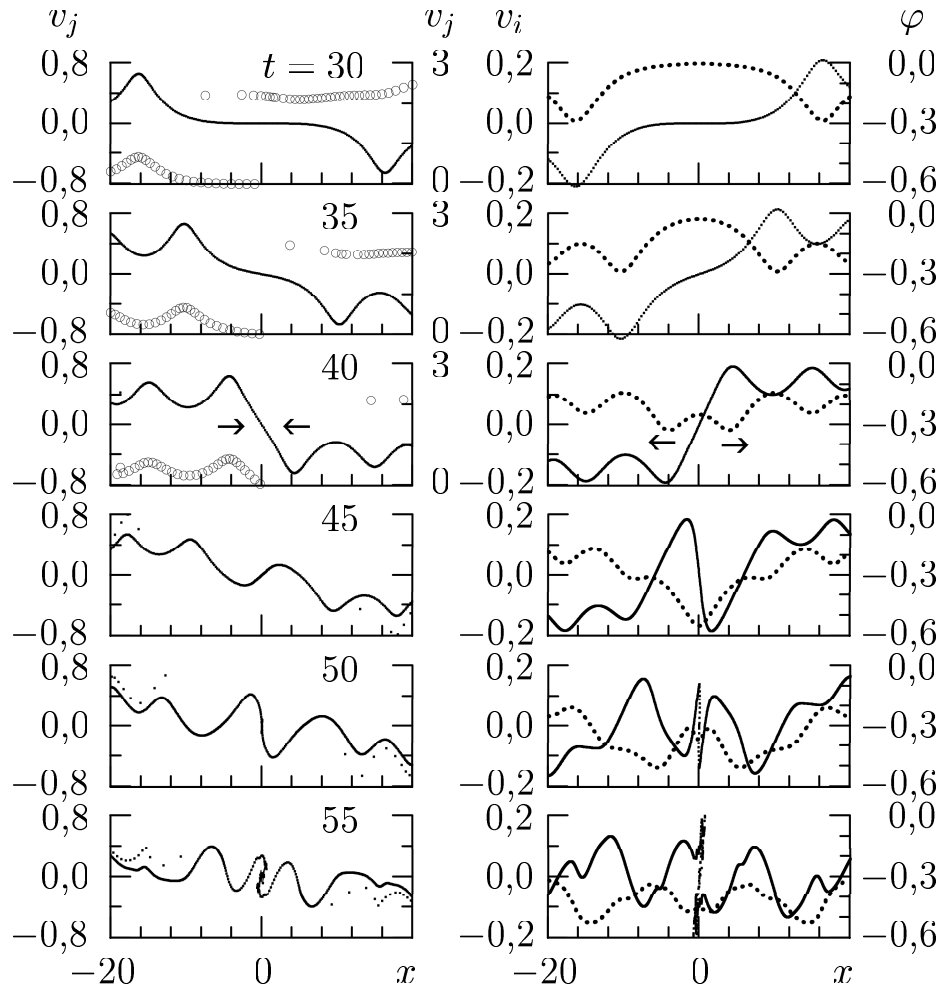


Рисунок 6.25. Фазовые плоскости (точки) отрицательных (слева) и положительных (справа) ионов, а также $\varphi(x)$ (пунктирные кривые справа, правые оси ординат) при разных t . Окружности на трех левых фазовых плоскостях представляют в другом масштабе левую волну сжатия отрицательных ионов и поток отражённых ионов (правые оси ординат). $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

случае более тонкого, чем на рисунке 6.24, слоя ($2L = 100$). Пространственные распределения потенциала и фазовые плоскости ионов даны на рисунке 6.25. На потенциале видны достаточно гладкие осцилляции. Что касается фазовых плоскостей, то, прежде всего, отметим, что на трех верхних рисунках слева положения точек, соответствующих левой волне отрицательных ионов, показаны в двух масштабах. Это сделано для того, чтобы продемонстрировать наличие отражённых от волны ионов (изображены окружностями). Из указанных рисунков видно, что от волны отразился сгусток ионов, и последующего отражения не наблюдается. Такой же сгусток отраженных отрицательных ионов, не

показанный на рисунке, возникает и от правой волны. Оба сгустка достаточно быстро проходят область, занятую отрицательными ионами, попадают в области двухкомпонентной электрон-ионной плазмы, где несколько затормаживаются за счёт сильного электрического поля волны разрежения, и далее довольно быстро уходят на периферию, не оказывая заметного влияния на процесс.

Рассмотрим фазовые плоскости основной массы частиц, представленные на рисунке 6.25. Анализируя их, можно проследить, как происходит переход к многопотоковости. Так, например, в момент времени $t = 40$ отрицательные ионы в области $x < 0$ имеют положительные скорости, а в области $x > 0$ — отрицательные, то есть движутся к центру (показано стрелками), а положительные ионы, наоборот, движутся от центра. К моменту времени $t = 45$ расположение фазовых точек вблизи $x = 0$ соответствует движению отрицательных ионов от центра, а положительных — к центру. Такие колебания в движении ионов, а также происходящее в дальнейшем значительное укрупнение фазовых кривых приводят к опрокидыванию последних. Со временем подобные явления начинают возникать и в других областях, и предпосылки для развития многопотокового движения постепенно охватывают значительную пространственную область.

В масштабе рисунка 6.25 видна общая картина процесса. Чтобы разрешить более мелкие детали мы представляем далее фазовые плоскости и пространственные распределения плотностей вблизи точки $x = 0$ с большим разрешением и в те моменты времени, когда начинает развиваться процесс опрокидывания. На рисунке 6.26 хорошо видно возникновение области трех значений скорости как отрицательных ($t = 49$), так и положительных ($t = 50$) ионов. С течением времени эта область расширяется, а фазовые кривые вблизи точки $x = 0$ закручиваются в спираль. За счёт этого к моменту времени $t = 52$ в центре системы образуется область пяти значений скорости положительных ионов. Что касается отрицательных ионов, то для них, кроме образования спиральной структуры на фазовой плоскости, хорошо видно появление узлов, в которых фазовая кривая $v_j(x)$ начинает ветвиться. Так при $t = 50$ возникают две небольшие ветви, которые в последующие моменты времени удлиняются и сами подвергаются опрокидыванию. Ветвление фазовой кривой положительных

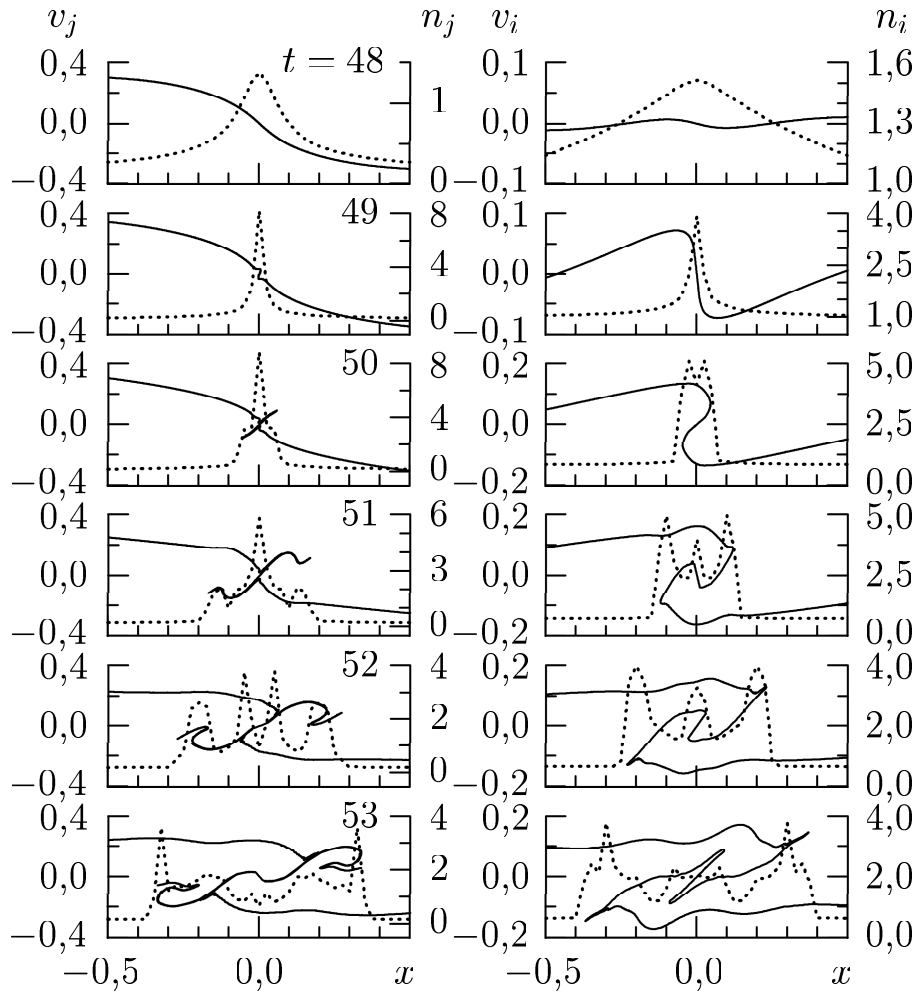


Рисунок 6.26. Фазовые плоскости (сплошные кривые) и пространственные зависимости плотностей (пунктирные кривые, правые оси ординат) отрицательных (слева) и положительных (справа) ионов в разные моменты времени вблизи центра системы для случая $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

ионов начинается несколько позже. Сравнение зависимостей для положительных и отрицательных ионов показывает, что ветвление $v_j(x)$ вызвано притяжением положительных ионов, плотность которых имеет локальные максимумы в точках, соответствующих концам ветвей, то есть конечным точкам в потоках отрицательных ионов, оторванных от основной спиралевидной структуры.

Анализируя данные рисунка 6.26, можно установить, что резкое повышение ионных плотностей происходит в точках возврата фазовых кривых, то есть там, где производные от скорости по координате принимают бесконечные по величине значения. В этих точках, называемых каустиками, сливаются разные потоки [254]. Плотность лёгких отрицательных ионов в каустиках может

превышать начальное значение в несколько десятков раз. В несколько меньшей степени, всего в несколько раз, превосходят начальную величину пиковые значения плотности положительных ионов. С течением времени число каустик увеличивается, они занимают всё большую пространственную область, число потоков ионов продолжает возрастать, и появляются новые области опрокидывания. Плотности обоих сортов ионов приобретают вид ряда пиков, разделённых областями относительно небольшого изменения плотности (рисунок 6.27), а скорости как положительных, так и отрицательных ионов испытывают большой разброс (рисунок 6.28). В целом, такое кинетическое размешивание представляет собой постепенное увеличение числа потоков и числа областей

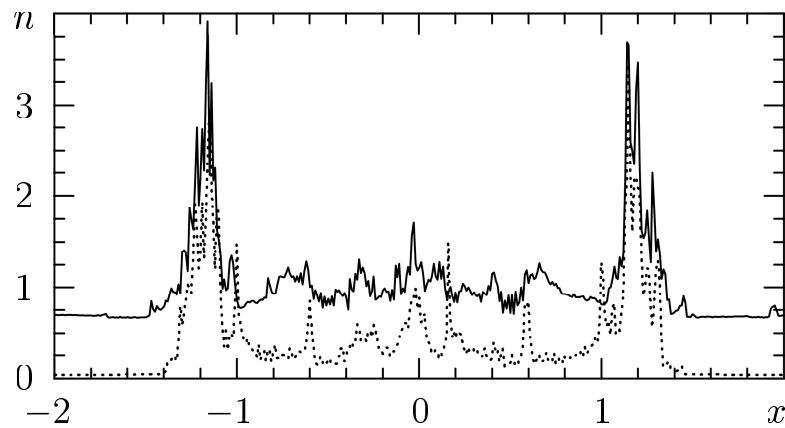


Рисунок 6.27. Зависимости от x плотностей положительных (сплошная кривая) и отрицательных (пунктирная кривая) ионов в момент времени $t = 60$ для случая $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

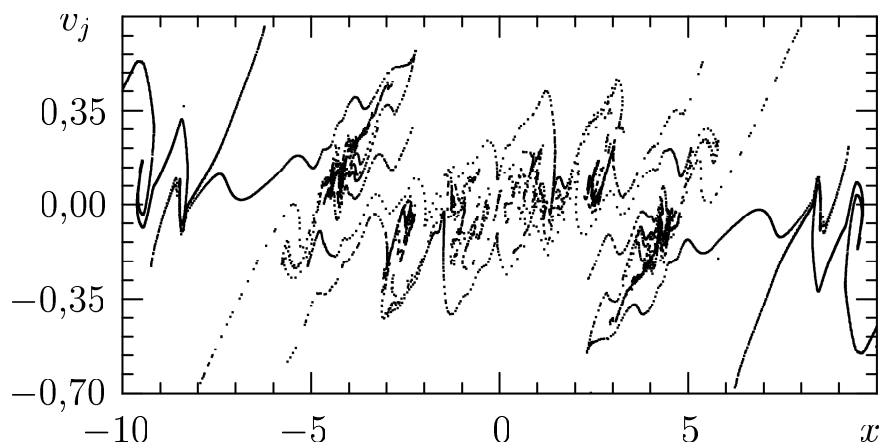


Рисунок 6.28. Фазовая плоскость отрицательных ионов при $t = 70$ для случая $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

опрокидывания.

Численные эксперименты, проведенные при другом ионном составе: $m_j = 3,657$ (ионы Ar^+ и SF_6^-), дали примерно такую же картину течения. Отличие от основного рассматриваемого здесь случая с $m_j = 0,476$ (ионы Ar^+ и F^-), при котором отрицательные ионы легче положительных, состоит в более позднем начале процесса опрокидывания ($t \sim 130$ при $n_{j0} = 0,1$).

Основные особенности явления опрокидывания сохраняются и при учёте электронного движения. На рисунке 6.29 представлены данные, полученные в численном эксперименте, проведенном по трёхкомпонентной модели, включающей модельные электроны. Видно развитие многопоточности и образование спиралеподобных структур на фазовых плоскостях ионов, а также возникновение пиковых выбросов ионных плотностей. Так, при $t = 40$ плотность отрицательных ионов в центре системы превышает в десятки раз начальную плотность. Видно ветвление фазовой кривой $v_j(x)$.

Рассмотренное явление опрокидывания в некотором отношении аналогично явлениям, происходящим при развитии джинсовской неустойчивости

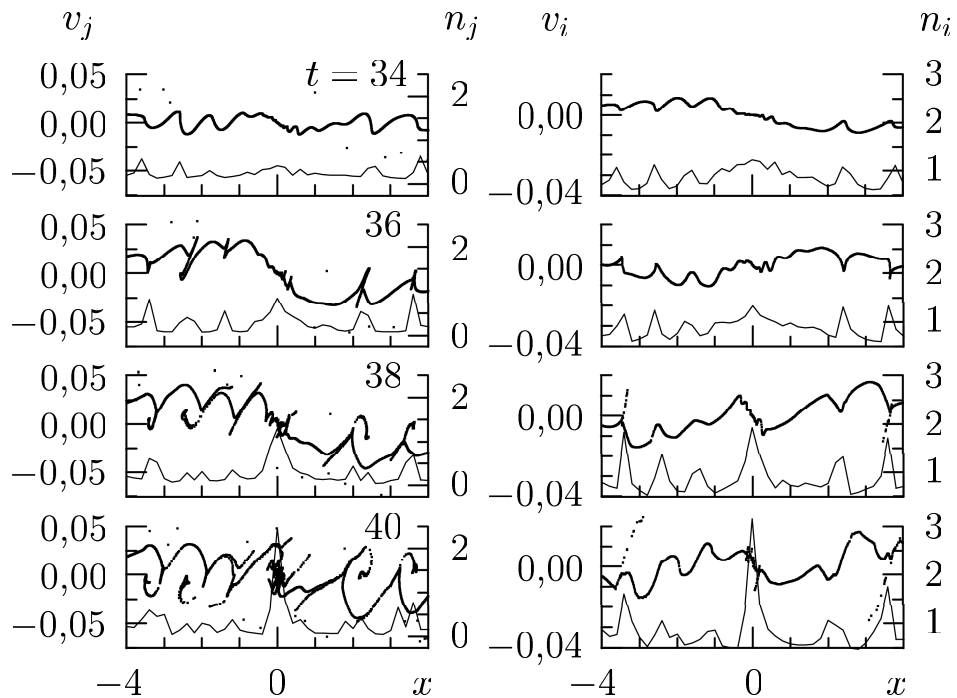


Рисунок 6.29. Фазовые плоскости (точки) отрицательных (слева) и положительных (справа) ионов и распределения плотностей (кривые, правые оси ординат) в разные моменты времени при $T_{i0} = T_{j0} = 0$, $n_{j0} = 0,1$, $2L = 50$

в самогравитирующей тёмной материи. Последние подробно исследованы численно и аналитически в [213]. В этом случае движение вещества в центр с последующим опрокидыванием происходит за счёт гравитации. Число потоков со временем возрастает, а фазовые кривые закручиваются в спираль. Точки слияния потоков, каустики, распространяются от центра, увеличивая области многопотоковости. В этих точках возникают значительные пики плотности.

Сравнение процессов в плазме с отрицательными ионами и в бездиссипативном самогравитирующем веществе показывает, что в обоих случаях процесс опрокидывания происходит при встречном движении потоков частиц одного сорта. В плазме таковыми на начальном этапе являются потоки отрицательных ионов, движущихся с двух сторон в центр. При этом положительные ионы движутся от центра в противоположных направлениях. Затем за счёт нарастающего электрического поля положительные ионы также начинают двигаться к центру навстречу друг другу, и опрокидывание развивается и в среде положительных ионов. Отметим, что в самогравитирующем веществе фазовая кривая во все моменты времени после опрокидывания имеет вид правильно свёрнутой в спираль линии. В случае плазмы с отрицательными ионами фазовые кривые ионов сворачиваются в фигуру, которую только условно можно назвать спиралью. При этом на фазовых кривых появляются узлы, от которых отходят ветви, отдельные потоки частиц. Такое различие обусловлено различием в характере действующих сил. Если в самогравитирующем веществе на все частицы действуют только силы притяжения, то в плазме с отрицательными ионами силы электрического поля действуют по-разному на каждый сорт частиц. В целом, переход к многопотоковому движению в обоих случаях происходит примерно по одному сценарию.

6.5.3 Поздние стадии

В результате развития многопотоковости и неустойчивости, которые наблюдаются на рассмотренной выше второй стадии процесса, первоначально холодные отрицательные ионы приобретают существенный разброс скоростей. При этом они сохраняют заметную потоковую скорость в направлении центра

$x = 0$. Поэтому на первых двух стадиях процесс выглядит как постепенное сжатие области, занятой основной массой отрицательных ионов. В случае $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$ минимальный размер этой области достигается при $t \sim 80 - 90$ и составляет примерно 0,4 от первоначального размера слоя. Соответственным образом возрастает и средняя плотность отрицательных ионов. Средняя плотность положительных ионов здесь также в 3–4 раза выше, чем в соседних областях двухкомпонентной плазмы. Однако скачок потенциала на границах трёхкомпонентной плазмы к этому моменту времени оказывается не так велик, как ранее. Распределение потенциала становится более плавным, хотя и содержит заметные осцилляции. Те отрицательные ионы, которые в процессе сжатия приобрели достаточно большую скорость, оказываются способными преодолеть сопротивление заметно понизившегося здесь электрического поля волны разрежения. Они движутся в сторону двухкомпонентной плазмы, отодвигая в ту же сторону границу области отрицательных ионов. Процесс вступает в третью стадию, стадию расширения отрицательных ионов. Развитие процесса на разных стадиях иллюстрирует рисунок 6.30 [240]. Хорошо видно, что со временем происходит не только изменение ширины области, занятой отрицательными ионами, но и заметная хаотизация их скоростей на второй стадии и последующее, на третьей стадии, формирование «полосы» диапазона скоростей отрицательных ионов, которая

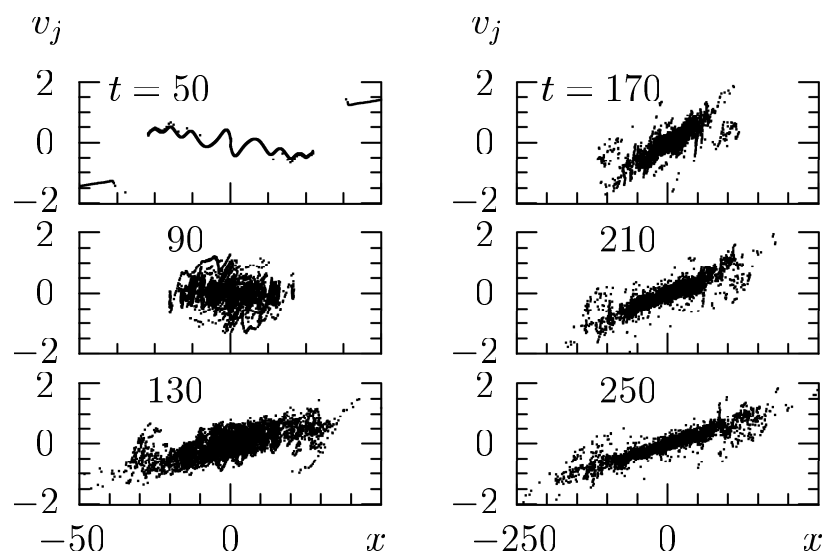


Рисунок 6.30. Фазовые плоскости отрицательных ионов в разные моменты времени для случая $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

постепенно сужается и уменьшает угол своего наклона за счёт расширения.

На третьей стадии процесс постепенно выходит на некоторый регулярный режим. Этот режим характеризуется тем, что плотности положительных и отрицательных ионов, имеющие максимальные значения вблизи точки $x = 0$, падают с ростом $|x|$ почти линейно, а их разность $n_i - n_j = n_e(t)$ зависит от времени, но почти не зависит от координаты в области, где присутствуют все три компоненты. Здесь со временем n_e падает, и $n_i \rightarrow n_j$, то есть трёхкомпонентная плазма постепенно превращается в двухкомпонентную ион-ионную плазму, а процесс переходит на четвёртую стадию, стадию расширения ион-ионной плазмы. Такое явление будет подробно рассмотрено ниже.

6.5.4 Влияние ионных температур

При небольших значениях температур положительных и отрицательных ионов, T_{i0} и T_{j0} , их влияние проявляется в том, что несколько понижаются пики ионных плотностей в областях опрокидывания, а само явление опрокидывания оказывается менее чётко выраженным. На ионных фазовых плоскостях картина многопоточности смазывается тепловым разбросом. Как и в случае холодных ионов, с ростом n_{j0} увеличивается роль неустойчивости, которая может стать основным фактором на первых стадиях процесса. В частности, при $n_{j0} = 0,9$ практически сразу после начала расширения плазмы возникает сильная неустойчивость, за проявлениями которой процессы опрокидывания вообще не видны. Заметим, что в этом случае электронов достаточно мало, они быстро уходят из центральной области, и процесс так же быстро выходит на стадию расширения ион-ионной плазмы.

В численных экспериментах при небольших ионных температурах видно образование сгустка отражённых отрицательных ионов от каждой из двух БУВР. Проходя довольно быстро область трёхкомпонентной плазмы, отражённые ионы попадают в область двухкомпонентной плазмы с тормозящим отрицательные ионы электрическим полем. Здесь скорости отражённых ионов резко падают (рисунок 6.31), а через некоторое время образование отражённых ионов прекращается, так как после столкновения

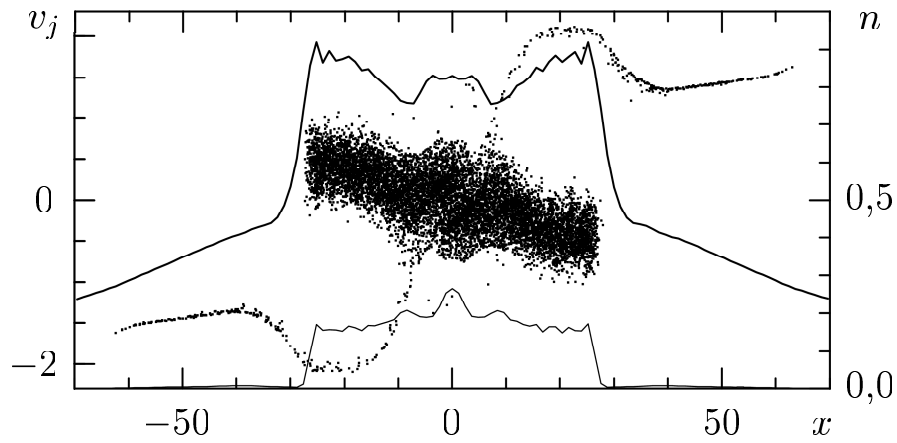


Рисунок 6.31. Фазовая плоскость отрицательных ионов (точки) и плотности (правая ось ординат) n_i (толстая сплошная кривая) и n_j (тонкая сплошная кривая); $T_{i0} = T_{j0} = 0,01$, $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$, $t = 50$

двух БУВР исчезают их потенциальные барьеры. В результате в системе возникает два сгустка отражённых ионов с широким разбросом скоростей, которые движутся на периферию через плазму, состоящую из положительных ионов и электронов. Они практически не влияют на процессы в центральной области, где до некоторого момента времени ($t \sim 90$ в случае $m_j = 0,476$, $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$) продолжается уменьшение области отрицательных ионов. На третьей стадии процесса плотности положительных и отрицательных ионов имеют лишь небольшие повышения в центре на фоне почти равномерного распределения частиц в области трёхкомпонентной плазмы. Вне этой области плотности ионов обоих знаков резко падают.

Влияние температуры положительных ионов T_{i0} на процесс достаточно очевидный: при более высоких T_{i0} увеличивается тепловое расширение положительных ионов, и процесс ускоряется. Что касается температуры отрицательных ионов T_{j0} , то её влияние будет выражаться в некоторой перестойке профиля течения. Это связано с тем, что сжатие отрицательных ионов на начальных стадиях процесса может в той или иной степени компенсироваться их тепловым расширением при достаточной величине T_{j0} . При конечных значениях T_{j0} всегда некоторая доля отрицательных ионов будет способна преодолеть потенциальный барьер на границе трёх- и двухкомпонентной плазм. Быстрые отрицательные ионы будут уходить на

периферию. В таком случае, в строгом смысле слова, мы не можем говорить о сжатии отрицательных ионов. Хотя основная масса отрицательных ионов действительно будет сжиматься, область, включающая все отрицательные ионы, будет расширяться за счёт быстрых частиц.

Проиллюстрируем перестройку профиля плотности отрицательных ионов за счёт влияния T_{j0} расчётами вариантов с $T_{i0} = 0$. Распределения $n_j(x)$ при $t = 50$ (первая стадия) и $t = 100$ (вторая стадия) представлены на рисунке 6.32. Видно, что на ранних стадиях в центральной области происходит сжатие отрицательных ионов. Вместе с тем «хвосты» распределений плотности n_j , появляющиеся при $T_{j0} \neq 0$, распространяются тем дальше за пределы первоначальной области плазмы $-L \leq x \leq L$, чем выше T_{j0} . При малых T_{j0} на стадии опрокидывания распределение плотности ионов сильно неоднородно с пиковыми выбросами. При более высоких T_{j0} (0,05 и выше) тепловое движение ионов сглаживает профиль плотности отрицательных ионов. В целом, с ростом T_{j0} процесс расширения ускоряется.

Поскольку с ростом температуры отрицательных ионов такие понятия, как сжатие отрицательных ионов и граница между областями трёх- и

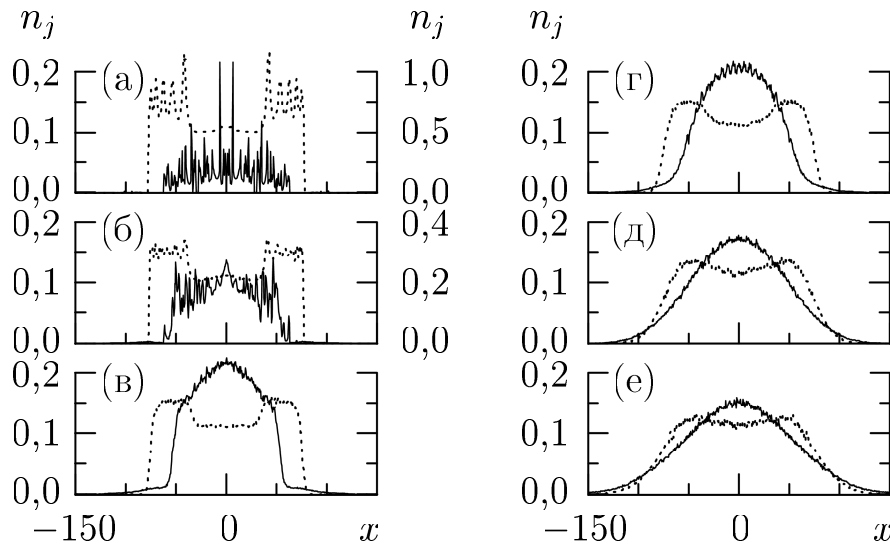


Рисунок 6.32. Пространственные распределения плотности отрицательных ионов в моменты времени $t = 50$ (пунктирные кривые) и $t = 100$ (сплошные кривые) при разных значениях T_{j0} : (а) $T_{j0} = 0$, правая ось ординат при $t = 100$; (б) $T_{j0} = 0,01$, правая ось ординат при $t = 100$; (в) $T_{j0} = 0,05$; (г) $T_{j0} = 0,1$; (д) $T_{j0} = 0,3$; (е) $T_{j0} = 0,5$. $n_{j0} = 0,1$, $2L = 200$, $T_{i0} = 0$

двухкомпонентной плазм, требуют оговорок и уточнений, то предложенное выше строгое разделение процесса на чётко фиксируемые периоды, стадии, также может оказаться не вполне определённым. Так, при очень высоких значениях T_{j0} отрицательные ионы, как и положительные ионы и электроны, могут начать расширяться практически сразу после начала процесса. В этом случае исчезает возможность образования ион-ионной плазмы.

Рассмотрим более подробно процесс при относительно высоких ионных температурах, предполагая, что они одинаковы для обоих сортов ионов $T_{i0} = T_{j0} = T_0$. Численный эксперимент показывает, что, например, при $T_0 = 0,1$ число отражённых отрицательных ионов увеличивается настолько, что они, попадая в область двухкомпонентной плазмы, формируют там заметный «горб» плотности. На соответствующее изменение электрического поля реагируют положительные ионы, образуя свой «горб» плотности. Область, занятая отрицательными ионами, расширяется: на её границах появляются две небольшие подобласти, в которых находятся отражённые ионы. Это иллюстрирует рисунок 6.33. Видно, что с ростом температур процесс расширения ускоряется, а профили плотностей становятся более гладкими. Хотя при больших температурах отрицательных ионов плазму на периферии,

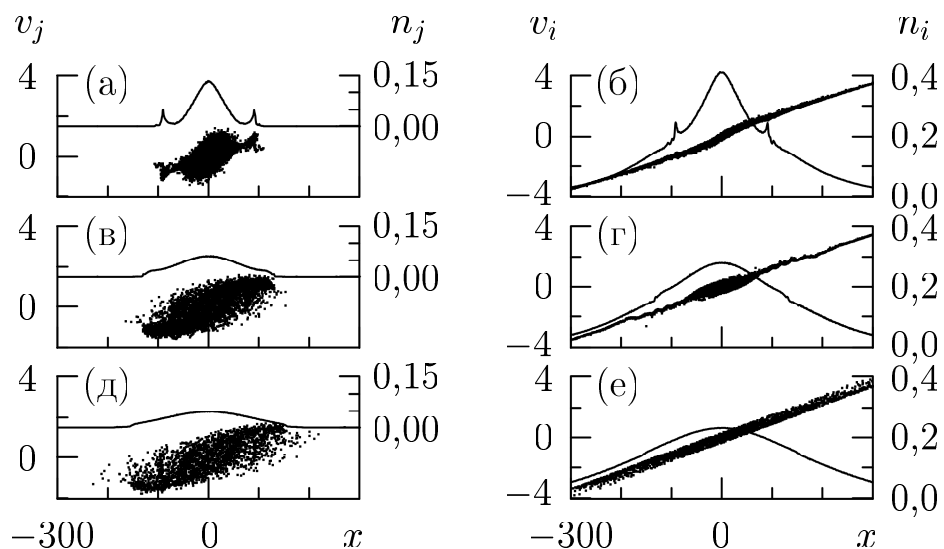


Рисунок 6.33. Фазовые плоскости (точки) и плотности (сплошные кривые, правые оси ординат) отрицательных (слева) и положительных (справа) ионов в момент времени $t = 100$ при разных значениях $T_{i0} = T_{j0} = T_0$: (а) и (б) $T_0 = 0,1$; (в) и (г) $T_0 = 0,5$; (д) и (е) $T_0 = 1$. $n_{j0} = 0,1$, $2L = 100$

строго говоря, нельзя назвать двухкомпонентной из-за наличия очень малого количества быстрых отрицательных ионов, происходящие здесь процессы, по существу, соответствуют расширению в вакуум двухкомпонентной плазмы ($n_e \approx n_i$), имеющему вид обычной волны разрежения.

Из рисунка 6.33 видно, что положительные ионы имеют тем бóльшую скорость, чем дальше они находятся от центра, то есть известный эффект ускорения положительных ионов здесь присутствует при всех $T_{i0} = T_{j0}$.

6.6 Расширение ион-ионной плазмы в вакуум

Важным частным случаем плазмы с отрицательными ионами является плазма, в составе которой доля электронов очень мала. Их присутствием можно пренебречь и считать плазму двухкомпонентной, состоящей только из ионов, положительных и отрицательных. Существенной особенностью такой ион-ионной плазмы является то, что здесь по сравнению с электрон-ионной плазмой отношение массы тяжелой частицы к массе легкой частицы не очень велико. Характерные времена тех или иных процессов при переходе к ион-ионной плазме значительно меняются, и появляются новые эффекты. Вследствие этого решения ряда задач, полученные для двухкомпонентной электрон-ионной плазмы, не могут быть использованы для двухкомпонентной ион-ионной плазмы. В частности, явление ускорения ионов при расширении электрон-ионной плазмы в вакуум в расширяющейся ион-ионной плазме может выглядеть как ускорение тяжелых ионов, вне зависимости от знака заряда. Более быстрое продвижение легких ионов (если их температура не слишком мала) в вакуум создает электрическое поле, ускоряющее тяжелые ионы.

В последнее время значительное внимание привлекает ион-ионная плазма, в которой ионы разных компонент различаются только знаками зарядов, но имеют примерно одну и ту же массу. Изучение такой парно-ионной плазмы важно не только само по себе. Оно может быть полезным для понимания явлений, происходящих в электрон-позитронной плазме. Плазма, состоящая из электронов и позитронов, находится в некоторых астрофизических объектах (нейтронные звезды, активные ядра

галактик, магнитосферы пульсаров) [255]. Электрон-позитронные пары могут появляться при воздействии сверхмощного лазерного излучения на вещество [256]. В статье [225] предсказывается рождение пар в грозových разрядах, возникающих в результате пробоя на убегающих электронах. Аннигиляция частиц затрудняет исследование электрон-позитронной плазмы. Такой проблемы не возникает в парно-ионной плазме. Она может служить моделью, на которой можно исследовать, например, волновые явления в электрон-позитронной плазме, причем на достаточно больших временах.

Ниже мы рассматриваем важную задачу о расширении ион-ионной плазмы в вакуум. Мы используем численное моделирование, при котором две ионные компоненты представлены модельными частицами с реальным отношением масс ионов разных знаков.

6.6.1 Постановка задачи и частные решения

Задачу о расширении в вакуум бесстолкновительной ион-ионной плазмы будем формулировать стандартным образом [227]. В начальный момент времени $t = 0$ в левом полупространстве $-\infty < x < 0$ находится однородно распределенная плазма, состоящая из положительных ионов с плотностью n_{i0} и температурой T_{i0} и отрицательных ионов с плотностью n_{j0} и температурой T_{j0} . Плазма предполагается в целом квазинейтральной:

$$Z_i n_{i0} + Z_j n_{j0} = 0. \quad (6.23)$$

Правое полупространство $0 < x < \infty$ при $t = 0$ представляет собой вакуум. Задача состоит в исследовании эволюции системы при $t > 0$.

Будем рассматривать движение ион-ионной плазмы в одномерной постановке в кинетическом приближении. Система уравнений, описывающая ион-ионную плазму, может быть получена из системы уравнений (6.2). При этом надо положить $n_{e0} = 0$ и рассматривать все величины нормированными на единицы (1.6), в которых $n_* = n_{i0}$, $Z_* = Z_i$, а вместо T_{e0} используется T_{i0} . Обычно за единицу массы мы будем принимать массу положительного иона $m_* = m_i$. Однако в некоторых случаях надо различать ионы не столько по

знаку заряда, сколько по величине массы — тяжелые или легкие. При этом может оказаться, что выбор $m_* = m_j$ более удобен. Изменение нормировки всегда будет особо оговариваться. Исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial f_j}{\partial t} + v \frac{\partial f_j}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -(Z_i n_i + Z_j n_j), \\ n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, v, t) dv, \quad n_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, v, t) dv. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Здесь параметр μ определен по (6.3). Система уравнений (6.24) должна быть решена при описанных выше начальных условиях и при очевидных граничных условиях при $x \pm \infty$: на левой границе плазма остается невозмущенной, а на правой границе функции распределения ионов убывают до нуля. В отличие от электрон-ионной плазмы, здесь в течение рассматриваемого промежутка времени не возникает проблем с уходом ионов через правую границу счетной области. Поэтому мы полагаем электрическое поле равным нулю как на левой невозмущенной границе, так и на правой вакуумной границе.

Рассматриваемая задача существенно отличается от аналогичной задачи для электрон-ионной плазмы. Очень большое различие в массах ионов и электронов приводит к тому, что процесс расширения в вакуум электрон-ионной плазмы оказывается сильно несимметричным относительно ролей электронной и ионной компонент плазмы. За счет значительно бóльшей скорости электроны обгоняют ионы при расширении в вакуум, что приводит к появлению электрического поля, направленного в сторону вакуума. Это поле эволюционирует согласованно с возникающими неоднородностями в пространственном распределении частиц и оказывается главным фактором процесса. В поле электроны замедляются, а ионы ускоряются.

В отличие от этого процесса, при расширении в вакуум ион-ионной плазмы различие между движениями двух ионных компонент плазмы может оказаться значительно меньшим. Более того, вместо ускорения положительных ионов отрицательной компонентой, может наблюдаться

обратный случай, когда тяжелые отрицательные ионы ускоряются за счет энергии легких положительных ионов. Очевидно, что имеется особый случай, когда обе ионные компоненты оказываются в равном положении. Этому случаю соответствует значение $\mu = -1$. Пусть, например, $Z_j = -Z_i$ и можно считать, что $m_j = m_i$, то есть плазма состоит из одних и тех же частиц, но половина из них имеет положительный заряд, а другая половина — равный по величине отрицательный заряд (парно-ионная плазма). Если при этом еще и начальные распределения частиц по скоростям обоих сортов одинаковы (например, оба сорта ионов имеют максвелловские распределения с равными температурами: $T_{j0} = T_{i0}$), то обе компоненты плазмы оказываются полностью равноправными относительно процесса расширения. Можно ожидать, что в области расширения функции распределения обоих сортов ионов будут изменяться одинаково, то есть $f_i(x, v, t) = f_j(x, v, t)$. В этом случае кинетические уравнения из системы (6.24) в сумме дают кинетическое уравнение свободного движения нейтральных частиц для полной функции распределения $f_i + f_j$ всех частиц без различия зарядов, вместо которой удобнее использовать ее половинное значение — «усредненную» функцию распределения $f_a = (f_i + f_j)/2$. Она подчиняется уравнению

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial x} = 0. \quad (6.25)$$

Очевидно, что здесь такому же уравнению удовлетворяют и функции распределения f_i и f_j , а электрическое поле не влияет на движение частиц и может быть положено равным нулю во всей области.

В кинетической теории газов движение, описываемое уравнением (6.25), обычно именуется свободно-молекулярным. В нашем случае речь идёт о приближенном описании движения ионов без учёта их заряда. Решение задачи Коши для этого уравнения определяется формулой [1]:

$$f_a(x, v, t) = f_a(x - vt, v, 0), \quad (6.26)$$

где $f_a(x, v, 0)$ — заданная начальная функция распределения. Решение (6.26) является следствием того, что функция распределения сохраняется вдоль траекторий частиц, являющихся характеристиками уравнения (6.25).

Из решения (6.26), как и было выше предположено, следует, что равенство функций распределения в области расширения $f_i(x, v, t) = f_j(x, v, t)$ возникает при их равенстве в начальный момент:

$$f_i(x, v, 0) = f_j(x, v, 0). \quad (6.27)$$

Таким образом, в особом случае, при котором $\mu = -1$ и выполняется условие (6.27), формула (6.26) дает точное выражение одновременно для всех функций распределения $f_a(x, v, t) = f_i(x, v, t) = f_j(x, v, t)$.

По существу, задача о расширении ион-ионной плазмы в вакуум в этом случае сводится к задаче о расширении в вакуум газа нейтральных частиц. Запишем решение последней в предположении, что в начальный момент времени $t = 0$ нейтральные частицы однородно заполняют левое полупространство $-\infty < x \leq 0$, а правое полупространство $0 < x < \infty$ представляет собой вакуумную область. При этом нейтральные частицы имеют максвелловское распределение по скоростям. В этом случае условие (6.27) означает равенство тепловых скоростей ионов обоих сортов в невозмущённом состоянии и может быть сформулировано в виде соотношения:

$$T_{i0}/m_i = T_{j0}/m_j. \quad (6.28)$$

Отсюда следует, что $T_{j0} = m_j$, поскольку в принятой здесь нормировке $m_i = 1$, $T_{i0} = 1$. Так как мы полагаем, что $Z_j = -Z_i$, величина $n_{j0} = n_{i0} = 1$ согласно (6.23). Кроме того, поскольку зарядовое число отрицательных ионов обычно равно -1 , мы ограничимся рассмотрением случая $Z_i = 1$. С учётом этих замечаний начальное условие запишется в виде:

$$f_a(x, v, 0) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \exp(-v^2/2) & \text{при } -\infty < x \leq 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (6.29)$$

где вместо индекса a можно поставить индексы i или j .

Решение (6.26) соответствует тому, что частицы свободно движутся с постоянной скоростью. Если в начальный момент времени $t = 0$ в некоторой точке x_0 находилось $f_a(x_0, v, 0)$ частиц (на единичный интервал скорости), имеющих скорость v , то к моменту времени t все эти частицы переместятся в точку $x = x_0 + vt$ и тем самым перенесут сюда то же значение функции

распределения $f_a(x_0, v, 0)$. Поскольку в левом полупространстве функция распределения при любом x_0 максвелловская, то в точку x в момент времени t из левого полупространства будут перенесены значения максвелловской функции распределения, соответствующие разным x_0 из диапазона $-\infty < x_0 < 0$. Однако это не значит, что функция распределения $f_a(x, v, t)$ будет полностью максвелловской, так как из правого полупространства, вакуума, ничего не переносится. В точку x попадут только те частицы, скорости которых заключены в интервале $x/t \leq v < \infty$, причем минимальная скорость, равная x/t , переносится частицами с начальной координатой $x_0 = 0$. В результате распределение частиц оказывается обрезанным слева:

$$f_a(x, v, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } v < x/t, \\ (2\pi)^{-1/2} \exp(-v^2/2) & \text{при } x/t \leq v < \infty. \end{cases} \quad (6.30)$$

В точке $x = 0$ при любом $t > 0$ частицы имеют полумаксвелловское распределение и все они движутся в положительном направлении.

Моменты функций распределения $f_a(x, v, t)$, $f_i(x, v, t)$ и $f_j(x, v, t)$, определённым по (6.30), нетрудно вычислить, следуя (6.24), (1.11) и (1.12):

$$\begin{aligned} n_i &= n_j = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\hat{\tau})], \\ V_i &= V_j = \frac{1}{n_i} (2\pi)^{-1/2} \exp(-\hat{\tau}^2), \\ J_i &= J_j = n_i V_i = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\hat{\tau}^2), \\ \mathcal{E}_i &= \frac{1}{2} \left[1 - \Phi(\hat{\tau}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \hat{\tau} \exp(-\hat{\tau}^2) \right], & \mathcal{E}_j &= T_{j0} \mathcal{E}_i, \\ Q_i &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + \hat{\tau}^2) \exp(-\hat{\tau}^2), & Q_j &= T_{j0} Q_i, \\ T_i &= \frac{1}{n_i} (\mathcal{E}_i - n_i V_i^2), & T_j &= \frac{1}{n_j} (\mathcal{E}_j - m_j n_j V_j^2), \\ \mathcal{G}_i &= Q_i - n_i V_i^3 - 3n_i T_i V_i, & \mathcal{G}_j &= Q_j - m_j n_j V_j^3 - 3n_j T_j V_j, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{t}$$

представляет собой автомодельную переменную. Автомодельный характер течения вполне естественен, так как в задаче не содержится характерных величин с размерностью длины.

В общем случае $\mu \neq -1$ ионные компоненты плазмы неравноправны, и система уравнений (6.24) не приводится к простому виду. Но абсолютное значение параметра μ в ион-ионной плазме, значительно меньше, чем та же величина, рассчитанная для электрон-ионной плазмы. Поэтому и влияние электрического поля, усиливается коэффициентом μ во втором уравнении системы (6.24), существенно снижается в ион-ионной плазме по сравнению со случаем электрон-ионной плазмы. Из-за этого движение ион-ионной плазмы может не сильно отличаться от движения системы нейтральных частиц.

6.6.2 Сравнение аналитического и численного решений

Сравним полученные выше аналитические зависимости с результатами численного моделирования по методу частиц в ячейке. Частицами моделировалось движение обеих ионных компонент. Были проведены расчеты для разных ионных составов с реальными отношениями масс положительных и отрицательных ионов, приведенных в Таблице 6.1, а также для $\mu = -200$. В последнем случае численный эксперимент моделирует движение электрон-ионной плазмы. Во всех вариантах полагалось, что $Z_j = -Z_i = -1$.

Отметим, что как аналитические решения (6.30) и (6.31), так и показанные ниже численные результаты свидетельствуют об автомодельности процесса. Профили течений, полученные численно для разных моментов времени, накладываются с высокой точностью на одну и ту же кривую, если в качестве независимой переменной использовать автомодельную переменную $\tau = x/t$. Поэтому далее на рисунках профили показаны в виде зависимостей от τ .

Сначала рассмотрим случай, поддающийся точному аналитическому описанию, а именно случай, когда обе ионные компоненты имеют начальные максвелловские распределения по скоростям, и при этом выполняется соотношение (6.28). Это позволит убедиться в правильности полученных решений и продемонстрировать точность численных решений (рисунки 6.34 и 6.35).

Наиболее полную информацию дает функция распределения. Согласно решению (6.30) в области расширения функция распределения ионов любого сорта в точке x в момент времени t будет иметь вид максвелловского

распределения, обрезанного слева при скорости $v = x/t$. Справедливость такого решения видна из рисунка 6.34. Здесь представлена усредненная по пространственному интервалу $\Delta x = 5$ функция распределения, вычисленная в численном эксперименте в точках x , равных -120 , -40 , 40 и 120 в момент времени $t = 80$. Численные расчеты подтверждают формулу (6.30) и для любого другого ионного состава, если только выполняется условие (6.28).

Точность полученных решений демонстрирует рисунок 6.35. Несмотря

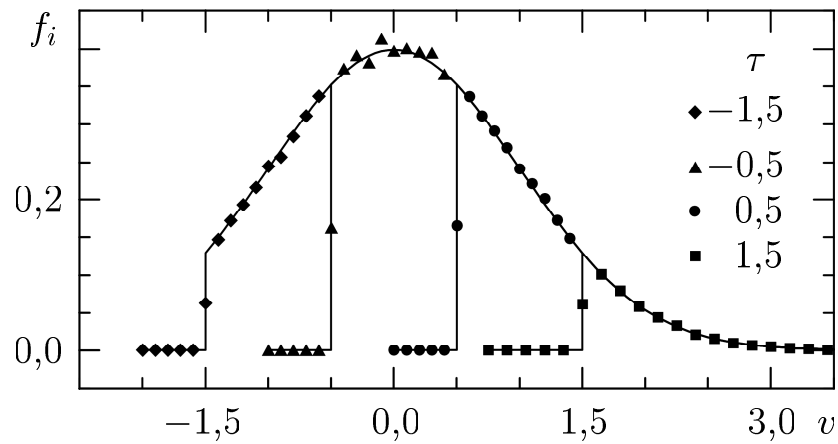


Рисунок 6.34. Функция распределения положительных ионов, полученная в численном эксперименте, при разных τ (символы) в сравнении с аналитической зависимостью (6.30) (сплошные кривые), построенной при тех же значениях τ , для варианта $m_j = 0,476$, $T_{j0} = 0,476$, $t = 80$

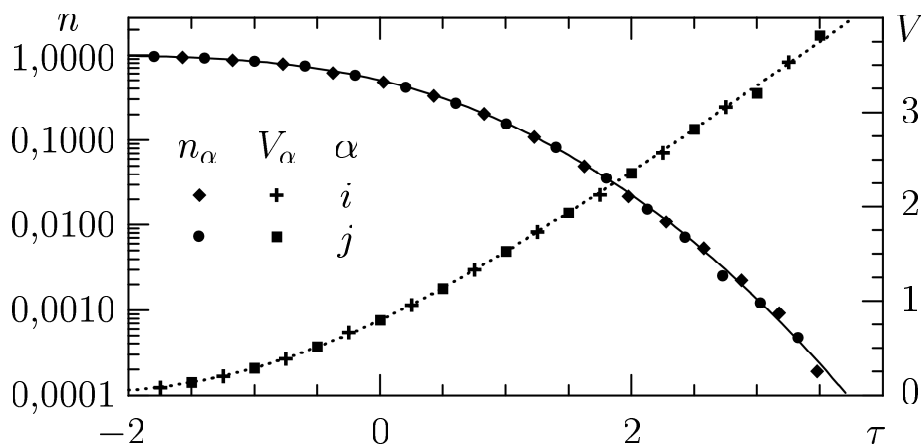


Рисунок 6.35. Зависимости плотности n и потоковой скорости V частиц от τ для положительных ионов при $m_j = 18,43$, $T_{j0} = 18,43$ и для отрицательных ионов при $m_j = 0,267$, $T_{j0} = 0,267$ в сравнении с аналитическими зависимостями (6.31) (сплошная кривая для n и пунктирная кривая для V)

на то, что здесь значение плотности частиц меняется на четыре порядка, численные и аналитическая зависимости плотности частиц от τ хорошо совпадают друг с другом. Численные и аналитическая зависимости от τ для потоковой скорости также демонстрируют хорошее совпадение.

Очевидно, что здесь при полном согласии между аналитическими и численными результатами по определению функции распределения не только плотность и потоковая скорость, но и другие величины, такие как энергия, температура, тепловой поток и поток энергии могут быть вычислены по формулам (6.31), и численный эксперимент это полностью подтверждает.

6.6.3 Случай $T_{i0} = 1$, $T_{j0} = 0$

Представляется интересным рассмотреть случай, когда холодные ионы одного сорта расширяются в вакуум за счет энергии нагретых ионов другого сорта. Положим, что холодными являются отрицательные ионы $T_{j0} = 0$, а нагретыми — положительные ионы $T_{i0} = 1$. Можно ожидать, что при $m_j \gg 1$ движение тяжелой отрицательной компоненты будет аналогично движению тяжелых по сравнению с электронами холодных ионов при расширении электрон-ионной плазмы. Результаты численных расчетов для варианта $m_j = 18,43$ представлены на рисунке 6.36а. Для возможности сравнения со случаем электрон-ионной плазмы все величины здесь нормированы на единицы, в которых за единицу массы принята масса тяжелых ионов m_j . Видно, что численные зависимости плотностей и потоковых скоростей частиц от τ более близки к решениям, представляющим волну разрежения в электрон-ионной плазме, чем к зависимостям (6.31), которые описывают свободное расширение нейтральных частиц и, начиная с $\tau \simeq 2$, быстро отклоняются от численных результатов.

В противоположном случае, когда холодные отрицательные ионы в несколько раз легче, чем нагретые положительные ионы, движение полностью определяется положительными ионами и хорошо описывается формулами (6.31) даже при уменьшении начальной плотности на четыре порядка, что иллюстрирует рисунок 6.36б (обычная нормировка с $m_* = m_i$). На этом

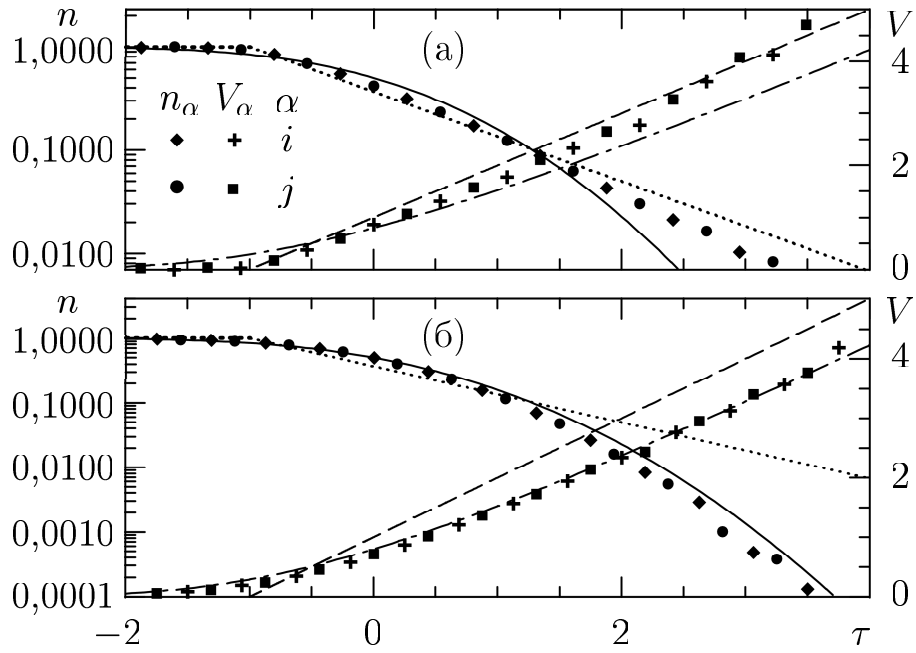


Рисунок 6.36. Численные зависимости ионных плотности $n(\tau)$ и потоковой скорости $V(\tau)$ при $T_{j0} = 0$ (символы) в сравнении с зависимостями (6.31) (сплошная кривая для n и штрихпунктирная кривая для V) и с зависимостями (3.2) для волны разрежения в электрон-ионной плазме с холодными ионами (пунктирная кривая для n и штриховая кривая для V) для двух значений m_j : (а) $m_j = 18,43$ (при нормировке $m_* = m_j$); (б) $m_j = 0,267$

рисунке зависимости (6.31) вычислены для нейтральных частиц с массой m_i и температурой T_{i0} .

6.6.4 Одинаковые ионные температуры

При равенстве начальных ионных температур $T_{i0} = T_{j0}$ и $m_j \neq m_i$ численные результаты достаточно близки к аналитическим зависимостям (6.31), которые соответствуют движению нейтральных частиц со средней массой $m_a = (m_i + m_j)/2$ при той же температуре. Это видно из рисунка 6.37. Некоторые отклонения от них начинаются после уменьшения начального значения плотности на два порядка. Подобные результаты были получены и для других значений $m_j \neq m_i$.

В процессе расширения плазмы с неравными массами положительных и отрицательных ионов более легкие ионы движутся быстрее и быстрее

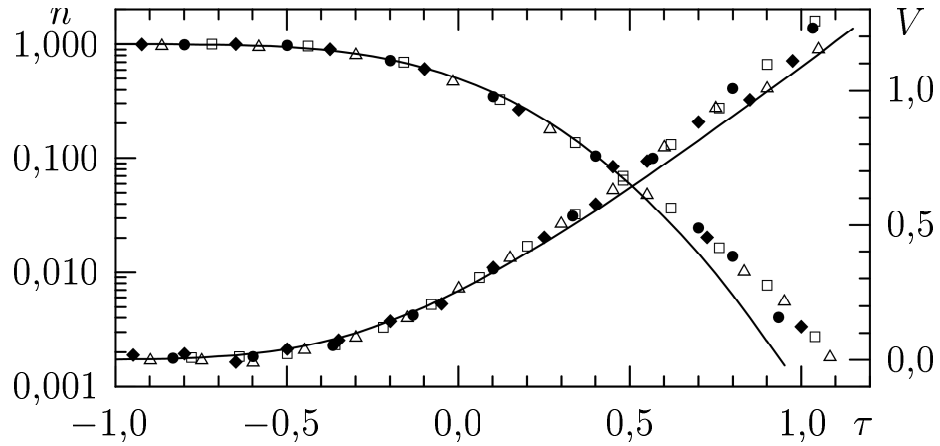


Рисунок 6.37. Ионные плотности (падающие зависимости) и потоковые скорости (нарастающие зависимости) как функции от τ в случае $m_j = 18,43$, $T_{j0} = T_{i0} = 1$. Аналитические зависимости (6.31) показаны сплошными кривыми. Численные результаты для положительных ионов представлены ромбами и треугольниками для t , равных 80 и 120. Величины, относящиеся к отрицательным ионам, даны кружками и квадратами для t , равных 60 и 100

заполняют вакуумную область, чем более тяжелые ионы. В результате возникает электрическое поле, ускоряющее тяжелые и замедляющее легкие ионы. Как показывают численные расчеты, распределение потенциала автомодельно и зависит от ионного состава. На рисунке 6.38 $\varphi(\tau)$ показано не только для разных ионных составов, но и для волны разрежения при расширении электрон-ионной плазмы в вакуум. В последнем случае представлены данные численного эксперимента с отношением масс $m_e/m_i = 0,005$ при $T_{i0} = T_{e0}$ и потенциал, вычисленный по (3.1) и (1.9). Если $m_j < m_i$, то потенциал в области расширения отрицателен и падает с ростом τ . В обратном случае $m_j > m_i$ потенциал положителен и растет с ростом τ .

Интересно отметить, что среди рассматриваемых нами ионных составов есть два состава с примерно одинаковыми отношениями массы тяжелого иона к массе легкого иона, но в одном составе легкие (тяжелые) ионы заряжены отрицательно (положительно), а в другом составе — положительно (отрицательно). Значения относительной массы отрицательных ионов m_j для этих составов равны 0,267 и 3,736, а соответствующие распределения потенциала $\varphi(\tau)$ изображены на рисунке 6.38 сплошными кривыми, помеченными квадратами и

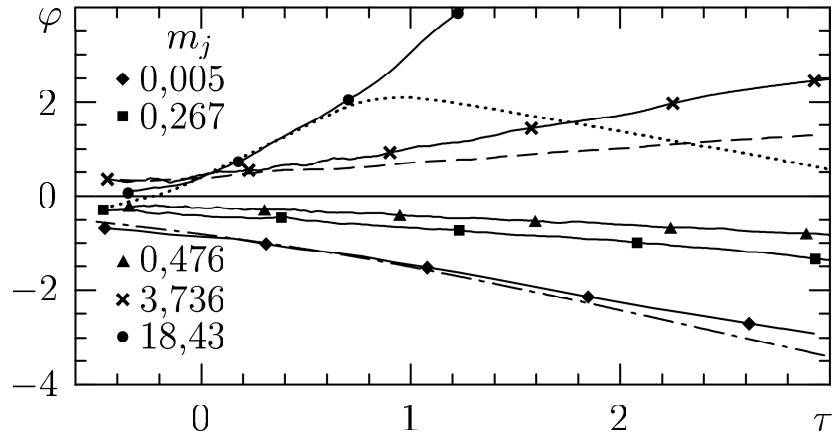


Рисунок 6.38. Зависимость $\varphi(\tau)$ (сплошные кривые с символами) для разных ионных составов, полученные в численных экспериментах при $T_{j0} = T_{i0} = 1$. Сплошная линия $\varphi = 0$ соответствует случаю $m_j = m_i = 1$, штриховая кривая — случаю $m_j = 3,736$ с перенормировкой τ (m_j — единица массы), штрихпунктирная кривая — волне разрежения (3.1) и (1.9), пунктирная кривая — $\varphi(\tau)$ в трехкомпонентной плазме с $n_{e0} = 0,001$

крестиками. Из физических соображений можно ожидать, что движения плазмы с одним и с другим ионными составами должны быть практически идентичными, за исключением того, что роли положительных и отрицательных ионов меняются при переходе от одного ионного состава к другому. Поэтому распределения потенциала для двух составов должны быть симметричными относительно оси x . На рисунке 6.38 этого не видно, так как потенциал представлен в виде функции от τ , единицей измерения которой в обоих случаях служит одна и та же величина $(Z_i T_{i0}/m_i)^{1/2}$. В одном варианте эта единица измерения соответствует легкой компоненте, а во втором — тяжелой, что и приводит к несимметрии на рисунке. Для одинакового представления вариантов надо в каждом случае выбирать нормировку на массу рассматриваемого сорта ионов. Если в случае $m_j = 3,736$ в качестве единицы массы выбрать $m_* = m_j$ и нормировать τ на $(Z_i T_{i0}/m_j)^{1/2}$, то зависимость $\varphi(\tau)$ приобретает вид, представленный штриховой кривой на рисунке 6.38. Эта кривая и зависимость $\varphi(\tau)$ для $m_j = 0,267$ располагаются относительно оси τ практически симметрично.

Из рисунка 6.38 видно, что для широкого диапазона значений m_j потенциал в области расширения близок к линейной зависимости от τ .

Соответственно электрическое поле в этой области распределено почти однородно, а его величина падает со временем как $1/t$.

Отметим одно очень важное обстоятельство. К настоящему времени в лабораторных условиях достигнуты достаточно высокие плотности отрицательных ионов. При этом плотности электронов составляют всего лишь малые доли процента, и плазма в этих случаях может с хорошей точностью рассматриваться как ион-ионная. Однако поскольку речь идет о расширении плазмы в вакуум, то здесь надо проанализировать последствия значительного уменьшения плотности ионов. Как видно из рисунка 6.37, при больших τ плотность ионов быстро падает. Если при этом в ион-ионной плазме, реально трехкомпонентной с очень малой долей электронов, так же быстро или даже быстрее падает плотность электронов, то применение ион-ионного приближения вполне оправдано. Поведение электронной компоненты определяется потенциалом. Если с ростом τ потенциал падает, то падать будет и электронная плотность. Но из рисунка 6.38 видно, что в случае $m_j > 1$ потенциал в ион-ионной плазме растет с ростом τ , а это означает, что растет и плотность электронов по мере падения плотности ионов. Очевидно, что при некотором $\tau = \tau_m$ ионные и электронная плотности оказываются величинами одного порядка, и модель ион-ионной плазмы не будет описывать в области $\tau > \tau_m$ реальную трехкомпонентную плазму с очень малой долей электронов.

Изложенные соображения можно проиллюстрировать сравнением расчета движения ион-ионной плазмы с расчетом движения трехкомпонентной плазмы, в котором учтено наличие даже малой доли электронов. Для варианта трехкомпонентной плазмы, состоящей из ионов двух сортов с массами $m_j = 1$ и $m_j = 18,43$ и электронов с начальными невозмущенными температурой $T_{e0} = 1$ и плотностью $n_{e0} = 0,001$ (и, соответственно, $n_{j0} = 0,999$), зависимость $\varphi(\tau)$ представлена пунктирной кривой на рисунке 6.38. Видно, что при $\tau \sim 1$, когда ионная плотность достигает величины $\sim 0,001$ (см. рисунок 6.37), рост потенциала прекращается. Он достигает максимума и начинает падать, то есть процесс выходит на режим, характерный для расширения в вакуум трехкомпонентной плазмы с отрицательными ионами. Это обстоятельство надо учитывать при рассмотрении ион-ионной плазмы с $m_j > m_i$.

6.6.5 Волна охлаждения

Рассмотрим вопрос о переносе энергии в процессе расширения плазмы. Для случая $T_{j0} = T_{i0} = 1$ на рисунке 6.39 проведено сравнение полученных в численных экспериментах зависимостей от τ энергии и потока энергии для разных составов ион-ионной плазмы и для электрон-ионной плазмы при $T_{i0} = T_{e0}$. Движение последней моделируется частицами с отношением массы электрона к массе иона, равным 0,005. Отметим, что для всех вариантов показаны зависимости, относящиеся к тяжелым ионам, так как общим определяющим фактором здесь является величина массы иона. При нормировке за единицу массы принята масса тяжёлых ионов. На этом же рисунке нанесены решения двух предельных задач, соответствующих движению системы нейтральных частиц (формулы (6.31)) и волне разрежения (3.1) в электрон-ионной плазме при $T_{i0} = T_{e0} = 1$ (используется также (1.12)).

Из рисунка 6.39 видна немонотонная зависимость энергии от τ и образование автомодельно расширяющегося «горба» энергии. Его возникновение

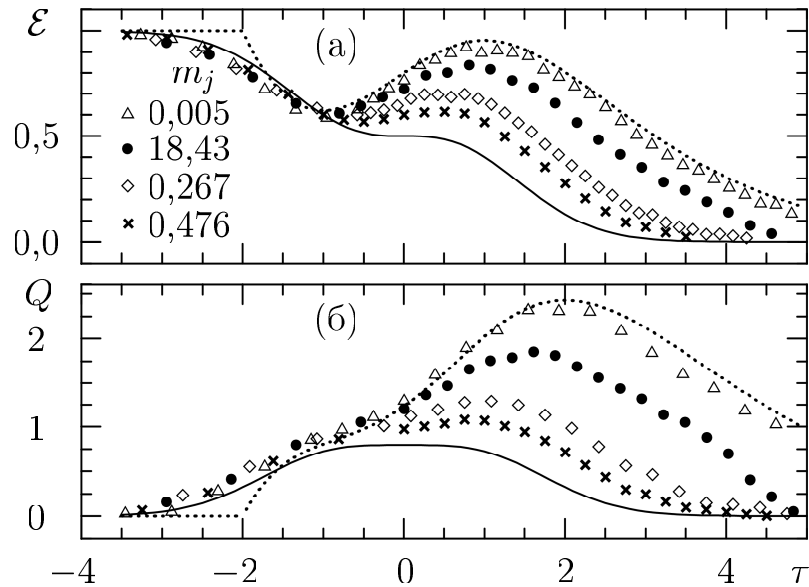


Рисунок 6.39. Численные зависимости энергии $\mathcal{E}(\tau)$ (а) и потока энергии $Q(\tau)$ (б) для тяжелых частиц (символы) при $T_{j0} = T_{i0} = 1$ и разных m_j . Для случая $m_j = 18,43$ значения величин перенормированы (m_j — единица массы). Сплошные кривые — точное при $m_j = 1$ решение (6.31), пунктирные кривые — зависимости, рассчитанные по (3.1) и (1.12) при $T_{i0} = T_{e0}$

как в электрон-ионной, так и в ион-ионной плазме с $\mu \neq -1$ обусловлено сочетанием двух факторов: увеличением скорости частиц и уменьшением их плотности с ростом τ . При $\tau = -2$ волна разрежения (3.1) сшивается с однородным потоком, и в этой точке в приближении трех моментов возникает слабый разрыв. В численных решениях, как уже обсуждалось в п. 3.2.3, волна разрежения плавно выходит на невозмущенную область при $\tau \sim -3$.

Рассмотрим теперь поведение лёгких ионов. На рисунке 6.40 представлены зависимости моментов функции распределения лёгких ионов от τ для двух значений m_j . Поскольку здесь определяющим фактором является масса ионов, а не их заряд, нормировка приведенных данных выполнена на единицы, в которых единица массы m_* выбрана равной массе лёгкого иона.

Из рисунка 6.40а ($m_j = 18,43$) хорошо видно, что при $\tau < \tau_c \simeq -0,6$ плотность положительных ионов остается неизменной, равной единице, а их

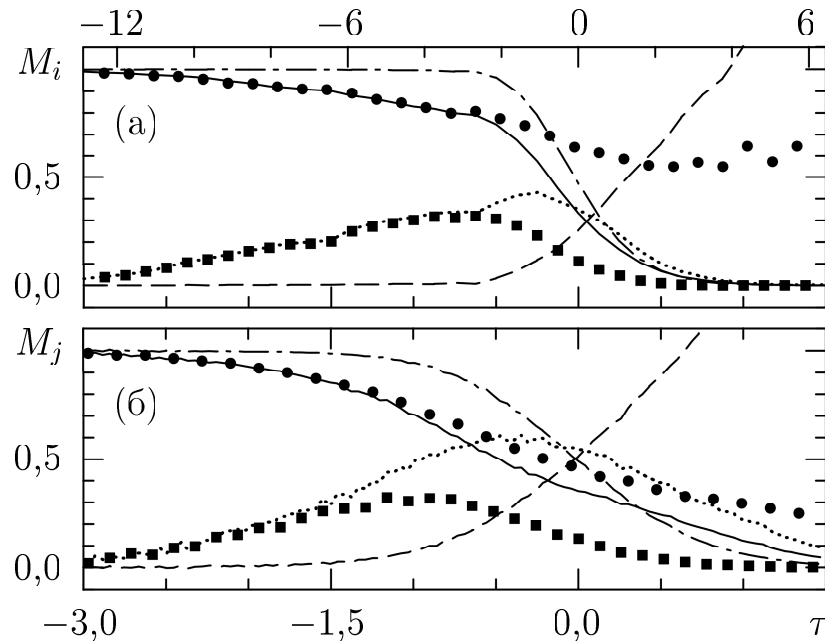


Рисунок 6.40. Зависимости от τ моментов функций распределения легких ионов: положительных $M_i = \{n_i, V_i, \mathcal{E}_i, Q_i, T_i, \mathcal{G}_i\}$ при $m_j = 18,43$ (а) и отрицательных $M_j = \{n_j, V_j, \mathcal{E}_j, Q_j, T_j, \mathcal{G}_j\}$ при $m_j = 0,267$ (б) в случае $T_{j0} = T_{i0} = 1$. Плотности n_i и n_j представлены штрихпунктирными, скорости V_i и V_j — штриховыми, энергии \mathcal{E}_i и \mathcal{E}_j — сплошными и потоки энергии Q_i и Q_j — пунктирными кривыми. Символами показаны температуры T_i и T_j (кружки) и тепловые потоки \mathcal{G}_i и \mathcal{G}_j (квадраты). На верхней горизонтальной оси нанесены перенормированные значения τ ($m_j = 18,43$ — единица массы)

потоковая скорость равна нулю. Реально процесс расширения представляется происходящим при $\tau > \tau_c$, когда резко падает плотность и нарастает потоковая скорость положительных ионов. Однако и в более глубоких слоях плазмы $\tau < \tau_c$ видны определенные изменения. Как нетрудно убедиться, здесь энергия ионов \mathcal{E}_i оказывается равной $n_i T_i$, что и должно следовать из общих соотношений между энергией и температурой (1.12). В этой области температура ионов T_i и численно равная ей энергия \mathcal{E}_i заметно падают. При $\tau > \tau_c$ температура T_i продолжает падать, но не так резко, как падает \mathcal{E}_i за счет быстрого уменьшения n_i . Процесс переноса энергии иллюстрируют также зависимости от τ потоков энергии Q_i и тепла \mathcal{G}_i . В области $\tau < \tau_c$ поток энергии представляет собой поток тепла, а при $\tau > \tau_c$ поток тепла быстро уменьшается. Аналогичное поведение моментов функции распределения наблюдается и для отрицательных ионов, если они являются более легкими (рисунок 6.40б, $m_j = 0,267$). При этом τ_c принимает другое значение $\tau_c \simeq -1,3$.

Таким образом, в области $\tau < \tau_c$ в неподвижной плазме с однородно распределенной плотностью существует поток тепла, приводящий к понижению температуры лёгких ионов. Численные исследования показали, что этот процесс происходит автомодельным образом. Иными словами, мы имеем дело с *автомодельной волной охлаждения* легких ионов. Скорость волны достаточно велика. Она составляет примерно три единицы скорости, определяемой массой легких ионов. Температура легких ионов понижается примерно на 20 % вблизи $\tau = \tau_c$ и затем продолжает понижаться в области расширения.

Понижение температуры легких ионов, как средней энергии их хаотического движения, обусловлено тем, что эти ионы движутся преимущественно в сторону вакуума, и в достаточно большой автомодельно расширяющейся области возникает недостаток частиц, движущихся в отрицательном направлении. Это иллюстрирует рисунок 6.41, на котором видно, что с ростом τ область отрицательных скоростей, при которых $f_i \neq 0$, становится короче.

Сравнивая волну охлаждения с обычной волной разрежения, легко понять, что пространственный масштаб волны охлаждения, определяемой легкими ионами, отличается от пространственного масштаба волны разрежения, определяемой тяжелыми ионами, в корень квадратный из отношения массы

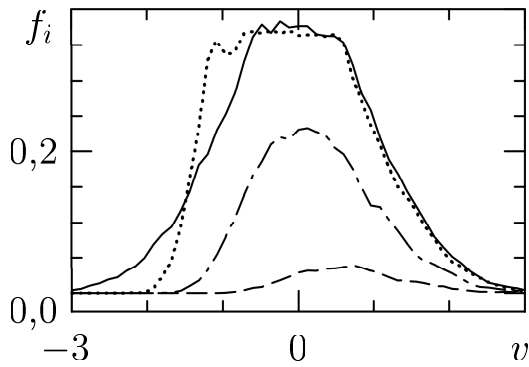


Рисунок 6.41. Функция распределения легких положительных ионов f_i в случае $m_j = 18,43, T_{j0} = T_{i0} = 1$ при разных τ : $-3, -1, 0$ и $0,5$, показанная, соответственно, сплошной, пунктирной, штрихпунктирной и штриховой кривыми

тяжелых ионов к массе легких ионов раз. Из рисунка 6.40 видно, что эти масштабы сближаются по мере приближения массы легких ионов к массе тяжелых ионов. В пределе $m_j = m_i$ волна разрежения и волна охлаждения сливаются в одну общую структуру, в которой понижаются как плотность, так и температура, а скорость увеличивается. Эта структура описывается решениями (6.31). В противоположном случае при большом отличии масс, как например, в электрон-ионной плазме, волна охлаждения будет распространяться в гораздо больших масштабах, чем волна разрежения, что подробно обсуждалось в п. 3.4.

Заключение

В соответствии с указанными во Введении целями, в диссертации получены решения ряда конкретных задач физики бесстолкновительной плазмы, а также выявлены и подробно изложены основные свойства и закономерности нелинейных явлений при распадах разрывов плотности.

В **первой главе** обсуждены исходные уравнения и методы их решений.

1. Найдено аналитическое решение для простых волн в бесстолкновительной квазинейтральной плазме в случае конечной температуры ионов.

2. Выведено линейное уравнение, с помощью которого можно описать произвольное движение квазинейтральной плазмы.

3. В законченном аналитическом виде решена задача Гурса для случая квазинейтральной плазмы с холодными ионами.

4. Выведена система уравнений стационарного движения в плазме с произвольной температурой ионов и предложен метод её численного решения.

5. Выведено уравнение для определения критических параметров волны в плазме при конечной температуре ионов. Установлено, что критические потенциал, число Маха, плотности электронов и ионов и потоковая скорость последних падают с ростом ионной температуры, а критическая скорость волны изменяется немонотонно.

Во **второй главе** изучены свойства ионно-звукового солитона.

1. Установлено, что аналитические решения для солитонов КдВ сильно отклоняются от точных решений при амплитудах потенциала $\varphi_m > 0,15$. Характерное для солитонов КдВ постоянство произведения квадрата ширины на амплитуду не выполняется для ионно-звукового солитона. Последний характеризуется разделением зарядов, и пространственный размер области положительного заряда предложено принять за ширину солитона.

2. Найдено, что доля отражённых от солитона ионов при любом значении ионной температуры резко возрастает в относительно небольшом

диапазоне амплитуд вблизи соответствующего критического значения. При этом указанная доля ограничена величиной $\sim 0,04$.

3. Показано, что температура ионов влияет на ионно-звуковой солитон двояким образом. Отражение ионов приводит к торможению волны, а тепловое движение — к уменьшению её амплитуды.

4. Продемонстрировано, что такие параметры солитона, как ширина и скорость движения, определённые из численных решений, хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными.

В третьей главе рассмотрено расширение плазмы в вакуум.

1. Показано, что в течении плазмы можно выделить квазинейтральную область, область неквазинейтральности и область электронного облака. Граница между квазинейтральной областью и областью неквазинейтральности совпадает с определённой характеристикой системы квазинейтральных уравнений. Область неквазинейтральности отделена от области электронного облака ионным фронтом, движение которого также происходит по определённой характеристике. Со временем область неквазинейтральности смещается в сторону вакуума, а её размер линейно увеличивается.

2. Представлено аналитическое решение для описания области квазинейтральности при произвольной температуре ионов. Получены формулы, описывающие область неквазинейтральности и ионный фронт. Показано, что на ионном фронте возникает разрыв плотности ионов, а электрическое поле принимает максимальное значение.

3. Продемонстрировано, что процесс сопровождается развитием автономной волны охлаждения в электронной компоненте плазмы. Обмен энергией между электронами и ионами происходит таким образом, что энергия электронов уменьшается в области волны охлаждения, а энергия ионов увеличивается в области волны разрежения. Пространственный размер волны охлаждения в корень квадратный из отношения масс иона и электрона раз больше пространственного размера волны разрежения.

4. Выведены формулы для энергетического распределения выходящих из расширяющейся плазмы ускоренных ионов и для зависимостей их полной энергии и числа от координаты точки измерения и времени измерения. Они

могут использоваться для диагностических целей.

Четвёртая глава посвящена изучению свойства и закономерности нелинейных движений плазмы при распаде конечного разрыва плотности.

1. В случае плазмы с холодными ионами установлено, что при расширении плазмы в плазму меньшей плотности можно выделить характерные области движения, представляющие собой волну разрежения, плато и бесстолкновительную ударную волну. Основные параметры течения могут быть оценены с помощью простой аналитической модели. Найдено критическое значение отношения меньшей начальной плотности к большей начальной плотности. Показано, что при отношении плотностей меньшем критического существенную роль играют отражённые ионы. При очень малом отношении плотностей за счёт отражения ионов фронт волны принимает вид резкого разрыва, за которым следует однородная область. С ростом ионной температуры происходит переход к монотонному распределению потенциала.

2. Проведено сравнение численных решений с результатами реальных экспериментов в случае одинаковых температур ионов и электронов и показано, что экспериментально наблюдаемые распределения параметров плазмы являются автомодельными и хорошо согласуются с данными численных экспериментов.

В пятой главе рассмотрены три важные задачи, каждая из которых характеризуется наличием двух разрывов плотности.

1. В квазинейтральном приближении трех моментов найдено аналитическое решение задачи о расширении в вакуум слоя плазмы с холодными ионами. Продемонстрировано, что течения, происходящих при разных пространственных размерах слоя, подобны. Это позволяет получить универсальное решение для любого размера слоя при заданной температуре ионов.

2. Установлено, что след за быстро движущимся в плазме телом формируется между фронтами волн разрежения, распространяющимися в невозмущенную плазму. В следе на относительно небольшом расстоянии от тела формируется ламинарная область, характеризующаяся гладкими распределениями параметров и подобием течений, которые образуются за телами разных размеров. В более далёкой от тела области следа за

счет взаимодействия встречных потоков ионов развивается неустойчивость, которая приводит к образованию ряда небольших областей пониженной плотности частиц, кавитонов. В результате гладкое возмущение плотности в ламинарной области при переходе в область неустойчивости дробится на кавитоны, которые медленно уходят на периферию, а в центре системы плотность частиц приближается к невозмущенному значению.

3. Показано, что возмущение конечного размера в виде «горба» плотности частиц со временем трансформируется в два новых возмущения конечного размера, распространяющихся в противоположных направлениях от центра начального возмущения. В плазме с холодными ионами каждое новое возмущение содержит платоподобную область и бесстолкновительную ударную волну. Последняя с течением времени трансформируется в цепочку упорядоченных в пространстве по амплитуде ионно-звуковых солитонов. С ростом начальной ионной температуры амплитуды ионно-звуковых солитонов уменьшаются, и при больших температурах пространственные распределения величин становятся гладкими.

В **шестой главе** исследованы возможные типы движения плазмы с отрицательными ионами и основные закономерности её расширения в вакуум.

1. Показано, что характер движения бесстолкновительной плазмы с отрицательными ионами определяется ионным составом и отношением начальных плотностей отрицательных и положительных ионов.

2. Установлено, что расширение плазмы с холодными ионами в вакуум происходит в виде движущейся в невозмущенную область волны, в которой положительные ионы испытывают разрежение, а отрицательные — сжатие. За фронтом волны образуется осцилляторная структура, представляющая, в среднем, платоподобную область. Волна классифицирована как бесстолкновительная ударная волна разрежения и определены условия её существования, которые подтверждены сравнением с реальным экспериментом. Осцилляторная область оканчивается разрывным переходом ко второй небольшой платоподобной области, за которой следует область обычной волны разрежения. В двух последних областях плазма не содержит отрицательных ионов.

3. Представлена аналитическая модель для определения основных

параметров течения и профиля фронта бесстолкновительной ударной волны разрежения.

4. Показано, что при расширении плазмы в вакуум в электронной среде развивается волна охлаждения, которая характеризуется возникновением потока тепла и понижением температуры в направлении вакуумной области.

5. В численных экспериментах обнаружена неустойчивость, которая возникает на границе с областью второго плато и постепенно распространяется по осцилляторной области, но не заполняет её полностью. Последнее обстоятельство объясняется тем, что неустойчивость порождает коротковолновые осцилляции на фоне движущейся длинноволновой осцилляторной структуры, и дисперсия ограничивают пространственную область неустойчивости. Подобная неустойчивость наблюдалась экспериментально в индукционном разряде. При высоких ионных температурах неустойчивость не развивается.

6. Изучено расширение в вакуум плоского слоя плазмы. Рассмотрено взаимодействие бесстолкновительных ударных волн разрежения. Описано явление опрокидывания, приводящее к образованию областей многопоточкового движения с сильной неоднородностью и пиковыми выбросами ионных плотностей, превышающими начальные значения во много раз. Показано, что число областей многопоточковости быстро возрастает со временем, они расширяются, а фазовые кривые ионов в каждой такой области со временем закручиваются в спираль. С ростом начальных ионных температур явление опрокидывания оказывается менее чётко выраженным, процесс расширения слоя плазмы ускоряется, а профили плотностей становятся более гладкими.

7. Установлено, что ион-ионное приближение при расширении в вакуум плазмы с отрицательными ионами с очень малой долей электронов является справедливым, если масса положительного иона превосходит массу отрицательного иона. В противоположном случае плотность положительных ионов, уменьшающаяся с ростом координаты, может оказаться сравнимой с плотностью электронов, и модель ион-ионной плазмы становится неправильной.

8. Показано, что в ряде случаев расширение ион-ионной плазмы может быть описано формулами, полученными для расширяющейся в вакуум системы нейтральных частиц.

9. Найдено, что в процессе расширения ион-ионной плазмы в вакуум возникает автомодельная волна охлаждения, проявляющаяся в постепенном понижении температуры легких ионов по мере увеличения автомодельной переменной. Пространственный масштаб волны охлаждения примерно в корень квадратный из отношения массы тяжелых ионов к массе легких ионов раз больше пространственного масштаба волны разрежения.

Полученные в диссертации аналитические результаты для описания стационарных или квазинейтральных течений (например, уравнение для произвольного течения или решение задачи Гурса) могут быть использованы при рассмотрении других задач с другими начальными условиями. С большими градиентами плотности плазмы исследователи имеют дело при изучении инерциального термоядерного синтеза, лазерной плазмы, ионных источников, газоразрядных устройств, некоторых астрофизических явлений. По таким направлениям ведутся работы в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, Институте общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Институте космических исследований РАН, Объединенном институте высоких температур РАН, НИЦ «Курчатовский институт», ГНЦ РФ «Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», ВНИИ автоматики им. Н. Л. Духова и в других научных институтах. Во многих случаях для анализа и описания исследуемых явлений можно использовать представленные в диссертации результаты.

В заключение автор выражает благодарность своим учителям и соавторам совместных работ, членам Российской академии наук С. И. Анисимову, А. В. Гуревичу, Л. П. Питаевскому и Р. З. Сагдееву, с которыми были определены и получили развитие основные направления представленных здесь исследований.

Автор признателен коллегам из Теоретического отдела им. Л. М. Бибермана Объединённого института высоких температур РАН за многочисленные полезные обсуждения на семинарах, проходивших под руководством профессора В. С. Воробьева.

Список литературы

- [1] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
- [2] Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. Автомоделные движения разреженной плазмы // ЖЭТФ. 1965. Т. 49, вып. 2(8). С. 647–654.
- [3] Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. Автомоделные движения разреженной плазмы. II // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, вып. 3. С. 891–904.
- [4] Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. Ускорение ионов при расширении разреженной плазмы // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, вып. 2(8). С. 516–531.
- [5] Gurevich A. V., Pitaevsky L. P. Non-linear dynamics of a rarefied ionized gas // Prog. Aerospace Sci. 1975. V. 16, № 3. P. 227–272.
- [6] Березин Ю. А., Вшивков В. А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980. — 95 с.
- [7] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — М.: Мир, 1987. — 640 с.
- [8] Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 452 с.
- [9] Дискретное моделирование плазмы: Сб. статей / Под ред. Ю. С. Сигова. — М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 1990. — 252 с.
- [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
- [11] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 2008. — 656 с.

- [12] Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. — 588 с.
- [13] Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. — 424 с.
- [14] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 688 с.
- [15] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
- [16] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
- [17] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы // Ядерный синтез. 1961. Т. 1, № 2. С. 82–100.
- [18] Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. — В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 4 / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1964. С. 20–80.
- [19] Moiseev S. S., Sagdeev R. Z. Collisionless shock waves in a plasma in a weak magnetic field // J. Nucl. Energy, Pt. C. 1963. V. 5, № 1. P. 43–47.
- [20] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы // УФН. 1961. Т. 73, вып. 4. С. 701–766.
- [21] Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974. — 719 с.
- [22] Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т.1. Неустойчивости однородной плазмы. — М.: Атомиздат, 1975. — 272 с.
- [23] Захаров В. Е. Об эволюции волнового пакета в гидродинамике с дисперсией звука // ПМТФ. 1964. № 3. С. 167–169.
- [24] Washimi H., Taniuti T. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17, № 19. P. 996–998.
- [25] Гуревич А. В. Распределение захваченных частиц в потенциальной яме в отсутствие столкновений // ЖЭТФ. 1967. Т. 53, вып. 3(9). С. 953–964.

- [26] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика. — В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 10 / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1980. С. 3–87.
- [27] Biskamp D., Parkinson D. Ion acoustic shock waves // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13, № 9. P. 2295–2299.
- [28] Sakanaka P. H. Formation and interaction of ion-acoustic solitary waves in a collisionless warm plasma // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15, № 2. P. 304–310.
- [29] Mamun A. A. Effects of ion temperature on electrostatic solitary structures in nonthermal plasmas // *Phys. Rev. E*. 1997. V. 55, № 2. P. 1852–1857.
- [30] Tappert F. Improved Korteweg–de Vries equation for ion-acoustic waves // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15, № 12. P. 2446–2447.
- [31] Tagare S. G. Effect of ion temperature on propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitudes in collisionless plasma // *Plasma Physics*. 1973. V. 15, № 12. P. 1247–1252.
- [32] Алиханов С. Г., Сагдеев Р. З., Чеботаев П. З. Разрушение ионно-звуковых волн большой амплитуды // *ЖЭТФ*. 1969. Т. 57, вып. 11. С. 1565–1569.
- [33] Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Precursor of ion-acoustic quasishock wave in collisionless plasma // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15, № 5. P. 865–870.
- [34] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука. 1973. — 175 с.
- [35] Карпман В. И. Эффекты взаимодействия ионно-звуковых солитонов с резонансными частицами плазмы // *ЖЭТФ*. 1979. Т. 77, вып. 4(10). С. 1382–1395.
- [36] McKenzie J. F. The ion-acoustic soliton: A gas-dynamic viewpoint // *Phys. Plasmas*. 2002. V. 9, № 3. P. 800–805.
- [37] Johnston C. R., Epstein M. On the exact amplitude, speed and shape of ion-acoustic waves // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7, № 3. P. 906–910.
- [38] Tagare S. G. Ion-acoustic solitons and double layers in a two-electron temperature plasma with hot isothermal electrons and cold ions // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7, № 3. P. 883–888.

- [39] Ghosh S. S., Ghosh K. K., Iyengar A. N. S. Large Mach number ion acoustic rarefactive solitary waves for a two electron temperature warm ion plasma // Phys. Plasmas. 1996. V. 3, № 11. P. 3939–3946.
- [40] Ghosh S. S., Iyengar A. N. S. Forbidden regions in ion temperatures for ion acoustic compressive solitary waves for a plasma with two electron temperatures // Phys. Plasmas. 1997. V. 4, № 6. P. 2139–2145.
- [41] Дубинова И. Д., Дубинов А. Е. К теории ионно-звуковых солитонов в плазме с электронами, распределёнными по Цаллису // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 13. С. 43–51.
- [42] Дубинов А. Е., Дубинова А. А. Нелинейная теория ионно-звуковых волн в идеальной плазме с вырожденными электронами // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 10. С. 935–947.
- [43] White R. B., Fried B. D., Coroniti F. V. Structure of ion acoustic solitons and shock waves in a two-component plasma // Phys. Fluids. 1972. V. 15, № 8. P. 1484–1490.
- [44] Tran M. Q., Hollenstein Ch. Experimental study of the propagation of ion acoustic solitons in a warm multi-ion plasma // Phys. Rev. A. 1977. V. 16, № 3. P. 1284–1293.
- [45] Alikhanov S. G., Kichigin G. N., Konkasbaev I. K. Solitons in a two stream plasma // Plasma Physics. 1972. V. 14, № 6. P. 661–664.
- [46] Chatterjee P., Roychoudhury R. The effect of finite ion temperature on solitary waves in a plasma with an ion beam // Phys. Plasmas. 1995. V. 2, № 4. P. 1352–1354.
- [47] Островский Л. А., Петрухина В. И., Файнштейн С. М. Об усилении ионно-звуковых солитонов пучком заряженных частиц // ЖЭТФ. 1975. Т. 69, вып. 6(12). С. 2051–2055.
- [48] Okutsu E., Nakamura M., Nakamura Y., Itoh T. Amplification of ion-acoustic solitons by an ion beam // Plasma Physics. 1978. V. 20, № 6. P. 561–568.
- [49] Lonngren K. E. Soliton experiments in plasmas // Plasma Physics. 1983. V. 25, № 9. P. 943–982.

- [50] Ikezi H., Taylor R. J., Baker D. R. Formation and interaction of ion-acoustic solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1970. V. 25, № 1. P. 11–14.
- [51] Ikezi H. Experiments of ion-acoustic solitary waves // *Phys. Fluids.* 1973. V. 16, № 10. P. 1668–1675.
- [52] Okutsu E., Nakamura Y. Experiment on ion-acoustic solitons as an initial value problem // *Plasma Physics.* 1979. V. 21, № 12. P. 1053–1065.
- [53] Pierre T., Bonhomme G., Cussenot J. R., Leclert G. Experimental determination of the velocity and width of plane ion-acoustic solitons propagating in a plasma // *Physics Letters.* 1983. V. 95A, № 3, 4. P. 159–161.
- [54] Плюто А. А. Ускорение положительных ионов в расширяющейся плазме вакуумных искр // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 39, вып. 6(12). С. 1589–1592.
- [55] Hendel H. W., Reboul T. T. Adiabatic acceleration of ions by electrons // *Phys. Fluids.* 1962. V. 5, № 3. P. 360–362.
- [56] Плюто А. А., Рыжков В. Н., Капин А. Т. Высокоскоростные потоки плазмы вакуумных дуг // *ЖЭТФ.* 1964. Т. 47, вып. 2(8). С. 494–507.
- [57] Тюлина М. А. Об ускорении ионов плазмы, образующейся при размыкании тока контактами в вакууме // *ЖТФ.* 1965. Т. 35, вып. 3. С. 511–515.
- [58] Crow J. E., Auer P. L., Allen J. E. The expansion of a plasma into a vacuum // *J. Plasma Physics.* 1975. V. 14, part 1. P. 65–76.
- [59] Gurevich A., Anderson D., Wilhelmsson H. Ion acceleration in an expanding rarefied plasma with non-maxwellian electrons // *Phys. Rev. Lett.*, 1979. V. 42, № 12. P. 769–772.
- [60] Гуревич А. В., Мещеркин А. П. Ускорение ионов в расширяющейся плазме // *ЖЭТФ.* 1981. Т. 80, вып. 5. С. 1810–1826.
- [61] Гуревич А. В., Мещеркин А. П. Сильный разрыв на фронте волны разрежения в плазме // *ЖЭТФ.* 1981. Т. 81, вып. 4(10). С. 1295–1306.
- [62] Алиханов С. Г., Белан В. Г., Кичигин Г. Н., Чеботаев П. З. Расширение плазмы в вакуум и обтекание пластинки потоком бесстолкновительной плазмы // *ЖЭТФ.* 1970. Т. 59, вып. 6(12). С. 1961–1966.

- [63] Denavit J. Collisionless plasma expansion into a vacuum // *Phys. Fluids*. 1979. V. 22, № 7. P. 1384–1392.
- [64] Decoste R., Ripin B.H. High-energy ion expansion in laser-plasma interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 40, № 1. P. 34–37.
- [65] Еселевич В.Г., Файнштейн В.Г. О расширении бесстолкновительной плазмы в вакуум // *Доклады АН СССР*. 1979. Т. 244, № 5. С. 1111–1113.
- [66] Еселевич В.Г., Файнштейн В.Г. Расширение бесстолкновительной плазмы в вакуум // *ЖЭТФ*. 1980. Т. 79, вып. 3(9). С. 870–882.
- [67] Еселевич В.Г., Файнштейн В.Г. Расширение бесстолкновительной плазмы в вакуум // *Физика плазмы*. 1981. Т. 7, вып. 3. С. 503–515.
- [68] Chan C., Hershkowitz N., Ferreira A., Intrator T., Nelson B., Lonngren K. Experimental observations of self-similar plasma expansion // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27, № 1. P. 266–268.
- [69] Bezzerides B., Forslund D. W., Lindman E. L. Existence of rarefaction shocks in a laser-plasma corona // *Phys. Fluids*. 1978. V. 21, № 12. P. 2179–2185.
- [70] Wickens L. M., Allen J. E., Rumsby P. T. Ion emission from laser-produced plasmas with two electron temperatures // *Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 41, № 4. P. 243–246.
- [71] Wickens L. M., Allen J. E. Free expansion of a plasma with two electron temperatures // *J. Plasma Physics*. 1979. V. 22, part 1. P. 167–185.
- [72] Wickens L. M., Allen J. E. Ion emission from laser-produced, multi-ion species, two-electron temperature plasmas // *Phys. Fluids*. 1981. V. 24, № 10. P. 1894–1899.
- [73] Hairapetian G., Stenzel R. L. Particle dynamics and current-free double layers in an expanding, collisionless, two-electron-population plasmas // *Phys. Fluids B*. 1991. V. 3, № 4. P. 899–914.
- [74] Андреев А.А., Семахин А.Н. Расширение в вакуум слоя лазерной плазмы // *Физика плазмы*. 1992. Т. 18, вып. 10. С. 1303–1309.

- [75] Andersen D., Faulkner J., Wilhelmsson H., Nishikawa K., Tange T. Study of similarity flows of two component laser produced plasmas // *Physica Scripta*. 1978. V. 18, № 2. P. 141–145.
- [76] Гуревич А. В., Мещеркин А. П. Ускорение ионов при сферическом расширении плазмы // *Физика плазмы*. 1983. Т. 9, вып. 5. С. 955–963.
- [77] Чутов Ю. И., Кравченко А. Ю. Расширение плазменного сгустка в вакуум // *Физика плазмы*. 1980. Т. 6, вып. 2. С. 272–282.
- [78] Чутов Ю. И., Кравченко А. Ю. Влияние дополнительного охлаждения и нагрева электронов на разлёт плазменных сгустков в вакуум // *Физика плазмы*. 1983. Т. 9, вып. 3. С. 655–658.
- [79] True M. A., Albritton J. R., Williams E. A. Fast ion production by suprathermal electrons in laser fusion plasmas // *Phys. Fluids*. 1981. V. 24, № 10. P. 1885–1893.
- [80] Manfredi G., Mola S., Feix M. R. Rescaling methods and plasma expansions into vacuum // *Phys. Fluids B*. 1993. V. 5, № 2. P. 388–401.
- [81] Garsia L. G., Goedert J., Figua H., Fijalkow E., Feix M. R. Numerical simulation of a negative ion plasma expansion into vacuum // *Phys. Plasmas*. 1997. V. 4, № 12. P. 4240–4253.
- [82] Дорожкина Д. С., Семенов В. Е. Расширение в вакуум ограниченного сгустка бесстолкновительной плазмы // *Физика плазмы*. 1998. Т. 24, № 6. С. 481–487.
- [83] Дорожкина Д. С., Семенов В. Е. Точное решение задачи о квазинейтральном расширении в вакуум локализованной бесстолкновительной плазмы с холодными ионами // *Письма в ЖЭТФ*. 1998. Т. 67, вып. 8. С. 543–547.
- [84] Dorozhkina D. S., Semenov V. E. Exact solution of Vlasov equations for quasineutral expansion of plasma bunch into vacuum // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81, № 13. P. 2691–2694.
- [85] Ковалев В. Ф., Быченков В. Ю., Тихончук В. Т. Ускорение ионов при адиабатическом разлете плазмы: ренормгрупповой подход // *Письма в ЖЭТФ*. 2001. Т. 74, вып. 1. С. 12–16.

- [86] Kovalev V. F., Bychenkov V. Yu. Analytic solution to the Vlasov equations for expanding plasmas // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90, № 18. 185004 (4pp).
- [87] Ковалев В. Ф., Быченков В. Ю., Тихончук В. Т. Динамика частиц при адиабатическом разлете плазменного сгустка // *ЖЭТФ.* 2002. Т. 122, вып. 2(8). С. 264–281.
- [88] Betti S., Ceccherini F., Cornolti F., Pegoraro F. Expansion of a finite-size plasma in vacuum // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2005. V. 47, № 3. P. 521–529.
- [89] Mora P. Thin-foil expansion into a vacuum // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 72, № 5. 056401 (5pp).
- [90] Mora P. Collisionless expansion of a Gaussian plasma into a vacuum // *Phys. Plasmas.* 2005. V. 12, № 11. 112102 (8pp).
- [91] Grismayer T., Mora P. Influence of a finite initial ion density gradient on plasma expansion into a vacuum // *Phys. Plasmas.* 2006. V. 13, № 3. 032103 (7pp).
- [92] Grismayer T., Mora P., Adam J. G., Heron A. Electron kinetic effects in plasma expansion and ion acceleration // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77, № 6. 066407 (11pp).
- [93] Murakami M., Basko M. M. Self-similar expansion of finite-size non-quasi-neutral plasmas into vacuum: Relation to the problem of ion acceleration // *Phys. Plasmas.* 2006. V. 13, № 1. 012105 (7pp).
- [94] Буланов С. В., Иновенков И. Н., Сахаров А. С., Чухин А. Е. Ускорение частиц при воздействии ВЧ поля на расширяющуюся плазму // *Физика плазмы.* 1991. Т. 17, вып. 5. С. 552–559.
- [95] Быченков В. Ю., Тихончук В. Т., Толконников С. В. Лазерное инициирование ядерных реакций высокоэнергичными ионами // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 115, вып. 6. С. 2080–2090.
- [96] Pukhov A. Three-dimensional simulations of ion acceleration from a foil irradiated by a short-pulse laser // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86, № 16. P. 3562–3565.

- [97] Andreev A. A., Zhidkov A. G., Sasaki A., Platonov K. Yu. Effect of plasma inhomogeneity on ion acceleration when an ultra-intense laser pulse interacts with a foil target // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44, № 7. P. 1243–1251.
- [98] Mora P. Plasma expansion into a vacuum // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90, № 18. 185002 (4pp).
- [99] Буланов С. В., Есиркепов Т. Ж., Кога Дж., Таджима Т., Фарина Д. К вопросу о верхнем пределе энергии быстрых ионов, ускоренных на фронте расширяющегося в вакуум облака релятивистских электронов // *Физика плазмы*. 2004. Т. 30, № 1. С. 21–32.
- [100] Bychenkov V. Yu., Novikov V. N., Batani D., Tikhonchuk V. T., Bochkarev S. G. Ion acceleration in expanding multispecies plasmas // *Phys. Plasmas*. 2004. V. 11, № 6. P. 3242–3250.
- [101] Nedelea T., Urbassek H. M. Parametric study of ion acceleration in a one-dimensional plasma expansion using the particle-in-cell simulation // *Phys. Rev. E*. 2004. V. 69, № 5. 056408 (8pp).
- [102] Tikhonchuk V. T., Andreev A. A., Bochkarev S. G., Bychenkov V. Yu. Ion acceleration in short-laser-pulse interaction with solid foils // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005. V. 47, № 12B. P. B869–B877.
- [103] Бочкарев С. Г., Быченко В. Ю., Тихончук В. Т. Исследование ускорения ионов при разлёте лазерной плазмы на основе гибридной модели Больцмана–Власова–Пуассона // *Физика плазмы*. 2006. Т. 32, № 3. С. 230–247.
- [104] Basko M. M. Test ion acceleration in a dynamic planar electron sheath // *Eur. Phys. J. D*. 2007. V. 41, № 3. P. 641–654.
- [105] Breizman B. N., Arefiev A. V. Ion acceleration by hot electrons in microclusters // *Phys. Plasmas*. 2007. V. 14, № 7. 073105 (10pp).
- [106] Kumar N., Pukhov A. Self-similar quasineutral expansion of a collisionless plasma with tailored electron temperature profile // *Phys. Plasmas*. 2008. V. 15, № 5. 053103 (5pp).

- [107] Peano F., Martins J. L., Fonseca R. A., Peinetti F., Mulas R., Coppa G., Last I., Jortner J., Silva L. O. Expansion of nanoplasmoids and laser-driven nuclear fusion in single exploding clusters // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2008. V. 50, № 12. 124049 (8pp).
- [108] Wolowski J., Badziak J., Boody F. P., Hora H., Hnatowicz V., Jungwirth K., Krasa J., Laska L., Parys P., Perina V., Pfeifer M., Rohlena K., Rye L., Ullschmied J., Woryna E. Fast ion emission from the plasma produced by the PALS laser system // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2002. V. 44, № 7. P. 1277–1283.
- [109] Habara H., Kodama R., Sentoku Y., Izumi N., Kitagawa Y., Tanaka K. A., Mima K., Yamanaka T. Fast ion acceleration in ultraintense laser interactions with an overdense plasma // *Phys. Rev. E*. 2004. V. 69, № 3. 036407 (10pp).
- [110] Rohlena K., Laska L., Jungwirth K., Krasa J., Krousky E., Masek M., Pfeifer M., Ullschmied J., Badziak J., Parys P., Wolowski J., Gammino S., Torrisi L., Boody F. P. Characteristics and applications of ion streams produced by long-pulse lasers // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005. V. 47, № 12B. P. B503–B512.
- [111] Krushelnick K., Clark E. L., Beg F. N., Dangor A. E., Najmudin Z., Norreys P. A., Wei M., Zepf M. High intensity laser-plasma sources of ions — physics and future applications // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005. V. 47, № 12B. P. B451–B463.
- [112] Krasa J., Jungwirth K., Krousky E., Laska L., Rohlena K., Pfeifer M., Ullschmied J., Velyhan A. Temperature and centre-of-mass energy of ions emitted by laser-produced polyethylene plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2007. V. 49, № 10. P. 1649–1659.
- [113] Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. — М.: Наука, 1964. — 382 с.
- [114] Гуревич А. В., Питаевский Л. П., Смирнова В. В. Ионосферная аэродинамика // *УФН*. 1969. Т. 99, вып. 1. С. 3–49.

- [115] Масленников М. В., Сигов Ю. С. Дискретная модель вещества в задаче об обтекании тел разреженной плазмой // Доклады АН СССР. 1964. Т. 159, № 5. С. 1013–1016.
- [116] Масленников М. В., Сигов Ю. С., Чуркина Г. И. Численные эксперименты по обтеканию тел различной формы разреженной плазмой // Космические исследования. 1968. Т. VI, вып. 2. С. 220–227.
- [117] Taylor J. C. Disturbance of a rarefied plasma by a supersonic body on the basis of the Poisson–Vlasov Equations // Planet. Space Sci. 1967. V. 15, № 1. P. 155–187.
- [118] Konemann B. The collisionless flow of unmagnetized plasmas around bodies // J. Plasma Physics. 1978. V. 20, Pt. 1. P. 17–30.
- [119] Singh N., Thiemann H., Schunk R. W. Studies on counterstreaming plasma expansion // Physica Scripta. 1986. V. 33, № 4. P. 355–369.
- [120] Hester S. D., Sonin A. A. Laboratory study of the wakes of small cylinders under ionospheric satellite conditions // Phys. Fluids. 1970. V. 13, № 3. P. 641–648.
- [121] Raychaudhuri S., Hill J., Chang H. Y., Tsikis E. K., Lonngren K. E. An experiment on the plasma expansion into a wake // Phys. Fluids. 1986. V. 29, № 1. P. 289–293.
- [122] Ogilvie K. W., Steinberg J. T., Fitzenreiter R. J., Owen C. J., Lazarus A. J., Farrell W. M., Torbert R. B. Observation of the lunar plasma wake from the WIND spacecraft on December 27, 1994 // Geophys. Res. Lett. 1996. V. 23, № 10. P. 1255–1258.
- [123] Kellogg P. J., Goetz K., Monson S. J., Bougeret J.-L., Manning R., Kaiser M. L. Observation of plasma waves during a traversal of the Moon's wake // Geophys. Res. Lett. 1996. V. 23, № 10. P. 1267–1270.
- [124] Farrell W. M., Kaiser M. L., Steinberg J. T. Electrostatic instability in the central lunar wake: A process for replenishing the plasma void? // Geophys. Res. Lett. 1997. V. 24, № 9. P. 1135–1138.

- [125] Farrell W. M., Kaiser M. L., Steinberg J. T., Bale S. D. A simple simulation of a plasma void: Applications to Wind observations of the lunar wake // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103, № A10. P. 23,653–23,660.
- [126] Borisov N., Mall U. Plasma distribution and electric fields behind the Moon // *Phys. Lett.* 2000. V. A 265, № 5–6. P. 369–376.
- [127] Birch P. C., Chapman S. C. Detailed structure and dynamics in particle-in-cell simulations of the lunar wake // *Phys. Plasmas.* 2001. V. 8, № 10. P. 4551–4559.
- [128] Гуревич А. В., Мещеркин А. П. Расширяющиеся автомодельные разрывы и ударные волны в дисперсионной гидродинамике // *ЖЭТФ.* 1984. Т. 87, вып. 4(10). С. 1277–1292.
- [129] Bardotti G., Segre S. E. Laminar electrostatic shock waves in a plasma // *Plasma Physics.* 1970. V. 12, № 4. P. 247–252.
- [130] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 65, вып. 2(8). С. 590–604.
- [131] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Распад начального разрыва в уравнении Кортевега–де Вриза // *Письма в ЖЭТФ.* 1973. Т. 17, вып. 5. С. 268–271.
- [132] Forslund D. W., Shonk C. R. Formation and structure of electrostatic collisionless shocks // *Phys. Rev. Lett.* 1970. V. 25, № 25. P. 1699–1702.
- [133] Forslund D. W., Freidberg J. P. Theory of laminar collisionless shocks // *Phys. Rev. Lett.* 1971. V. 27, № 18. P. 1189–1192.
- [134] Mason R. J. Computer simulation of ion-acoustic shocks. The diaphragm problem // *Phys. Fluids.* 1971. V. 14, № 9. P. 1943–1958.
- [135] Mason R. J. Computer simulation of ion-acoustic shocks. II. Slug and piston problems // *Phys. Fluids.* 1972. V. 15, № 5. P. 845–853.
- [136] Sakanaka P. H., Chu C. K., Marshall T. C. Formation of ion-acoustic collisionless shocks // *Phys. Fluids.* 1971. V. 14, № 3. P. 611–614.
- [137] Sakanaka P. H. Beam-generated collisionless ion-acoustic shocks // *Phys. Fluids.* 1972. V. 15, № 7. P. 1323–1327.

- [138] White R. B., Fried B. D., Coroniti F. V. Formation of ion-acoustic shocks // Phys. Fluids. 1974. V. 17, № 1. P. 211–213.
- [139] Мордвинов А. В., Томозов В. М., Файнштейн В. Г. Влияние электронной функции распределения на динамику расширения бесстолкновительной плазмы в фоновую меньшей плотности // ПМТФ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [140] Алиханов С. Г., Белан В. Г., Сагдеев Р. З. О нелинейных ионно-акустических волнах в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7, вып. 11. С. 405–408.
- [141] Taylor R. J., Baker D. R., Ikezi H. Observation of collisionless electrostatic shocks // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 24, № 5. P. 206–209.
- [142] Wong A. Y., Means R. W. Evolution of turbulent electrostatic shocks // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27, № 15. P. 973–976.
- [143] Stern R. A., Decker J. F. Nonlocal instability of finite-amplitude ion waves // Phys. Rev. Lett. 1971, V. 27, № 19. P. 1266–1270.
- [144] Means R. W., Coroniti F. V., Wong A. Y., White R. B. Turbulence in electrostatic ion-acoustic shocks // Phys. Fluids. 1973. V. 16, № 12, P. 2304–2318.
- [145] Andersen H. K., D'Angelo N., Michelsen P., Nielsen P. Investigation of Landau-damping effects on shock formation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, № 4. P. 149–151.
- [146] Andersen H. K., D'Angelo N., Michelsen P., Nielsen P. Experiments on shock formation in a Q -device // Phys. Fluids. 1968. V. 11, № 3. P. 606–610.
- [147] Korn P., Marshall T. C., Schlesinger S. P. Effect of plasma flow on electrostatic disturbances in a Q machine // Phys. Fluids. 1970. V. 13, № 2. P. 517–526.
- [148] Michelsen P., Pecseli H. L. Propagation of density perturbations in a collisionless Q machine-plasma // Phys. Fluids. 1973. V. 16, № 2. P. 221–225.
- [149] Romagnani L., Bulanov S. V., Borghesi M., Audebert P., Gauthier J. C., Lowenbruck K., Mackinnon A. J., Patel P., Pretzler G., Toncian T., Willi O. Observation of collisionless shocks in laser-plasma experiments // Phys. Rev. Lett. 2008. V.101. 025004.

- [150] Morita T., Sakawa Y., Kuramitsu Y., Dono S., Aoki H., Tanji H., Kato T. N., Li Y. T., Zhang Y., Liu X., Zhong J. Y., Takabe H., Zhang J. Collisionless shock generation in high-speed counterstreaming plasma flows by a high-power laser // *Phys. Plasmas*. 2010. V. 17. 122702.
- [151] Kuramitsu Y., Sakawa Y., Morita T., Gregory C. D., Waugh J. N., Dono S., Aoki H., Tanji H., Koenig M., Woolsey N., Takabe H. Time evolution of collisionless shock in counterstreaming laser-produced plasmas // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. 175002.
- [152] Silva L. O., Marti M., Davies J. R., Fonseca R. A., Ren C., Tsung F. S., Mori W. B. Proton shock acceleration in laser-plasma interactions // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. 015002.
- [153] Chen M., Sheng Z. M., Dong Q. L., He M. Q., Li Y. T., Bari M. A., Zhang J. Collisionless electrostatic shock generation and ion acceleration by ultraintense laser pulses in overdense plasmas // *Phys. Plasmas*. 2007. V. 14. 053102.
- [154] Dieckmann M. E., Sarri G., Romagnani L., Kourakis I., Borghesi M. Simulation of a collisionless planar electrostatic shock in a proton–electron plasma with a strong initial thermal pressure change // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2010. V. 52. 025001.
- [155] Sarri G., Dieckmann M. E., Kourakis I., Borghesi M. Shock creation and particle acceleration driven by plasma expansion into a rarefied medium // *Phys. Plasmas*. 2010. V. 17. 082305.
- [156] Sarri G., Dieckmann M. E., Kourakis I., Borghesi M. Generation of a purely electrostatic collisionless shock during the expansion of a dense plasma through a rarefied medium // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 107. 025003.
- [157] Fiuza F., Stockem A., Boella E., Fonseca R. A., Silva L. O., Haberberger D., Tochitsky S., Gong C., Mori W. B., Joshi C. Laser-driven shock acceleration of monoenergetic ion beams // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 109. 215001.
- [158] Fiuza F., Stockem A., Boella E., Fonseca R. A., Silva L. O., Haberberger D., Tochitsky S., Mori W. B., Joshi C. Ion acceleration from laser-driven electrostatic shocks // *Phys. Plasmas*. 2013. V. 20. 056304.

- [159] Perego M., Howell P. D., Gunzburger M. D., Ockendon J. R., and Allen J. E. The expansion of a collisionless plasma into a plasma of lower density // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. 052101.
- [160] Goeler S., Ohe T., D'Angelo N. Production of a thermally ionized plasma with negative ions // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. № 6. P. 2519–2520.
- [161] Wong A. Y., Mamas D. L., Arnush D. Negative ion plasmas // Phys. Fluids. 1975. V. 18, № 11. P. 1489–1493.
- [162] Ludwig G. O., Ferreira J. L., Nakamura Y. Observation of ion-acoustic rarefaction solitons in a multicomponent plasma with negative ions // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52, № 4. P. 275–278.
- [163] Ichiki R., Shindo M., Yoshimura S., Watanabe T., Kawai Y. Ion acoustic waves in one- and two-negative ion species plasmas // Phys. Plasmas. 2001. V. 8, № 10. P. 4275–4283.
- [164] Cooney J. L., Aossey D. W., Williams J. E., Gavin M. T., Kim H. S., Hsu Y. - C., Scheller A., Lonngren K. E. Observations of negative ion plasmas // Plasma Sources Sci. Technol. 1993. V. 2, № 2. P. 73–80.
- [165] Sato N. Production of negative ion plasmas in a Q machine // Plasma Sources Sci. Technol. 1994. V. 3, № 3. P. 395–399.
- [166] Bacal M., Hamilton G. W. H^- and D^- production in plasmas // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42, № 23. P. 1538–1540.
- [167] Byszewski W. W. Diffuse discharges at high-current density // J. Appl. Phys. 1989. V. 66, № 1. P. 103–107.
- [168] Ahn T. H., Nakamura K., Sugai H. Negative ion measurements and etching in a pulsed-power inductively coupled plasma in chlorine // Plasma Sources Sci. Technol. 1996. V. 5, № 2. P. 139–144.
- [169] Yang X., Moravej M., Babayan S. E., Nowling G. R., Hicks R. F. High stability of atmospheric pressure plasmas containing carbon tetrafluoride and sulfur hexafluoride // Plasma Sources Sci. Technol. 2005. V. 14, № 3. P. 412–418.

- [170] Hirata T., Hatakeyama R., Mieno T., Iizuka S., Sato N. The $K^+ - C_{60}^-$ plasma for material processing // *Plasma Sources Sci. Technol.* 1996. V. 5, № 2. P. 288–292.
- [171] Sato N., Mieno T., Hirata T., Yagi Y., Hatakeyama R., Iizuka S. Production of C_{60} plasma // *Phys. Plasmas.* 1994. V. 1, № 10. P. 3480–3484.
- [172] Oohara W., Hatakeyama R., Ishiguro S. Generation of negative potential pulses in a massive negative ion plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2002. V. 44, № 7. P. 1299–1310.
- [173] Oohara W., Hatakeyama R., Ishiguro S. Plasma state transition originating from local production of massive negative ion // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68, № 6. 066407 (8pp).
- [174] D'Angelo N., Goeler S., Ohe T. Propagation and damping of ion waves in a plasma with negative ions // *Phys. Fluids.* 1966. V. 9, № 8. P. 1605–1606.
- [175] Das G. C., Tagare S. G. Propagation of ion-acoustic waves in a multi-component plasma // *Plasma Physics.* 1975. V. 17, № 12. P. 1025–1032.
- [176] Nakamura Y., Odagiri T., Tsukabayashi I. Ion-acoustic waves in a multicomponent plasma with negative ions // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 1997. V. 39, № 1. P. 105–115.
- [177] Nakamura Y., Tsukabayashi I. Observation of modified Korteweg–de Vries solitons in a multicomponent plasma with negative ions // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52, № 26. P. 2356–2359.
- [178] Cooney J. L., Aossey D. W., Williams J. E., Lonngren K. E. Experiments on grid-excited solitons in a positive-ion — negative-ion plasma // *Phys. Rev. E.* 1993. V. 47, № 1. P. 564–569.
- [179] Takeuchi T., Iizuka S., Sato N. Ion acoustic shocks formed in a collisionless plasma with negative ions // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80, № 1. P. 77–80.
- [180] Yi S., Cooney J. L., Kim H. -S., Amin A., El-Zein Y., Lonngren K. E. Reflection of modified Korteweg–de Vries solitons in a negative ion plasma // *Phys. Plasmas.* 1996. V. 3, № 2. P. 529–535.

- [181] McKenzie J. F., Verheest F., Doyle T. B., Hellberg M. A. Compressive and rarefactive ion-acoustic solitons in bi-ion plasmas // *Phys. Plasmas*. 2004. V. 11, № 5. P. 1762–1769.
- [182] Фортов В. Е., Храпак А. Г., Храпак С. А., Молотков В. И., Петров О. Ф. Пылевая плазма // *УФН*. 2004. Т. 174. № 5. С. 495–544.
- [183] Ваулина О. С., Петров О. Ф., Фортов В. Е., Храпак А. Г., Храпак С. А. Пылевая плазма: эксперимент и теория. — М.: Физматлит, 2009. — 316 с.
- [184] Luo H., Yu M. Y. Kinetic theory of self-similar expansion of a dusty plasma // *Phys. Fluids B*. 1992. V. 4, № 5. P. 1122–1125.
- [185] Luo H., Yu M. Y. Self-similar expansion of dusts in a plasma // *Phys. Fluids B*. 1992. V. 4, № 10. P. 3066–3069.
- [186] Yu M. Y., Luo H. Adiabatic self-similar expansion of dust grains in a plasma // *Phys. Plasmas*. 1995. V. 2, № 3. P. 591–593.
- [187] Djebli M., Annou R., Zerguini T. H. Dusty plasma expansion with a variable charge in a spherical configuration // *Phys. Plasmas*. 2001. V. 8, № 5. P. 1493–1496.
- [188] Ivanov A. A., Elizarov L. I., Bacal M., Sionov A. B. Self-consistent charged-particle motion in negative-ion plasmas // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 52, № 6. P. 6679–6685.
- [189] El-Zein Y., Amin A., Kim H.-S., Yi S., Lonngren K. E. Expansion of a negative ion plasma into a vacuum // *Phys. Plasmas*. 1995. V. 2, № 4. P. 1073–1076.
- [190] Intrator T., Hershkowitz N. Beam-plasma interactions in a positive ion-negative ion plasma // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26, № 7. P. 1942–1948.
- [191] Woolsey G. A., Plumb I. C., Lewis D. B. Langmuir probe characteristics in a positive-ion / negative-ion plasma // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1973. V. 6, № 16. P. 1883–1890.
- [192] Цендин Л. Д. Расслоение газоразрядной плазмы в электроотрицательных газах // *ЖТФ*. 1989. Т. 59, вып. 1. С. 21–28.

- [193] Гуцев С. А., Кудрявцев А. А., Романенко В. А. Образование ион-ионной плазмы в результате убегания электронов в паузах импульсного разряда в кислороде // ЖТФ. 1995. Т. 65, вып. 11. С. 77–85.
- [194] Kolobov V. I., Economou D. J. Ion-ion plasmas and double layer formation in weakly collisional electronegative discharges // Appl. Phys. Lett. 1998. V. 72, № 6. P. 656–658.
- [195] Smith B. A., Overzet L. J. Observation of the ion-ion transition in an SF₆ discharge using a fast floating double probe // Plasma Sources Sci. Technol. 1999. V. 8, № 1. P. 82–90.
- [196] Midha V., Economou D. J. Spatio-temporal evolution of a pulsed chlorine discharge // Plasma Sources Sci. Technol. 2000. V. 9, № 3. P. 256–269.
- [197] Oohara W., Hatakeyama R. Pair-ion plasma generation using fullerenes // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91, № 20. 205005 (4pp).
- [198] Oohara W., Date D., Hatakeyama R. Electrostatic waves in a paired fullerene-ion plasma // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95, № 17. 175003 (4pp).
- [199] Vranjes J., Poedts S. On waves and instabilities in pair-ion plasma // Plasma Sources Sci. Technol. 2005. V. 14, № 3. P. 485–491.
- [200] Luque A., Schamel H., Eliasson B., Shukla P. K. Kinetic electrostatic structures in current-carrying pair plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48, № 4. P. L57–L64.
- [201] Saleem H. Kinetic theory of acoustic wave in pair-ion plasmas // Phys. Plasmas. 2006. V. 13, № 4. 044502 (3pp).
- [202] Dubinov A. E., Dubinova I. D., Gordienko V. A. Solitary electrostatic waves are possible in unmagnetized symmetric pair plasmas // Phys. Plasmas. 2006. V. 13, № 8. 082111 (6pp).
- [203] Verheest F. Existence of bulk acoustic modes in pair plasmas // Phys. Plasmas. 2006. V. 13, № 8. 082301 (8pp).
- [204] Saeed R., Mushtaq A. Ion acoustic waves in pair-ion plasma: Linear and nonlinear analyses // Phys. Plasmas. 2009. V. 16, № 3. 032307 (6pp).

- [205] Saleem H. A criterion for pure pair-ion plasmas and the role of quasineutrality in nonlinear dynamics // *Phys. Plasmas*. 2007. V. 14, № 1. 014505 (4pp).
- [206] Медведев Ю. В. Нелинейные явления при распадах разрывов в разреженной плазме. — М.: Физматлит, 2012. — 344 с.
- [207] Анисимов С. И., Медведев Ю. В., Питаевский Л. П. Неустойчивость и турбулентность плазмы в следе за быстро движущимся телом // Доклады АН СССР. 1978. Т. 241, № 3. С. 563–566.
- [208] Анисимов С. И., Медведев Ю. В. Эволюция разрыва плотности в кинетике разреженной плазмы // *ЖЭТФ*. 1979. Т. 76, вып. 1. С. 121–129.
- [209] Анисимов С. И., Медведев Ю. В., Питаевский Л. П. Структура следа при обтекании быстро движущегося тела разреженной плазмой // *ПМТФ*. 1979. № 3. С. 87–94.
- [210] Медведев Ю. В. Предельный поток энергии в плазме // *Письма в ЖТФ*. 1979. Т. 5, вып. 4. С. 200–203.
- [211] Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Медведев Ю. В., Швец В. Ф. Ускорение примесных ионов при расширении плазмы в вакуум // *Физика плазмы*. 1982. Т. 8, вып. 5. С. 1045–1048.
- [212] Анисимов С. И., Медведев Ю. В. Взаимодействие бесстолкновительных ударных волн в плазме // *ЖТФ*. 1988. Т. 58, вып. 10. С. 1846–1855.
- [213] Гуревич А. В., Зыбин К. П., Медведев Ю. В. Нелинейная теория джинсовской неустойчивости в холодном бездиссипативном веществе // *ЖЭТФ*. 1993. Т. 104, вып. 4(10). С. 3369–3386.
- [214] Медведев Ю. В. Ион-ионная неустойчивость при расширении плазмы с отрицательно заряженными ионами в вакуум // *Известия АН, сер. физическая*. 1999. Т. 63, № 11. С. 2278–2280.
- [215] Гуревич А. В., Карлсон Х. С., Медведев Ю. В., Зыбин К. П. Ленгмюровская турбулентность в ионосферной плазме // *Физика плазмы*. 2004. Т. 30, № 12. С. 1071–1081.
- [216] Медведев Ю. В. Ионно-звуковой солитон в плазме с конечной температурой ионов // *Физика плазмы*. 2009. Т. 35, № 1. С. 70–84.

- [217] Медведев Ю. В. Расширение слоя трёхкомпонентной плазмы с отрицательными ионами в вакуум // Физика плазмы. 2010. Т. 36. № 6. С. 548–565.
- [218] Berezovskii M. A., Dyachenko A. I., Konkashbaev I. K., Lopatko V. B., Medvedev Yu. V., Petrov I. V., Rubenchik A. M. Interaction of counterstreaming plasmas // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1984. V. 26, № 12B. P. 1477–1488.
- [219] Gurevich A. V., Sagdeev R. Z., Anisimov S. I., Medvedev Yu. V. Non-linear dynamics and acceleration of ions when a plasma expands into a plasma // Soviet Sci.Rev., A. 1989. V. 13, part 2. P. 1–65.
- [220] Anisimov S. I., Medvedev Yu. V. Decay of plasma cloud in electric field // Physica Scripta. 1990. V. 42., № 6. P. 719–724.
- [221] Medvedev Yu. V. Decay of an ion temperature discontinuity in a collisionless plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 1993. V. 35, № 9. P. 1103–1118.
- [222] Medvedev Yu. V. Decay of an ion density discontinuity in a collisionless plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 1997. V. 39, № 2. P. 291–300.
- [223] Medvedev Yu. V. Particle and energy transport in the process of plasma expansion into a vacuum // Physica Scripta. 1997. V. 56, № 2. P. 392–395.
- [224] Medvedev Yu. V. Expansion of a plasma with negative ions into a vacuum // Plasma Phys. Control. Fusion. 1999. V. 41, № 2. P. 303–313.
- [225] Gurevich A. V., Carlson H. C., Medvedev Yu. V., Zybin K. P. Generation of electron-positron pairs in runaway breakdown // Phys. Lett. 2000. V. A 275. P. 101–108.
- [226] Medvedev Yu. V. Instability during the expansion of a plasma with negative ions into a vacuum // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44, № 8. P. 1449–1461.
- [227] Medvedev Yu. V. Expansion of an ion-ion plasma into a vacuum // Physica Scripta. 2004. V. 69, № 2. P. 120–125.
- [228] Medvedev Yu. V. Expansion of a finite plasma into a vacuum // Plasma Phys. Control. Fusion. 2005. V. 47, № 7. P. 1031–1046.

- [229] Medvedev Yu. V. Similarity and instability in a wake // Plasma Phys. Control. Fusion. 2008. V. 50. 022001 (6pp).
- [230] Medvedev Yu. V. Ion front in an expanding collisionless plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 2011. V. 53, № 12. 125007 (18pp).
- [231] Medvedev Yu. V. Evolution of a density disturbance in a collisionless plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. 2014. V. 56, № 2. 025005 (9pp).
- [232] Медведев Ю. В. Перенос энергии в бесстолкновительной плазме. — Препринт / ИАЭ им. И. В. Курчатова. № 3098. — М., 1979. — 27 с.
- [233] Гуревич А. В., Сагдеев Р. З., Анисимов С. И., Медведев Ю. В. Нелинейная динамика и ускорение ионов при расширении разреженной плазмы в плазму. — Препринт / ИТФ им. Л. Д. Ландау. — Черногоровка, 1986. — 71 с.
- [234] Медведев Ю. В. Расчёт течений с ударными волнами в разреженной плазме // Матер. конф.: Физика низкотемпературной плазмы ФНТП-98, Петрозаводск, 22–27 июня 1998 г. Часть первая. — Изд-во Петрозаводского гос. ун-та. 1998. — С. 521–524.
- [235] Медведев Ю. В. Перенос частиц и энергии при расширении плазмы с отрицательно заряженными ионами в вакуум // Матер. конф.: Физика низкотемпературной плазмы ФНТП-98. — Петрозаводск, 22–27 июня 1998 г. Часть первая. Изд-во Петрозаводского гос. ун-та. 1998. — С. 527–530.
- [236] Медведев Ю. В. Влияние состава плазмы с отрицательными ионами на параметры ударной волны разрежения // Матер. III Всероссийской научной конф.: Молекулярная физика неравновесных систем. — Иваново–Плес, 28 мая — 1 июня 2001г. Изд-во Ивановского гос. ун-та. 2001. — С. 57–61.
- [237] Medvedev Yu. V. Electron motion in the process of plasma expansion into a vacuum // IV International Conference "Plasma Physics and Plasma Technology Contr. Papers, V. 1. — Minsk, Belarus, September 15–19, 2003. — P. 206–209.

- [238] Medvedev Yu. V. Types of motion in a negative ion plasma // V International Conference "Plasma Physics and Plasma Technology Contr. Papers, V.1. — Minsk, Belarus, September 18–22, 2006. — P. 228–231.
- [239] Medvedev Yu. V. Kinetic breaking in a negative ion plasma // V International Conference "Plasma Physics and Plasma Technology Contr. Papers, V.1. — Minsk, Belarus, September 18–22, 2006. — P. 232–235.
- [240] Medvedev Yu. V. Expansion of a finite-size plasma with negative ions into a vacuum // VI International Conference "Plasma Physics and Plasma Technology Contr. Papers, V.1. — Minsk, Belarus, September 28 — October 2, 2009. — P. 234–236.
- [241] Иванов М. Я. К анализу ионных солитонов в плазме без магнитного поля // Физика плазмы. 1982. Т. 8, вып. 2. С. 384–389.
- [242] Анпилов А. М., Бережецкая Н. К., Копьев В. А., Косый И. А., Майорга С. Р., Сатунин С. Н., Матосян Д. Энергетические и зарядовые спектры ионов взрывоэмиссионных центров, возникающих на контакте металл–плазма // Матер. конф.: Физика низкотемпературной плазмы ФНТП-95. — Петрозаводск, 20–26 июня 1995г. Часть 2. Изд-во Петрозаводского гос. ун-та. 1995. — С. 174–175.
- [243] Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, вып. 5. С. 1745–1759.
- [244] Tran M. Q., Appert K., Hollenstein Ch., Means R. W., Vaclavik J. Shocklike solutions of the Korteweg–de Vries equation // Plasma Physics. 1977. V. 19, № 4. P. 381–385.
- [245] Andersen S. A., Jensen V. O., Michelsen P., Nielsen P. Determination and shaping of the ion-velocity distribution function in a single-ended Q-machine // Phys. Fluids. 1971. V. 14, № 3. P. 728–736.
- [246] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 624 с.
- [247] Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, вып. 6(12). С. 2266–2268.

- [248] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978. — 407 с.
- [249] Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961. — 244 с.
- [250] Clark S. E., Rosenberg M., Quest K. Simulations of two-stream instability in opposite polarity dusty plasmas // J. Plasma Physics. 2012. V. 78, part 3. P. 211–224.
- [251] Tuszewski M. An electronegative inductive discharge instability // J. Appl. Phys. 1996. V. 79, № 12. P. 8967–8975.
- [252] Tuszewski M., Gary S. P. Downstream instabilities of electronegative plasma discharges // Phys. Plasmas. 2003. V. 10, № 2. P. 539–545.
- [253] Tuszewski M., White R. R., Wurden G. A. Relaxation oscillations of low-frequency Ar/SF₆ inductive plasma discharges // Plasma Sources Sci. Technol. 2003. V. 12, № 3. P. 396–402.
- [254] Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
- [255] Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. Physics of the pulsar magnetosphere. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993. — 408 p.
- [256] Liang E. P., Wilks S. C., Tabak M. Pair production by ultraintense lasers // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81, № 22. P. 4887–4890.