

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

На правах рукописи

Огородников Леон Леонтьевич

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ
ВИХРЕВЫХ И ВОЛНОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ
ТЕЧЕНИЙ**

Специальность 1.3.14 —
«Теплофизика и теоретическая теплотехника»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Вергелес Сергей Сергеевич

Москва — 2023

Оглавление

| | Стр. |
|---|------|
| Введение | 4 |
| Глава 1. Литературный обзор источников по вопросам исследования когерентных вихревых и волновых течений | 22 |
| 1.1 Примеры вихревых течений в природе и технологических процессах | 22 |
| 1.2 Статистический подход при описании вихревых турбулентных течений | 28 |
| 1.3 Альфа-эффект в потоке проводящей жидкости | 34 |
| 1.4 Статистика волнового пакета, прошедшего через слабонелинейную среду с циклическим усилением | 39 |
| Глава 2. Трёхмерный когерентный вихрь и вычисление структурных функций на малых пространственных масштабах | 51 |
| 2.1 Трёхмерные флуктуации на фоне вращения и трёхмерного сдвигового течения | 52 |
| 2.2 Эволюция флуктуаций в базисе круговых поляризацій | 55 |
| 2.3 Вычисление коррелятора коэффициентов разложения | 58 |
| 2.4 Примеры вычисления корреляторов скорость-скорость | 65 |
| 2.5 Вычисление различных компонент структурной функции поля скорости | 70 |
| 2.6 Сравнение с двумерным случаем | 78 |
| Глава 3. Альфа-эффект для трёхмерного когерентного вихря в магнитном поле | 83 |
| 3.1 Трёхмерный когерентный вихрь с ненулевой спиральностью | 84 |
| 3.2 Альфа-эффект для трёхмерного когерентного вихревого течения | 91 |
| 3.3 Среднее магнитное поле | 100 |

| | |
|--|-----|
| Глава 4. Статистика выходного сигнала в среде с керровской нелинейностью | 106 |
| 4.1 Статистика интенсивности выходного сигнала | 106 |
| 4.2 Определение коэффициента эксцесса в главном порядке | 109 |
| 4.3 Вычисление квадратичной поправки к коэффициенту эксцесса | 114 |
| Заключение | 133 |
| Список сокращений и условных обозначений | 135 |
| Список литературы | 136 |
| Список иллюстраций | 149 |
| Приложение А. Профиль средней скорости трехмерного когерентного геострфического вихря | 150 |
| Приложение Б. Подробное вычисление элементов $\hat{\alpha}$ | 151 |
| Б.1 Предел относительно малой магнитной диффузии $\kappa k_f^2 \ll \Omega$ | 152 |
| Б.2 Предел относительно большой магнитной диффузии $\kappa k_f^2 \gg \Omega$ | 157 |
| Приложение В. Вычисление поправки к куртозису в пределе малого усиления | 159 |
| В.1 Анализ первого выражения | 159 |
| В.2 Анализ второго выражения | 167 |

Введение

В большинстве природных явлений и технологических процессов движение жидкости и газа характеризуется большими числами Рейнольдса. Даже если предположить, что в рассматриваемый момент такое течение является ламинарным, в случае превышения числом Рейнольдса Re некоторого порогового значения Re_{cr} , называемого критическим, амплитуда присущих потоку флуктуаций, зачастую имеющих теплофизическую природу в реальных течениях, будет расти со временем, и при определенных условиях течение может перейти в неустойчивый, или турбулентный, режим [1]. Для каждой геометрии течения существует свое Re_{cr} , которое, как правило, составляет величину $Re_{cr} \gtrsim 10^3 \div 10^4$ для глобального потока (например, для течения жидкости по трубе) [2]. Если же речь идет об однородной изотропной турбулентности, характерные числа Рейнольдса на масштабе инерционного интервала могут быть порядка $Re \gtrsim 1 \div 10$ [1]. При наличии конечного градиента поля температур в течении жидкости наступление турбулентности определяется числом Рэлея Ra [1]. Информация о точном значении величин мгновенных параметров турбулентных течений не дает представления о характере эволюции системы, поэтому хаотические течения следует описывать в рамках статистического подхода.

Статистический подход позволяет исследовать статистические свойства случайных систем. Он предполагает вычисление средних величин (в частности, поля скорости и поля температуры) после усреднения по быстрым флуктуациям [3]. Для решения тех или иных практических задач с использованием данного подхода удобно вычислять средние от возведенных в различные степени случайных величин, в том числе взятые в различные моменты времени или в различных точках пространства. Так, для установления пространственных корреляций удобно вычислять корреляционные и структурные функции измеряемого поля, а для вычисления функции распределения интересующей случайной величины необходимо уметь вычислять средние различных степеней этой самой величины [3]. В данной работе статистический подход применяется для описания поведения случайных систем, имеющих различные статистические свойства. В одном случае исследуется статистика флуктуаций трехмерных когерентных географических вихрей сначала в непроводящей однородной жидкости, а затем

в проводящей. Под "когерентным" понимается крупномасштабное течение, существующее в течение времени, существенно большего характерного времени диссипации в системе [4; 5]. В трехмерном когерентном геострофическом вихре на фоне среднего крупномасштабного течения есть быстрые мелкомасштабные флуктуации, эволюция которых определяется глобальным вращением и локальным сдвигом между соседними слоями, обусловленным наличием вязкости [6]. Пульсации возбуждаются за счет модельной случайной силой, которая применительно к ряду таких течений в атмосфере как циклоны, торнадо, смерчи [7] может иметь конвективную природу [8; 9]. Амплитуда флуктуаций предполагается достаточно малой по сравнению со средним крупномасштабным вихрем, так что их динамика линейна. Схожие течения формируются внутри жидкого внешнего ядра Земли и в недрах некоторых других астрономических объектов [10], так что при рассмотрении трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости возникает похожая картина. Исследование статистических свойств такого вихря проводящей жидкости также представляет большой интерес для исследования задачи охлаждения реакторов с жидкометаллическим теплоносителем [11; 12]. В другом случае рассматривается эволюция огибающей напряженности электромагнитного поля в случайном волоконном лазере, и с помощью статистического подхода вычисляется функция распределения интенсивности излучения. В такой системе огибающая уже подчиняется модифицированному нелинейному уравнению Шредингера, где уже нелинейным кубическим самодействием флуктуаций пренебречь нельзя, однако в пределе слабой нелинейности для описания статистических свойств системы возможно разложение по малому параметру нелинейности. Далее рассмотрим более подробно трехмерный когерентный геострофический вихрь, затем – случайный волоконный лазер.

Первым существенным теоретическим результатом в области статистического описания турбулентных течений при постоянной температуре является теория для статистически изотропного трехмерного развитого турбулентного потока, созданная А.Н. Колмогоровым [13]. В теории Колмогорова устанавливаются законы подобия, исходя из утверждения о существовании прямого каскада энергии и локальном взаимодействии по масштабам внутри инерционного интервала. Прямой каскад энергии подразумевает, что большие вихри распадаются на более мелкие и так далее, т.е. энергия переходит от больших масштабов

к малым. Локальность взаимодействия по масштабам означает, что в процессе дробления участвуют вихри только близких размеров. Турбулентное двумерное течение значительно отличается от трёхмерного, поскольку в нём есть вторая сохраняющаяся квадратичная по скорости величина в пределе малой вязкости — энстрофия — помимо кинетической энергии. Вследствие этого в двумерном турбулентном течении устанавливаются два каскада [14] — обратный каскад энергии, в результате чего из более мелких вихрей образуются более крупные, и прямой каскад энстрофии, в результате которого завихренность передаётся на мелкие масштабы.

В случае ограниченной геометрии обратный каскад накапливает кинетическую энергию на самом большом из доступных масштабов. Вследствие этого возникает конденсат, который чаще всего оказывается вихрем или системой вихрей, что было предсказано в теоретической работе [15], а также обнаружено в численных и натуральных экспериментах при постоянной температуре [4; 16]. Такие статистически устойчивые крупномасштабные структуры, существующие на фоне быстрых флуктуаций в течение времени, значительно большего характерного времени диссипации в системе, называют когерентными вихрями [4]. И.В. Колоколов и В.В. Лебедев создали аналитическую теорию для двумерного когерентного вихря [17], описывающую как интенсивное среднее течение вихрей, так и флуктуации на его фоне, которые представляют собой хаотическое во времени и пространстве изменение скорости. Ключевым отличием этой теории от теории изотропной турбулентности является утверждение о нелокальности взаимодействия по масштабам, так что нелинейное влияние неоднородности конденсата на мелкие турбулентные пульсации сильнее, чем нелинейное взаимодействие этих пульсаций между собой. Это приближение оправдывается, в частности, и существенно более крутым спектром энергии $E(k)$ в присутствии конденсата по сравнению со спектром для изотропной турбулентности $E(k) \propto k^{-5/3}$. Так, в натурном эксперименте [18] была получена зависимость $E(k) \propto k^{-5/2}$, позднее в численном эксперименте [19] был найден спектр энергии, близкий к спектру $E(k) \propto k^{-3}$, предсказанного для прямого каскада изотропной двумерной турбулентности [15; 20; 21]. Теория объясняет результаты численных [22] и лабораторных [23; 24] экспериментов по формированию устойчивых когерентных вихрей, связав их характеристики со статистическими свойствами хаотических флуктуаций течения.

В данной диссертации изучаются турбулентные вихревые течения в быстро вращающейся трехмерной жидкости при постоянной температуре. Модель, лежащая в основе таких вихрей, может быть обобщена на обширный класс атмосферных и других течений. Примерами подобных течений в природе являются торнадо, смерчи, циклоны (воздушные вихри с пониженным давлением) и антициклоны (вихри с повышенным давлением) [7]. Аналогичные течения формируются внутри жидкого внешнего ядра Земли и в недрах некоторых других астрономических объектов [10]. Кроме того, схожие потоки возникают в различных технологических процессах: разделение изотопов тяжелых металлов в центрифугах, конвекция в теплообменных аппаратах, нанесение защитных покрытий с использованием струйных плазмотронов и т.д. [25]. Во всех названных выше течениях имеют место конвективные процессы вследствие наличия тепловых флуктуаций в системе. Их влияние на течение учитывается за счет добавления случайного поля силы, передающей течению ненулевую мощность и распределенной по всему объему равномерно.

Стоит отметить, что большинство физических течений трехмерны, и масштаб по одному из направлений не является существенно меньшим, чем по двум остальным. Двумерное течение является моделью, применимой для трехмерного течения с подавленной третьей (мы её также будем называть вертикальной) компонентой скорости. Это может происходить по целому ряду причин, к которым относятся тонкость жидкого слоя, сильная стратификация по плотности (как, например, в океане), вращение системы в целом [26]. Такие течения можно назвать квазидвумерными. Натурные эксперименты по двумерной турбулентности как раз производятся на тонких жидких слоях [16; 23; 24]. Подавление вертикальной компоненты скорости и однородность скорости вдоль вертикальной оси, достигаемые за счет быстрого вращения жидкости как целого вокруг этой оси, обусловлено согласно теореме Прудмана-Тейлора [27] действием сил Кориолиса при малом числе Россби $Ro \sim |(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}| / |\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}|$, где \mathbf{v} — вектор поля скорости жидкости, $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения. Подавляющая часть кинетической энергии течения содержится в наборе однородных по вертикали вихрей, в которых скорость направлена горизонтально. Такое течение также называют геострофическим, поскольку силы Кориолиса в нём являются чисто потенциальными и компенсируются перепадом давления, что называют геострофическим балансом [28]. Эффект двумеризации течения в быстро вращаю-

щейся жидкости уже несколько десятилетий исследовался экспериментально [29]. В численном моделировании [22] наблюдалось изменение характера турбулентного течения при увеличении угловой скорости вращения (уменьшение числа Россби). При больших числах Россби течение представляло собой статистически изотропную трёхмерную турбулентность, при малых числах Россби оно становилось анизотропным, приобретало форму устойчивых геострофических вихрей. В связи с этим интерес представляет исследование статистики турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихревого течения.

В двумерном когерентном вихре турбулентные пульсации двумерны [17], а в трехмерном когерентном вихре турбулентные пульсации трёхмерны и представляют собой ансамбль инерционных волн [6]. В работах [17] и [6] показано, что статистика пульсаций в присутствии когерентных течений значительно отличается от статистики пульсаций в изотропном случае как в двумерной, так и в трехмерной задачах. Это обусловлено сильным влиянием градиента скорости когерентного течения на динамику мелкомасштабных флуктуаций. В свою очередь мелкомасштабные пульсации $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ оказывают существенное влияние на крупномасштабный профиль когерентного вихря $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, отвечая за поддержание когерентного течения. Среднее от произведения радиальной и азимутальной компонент поля скорости мелкомасштабных пульсаций $\langle u^{\rho} u^{\varphi} \rangle$ есть вклад в касательную компоненту тензора напряжений Рейнольдса $\Pi^{\varphi\rho}$ [6], ответственный за формирование “отрицательной турбулентной вязкости” [30]. Отметим, что масштаб флуктуаций определяется статистикой случайной силы. В экспериментах [31; 32] поле этих сил создавалось за счет быстрого вращения небольших лопастей, расположенных по краям сосуда с жидкостью. Они поочередно совершали колебания то в одном направлении относительно оси вращения, то в другом, так что их движение не вносило вклада в среднюю завихренность, но передавало течению конечную мощность. В некоторых системах эта сила может также иметь конвективную природу. В частности, в работах [8; 9] были описаны численные эксперименты, имеющие похожую постановку задачи, но отличные от рассматриваемой задачи теплофизические и гидродинамические параметры течения. В работах [8; 9] моделируется течение быстровращающейся вязкой жидкости в поле тяжести при переменной температуре (конвекция Рэлея-Бенара). При определенном значении гидродинамических и теплофизиче-

ских параметров в течении формируются когерентные структуры, называемые в этих работах крупномасштабными вихрями (large scale vortexes, LSV). Поэтому в рамках приближения Буссинеска влияние конвекции может быть учтено в уравнении Навье-Стокса в виде случайного поля внешних сил. Количественное исследование статистических свойств поля скорости в сдвиговом конвективном течении представляется крайне сложной задачей. Для простоты анализа данное поле сил в модели предполагается однородным по объему и изотропным, а также короткокоррелированным по времени. Отметим, что проведенные в работе вычисления носят общий характер, поэтому для случая неизотропного поля сил с конечным временем корреляций статистические свойства поля скорости могут быть посчитаны тем же методом, что используется для данной модельной постановки. Поэтому исследование статистики турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихря представляет особый интерес. Объектами исследования статистики мелкомасштабных флуктуаций являются корреляционные и структурные функции. Для двумерного [17] и трехмерного [6] течений была посчитана одноточечная парная корреляционная функция $\langle u^{\rho} u^{\varphi} \rangle$. Эти объекты очень удобны и полезны с практической точки зрения для исследования пространственных корреляций полей скорости течения и температуры [1]. В частности, для задач метеорологии большой практический интерес представляет вычисление пространственных структурных функций [33; 34]. Так, в работе [35] по результатам измерения структурной функции скорости ветра были получены вертикальные профили внешнего масштаба динамической турбулентности в условиях устойчивой атмосферной стратификации. В работе [18] была описана экспериментальная методика нахождения структурных функций поля скорости в быстро вращающемся турбулентном потоке жидкости. В связи с этим в данной диссертации более детально исследуется пространственная статистика турбулентных пульсаций путём вычисления структурных функций различных компонент поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре.

Необходимость создания последовательной аналитической теории трехмерных когерентных течений особенно важна в современных условиях, когда происходит интенсификация многих технологических процессов и обостряются природные катаклизмы. В работе [6] была описана теория, объясняющая причины формирования и сохранения устойчивости трехмерных когерентных вих-

рей во вращающемся турбулентном потоке жидкости, определены соотношения между параметрами системы, при которых вихрь существует и статистически устойчив. Следующим этапом для более глубокого понимания ряда природных явлений и технологических процессов, связанных с трехмерными вихревыми течениями, с целью управления ими или их оптимизацией стало описание статистических свойств рассматриваемых течений проводящей жидкости. Обширный класс течений может приводить к генерации конечного магнитного поля даже из малого по амплитуде магнитного поля, возникающего за счет тепловых флуктуаций. Данное явление называется эффектом динамо [36]. Мы рассматриваем кинематическую стадию динамо, на которой магнитное поле слабо влияет на течение, и не рассматриваем последующую стадию насыщения этого поля за счет обратной реакции на поток [37], [38], [39]. Примерами подобного статистически стационарного насыщения являются магнитные поля планет [40], в частности, Земли [41] и когерентные магнитные поля во Вселенной [42]. В таких системах крупномасштабное магнитное поле как правило существует на фоне мелкомасштабных турбулентных пульсаций, поэтому количественно усиление магнитного поля удобно описывать с помощью величин, усредненных по быстрым и мелкомасштабным турбулентным пульсациям потока [43]. Одной из причин генерации магнитного поля является наличие вклада \mathcal{E} в электродвижущую силу, возникающей вследствие взаимодействия флуктуаций поля скорости с мелкомасштабной компонентой магнитного поля, определяемой взаимодействием турбулентных пульсаций и крупномасштабной компоненты магнитного поля. Если же в турбулентном потоке нарушена зеркальная симметрия и, как следствие, есть ненулевая спиральность [44], электродвижущая сила будет линейно связана с крупномасштабной компонентой магнитного поля $\bar{\mathbf{V}}$: $\mathcal{E} = \hat{\alpha}\bar{\mathbf{V}}$, где $\hat{\alpha}$ — псевдотензор второго ранга. Вследствие спиральности течения жидкости увлекаемые ею тороидальные магнитные поля могут преобразовываться в полоидальные [45]. Данная линейная зависимость называется α -эффектом [46]. Зачастую именно этот эффект определяет самогенерацию магнитного поля, которая обеспечивает наличие магнитного поля у большинства астрономических объектов [47], [48]. Отметим также эксперименты [49], в которых намеренно создаётся вихрь тороидальной формы с ненулевой спиральностью потока с целью активировать механизм динамо по α -эффекту. Изучение эволюции такого вихря тороидальной формы может иметь применение для моделирования

процессов, происходящих в реакторах с жидкометаллическим теплоносителем, в силу актуальности описания теплогидравлических турбулентных характеристик сложных потоков в каналах с учетом крупномасштабных вихревых течений [12]. Так, в исследованиях [50] было показано, что совместное воздействие магнитного поля и конвекции при определенном соотношении критериев Рейнольдса, Гартмана и Рэлея приводит к появлению весьма опасных режимов МГД-теплообмена в трубе и плоском канале. В пристенной области потока жидкого металла развиваются низкочастотные пульсации температуры аномально высокой амплитуды, равной температурному перепаду между стенкой и жидкостью [51]. Причина возникновения этих эффектов может состоять в том, что в потоке вследствие конвекции развиваются вторичные течения в виде крупномасштабных вихрей, устойчивых в магнитном поле [11]. В связи с этим определение величины α -эффекта для трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости представляет большой интерес, чему и посвящен один из разделов данной диссертации. Такая упрощенная модель может являться отправной точкой, позволяющей описывать рассмотренные выше проблемы, имеющие место в технологических процессах.

Последним объектом нашего исследования являются волновые системы, в которых нелинейное межволновое взаимодействие оказывается существенным. Одним из классических примеров подобного нелинейного взаимодействия волн является взаимодействие, описываемое нелинейным уравнением Шредингера [52], которое характеризует реальные процессы в различных физических системах: волны на глубокой воде [53], волны Ленгмюра в плазме [54], конденсат Бозе-Эйнштейна в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях [55], электромагнитные волны в оптоволокне [56]. Примером системы с таким характером взаимодействия волн является случайный волоконный лазер с распределенной обратной связью [57]. Статистику сигнала, динамика которого описывается нелинейным уравнением Шредингера, нельзя описывать в терминах кинетического уравнения [58], [59], [60] в силу свойств интегрируемости этого уравнения [61]. Однако присутствие в системе усиления нарушает интегрируемость, что позволило развить кинетическую теорию для подобных систем в работе [62]. Эта кинетическая теория позволяет описывать количественные характеристики излучения. В частности, в работе [62] была найдена ширина спектра излучения, величина которой хорошо согласуется с экспериментом. В данной диссертации

мы исследуем другую, не менее важную характеристику систем этого класса — статистику интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера. Знание статистики интенсивности и механизма её установления позволяет оценить риски возникновения сильных “выбросов” [63] в волновом пакете, прошедшем через среду с нелинейностью и циклическим усилением, и выявить способы снижения вероятности возникновения таких выбросов, что имеет существенное значение при передаче сигналов по оптоволокну и для других приложений.

Отмеченные выше обстоятельства, связанные с необходимостью детального аналитического описания когерентных вихревых течений, в том числе в проводящей жидкости, а также статистики активных циклических нелинейных волновых систем, и определяют актуальность данной работы.

Целью данной работы является определение свойств парной корреляционной функции поля скорости турбулентных пульсаций в трехмерных когерентных геострофических вихревых течениях, в том числе проводящей жидкости, при постоянной температуре, а также нахождение статистики интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через квазиодномерную среду с кубической нелинейностью и усилением.

Поставленная цель достигается путем решения следующих задач:

1. Вычисление средних от парных произведений компонент поля скорости для описания статистических свойств трехмерных когерентных геострофических вихрей при постоянной температуре;
2. Вычисление структурных функций флуктуаций поля скорости в трехмерных геострофических и двумерных когерентных вихрях при постоянной температуре;
3. Вычисление средней скорость-завихренность для трехмерных геострофических когерентных течений с ненулевой спиральностью;
4. Определение связи электродвижущей силы, возникающей за счет взаимодействия флуктуаций магнитного поля с пульсациями течения трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости, со средним магнитным полем, выраженной в величине α -эффекта;
5. Определение критерия неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости;

6. Нахождение функции распределения интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и усилением.

На защиту выносятся следующие **научные положения и результаты**, принадлежащие лично автору:

1. Определен вид структурных функций поля скорости в трехмерном и двумерном когерентных вихревых течениях при постоянной температуре в зависимости от мощности накачки, вязкости среды и пространственных координат на масштабах r , малых по сравнению с масштабом накачки k_f^{-1} .
2. Установлена зависимость величины α -эффекта от мощности накачки, вязкости, проводимости и угловой скорости вращения трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости в области малых чисел Россби и Экмана ($Ek \ll Ro \lesssim 1$), а также малого магнитного числа Прандтля ($Pr_m \lesssim 1$).
3. Установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре, зависящий от чисел Ro , Ek , Pr_m , а также величины отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля k_f/k_b .
4. Определена функция распределения интенсивности волнового пакета после его прохождения через квазиодномерную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

1. Впервые установлены структурные функции различных компонент поля скорости в зависимости от координат для трехмерных и двумерных когерентных вихревых течений при постоянной температуре на малых по сравнению с масштабом накачки пространственных масштабах;
2. Путем сравнения посчитанных структурных функций различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости для трехмерных и двумерных когерентных течений на малых масштабах в зависимости от мощности накачки и вязкости среды установлено, что в трехмерном случае структурная функция имеет более анизотропный характер;
3. Вычислен тензор, являющийся средним от произведения скорости и завихренности флуктуаций в трехмерном когерентном геострофическом

- вихре, в случае, когда возбуждающая течение сила статистически асимметрична по отношению к зеркальному отражению;
4. Получено выражение величины α -эффекта для трехмерных когерентных геострофических вихрей проводящей жидкости с ненулевой спиральностью в зависимости от чисел Россби Ro , Экмана Ek и магнитного числа Прандтля Pr_m в практически важной области их значений $Ek \ll Ro \lesssim 1$, $Pr_m \lesssim 1$;
 5. Получен критерий роста магнитного поля для трехмерного когерентного геострофического вихря проводящего спирального течения жидкости, зависящий от чисел Ro , Ek , Pr_m , а также отношения k_f/k_b пространственных масштабов накачки и среднего поля;
 6. Найдена функция распределения интенсивности волнового пакета, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением, а также выражение для коэффициента эксцесса как безразмерного параметра нелинейности в первом и втором порядках, определяющего её отличие от релеевской.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что

- разработана методика определения статистических свойств когерентных вихревых течений, в которых есть нелокальное взаимодействие по масштабам; данный подход может быть использован для определения статистических свойств течений, имеющих отличную от рассматриваемой конфигурации внешнего поля силы;

- впервые получена структурная функция поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре, которая хорошо характеризует статистические свойства течения и может быть измерена в натуральных экспериментах;

- результаты исследования могут быть использованы при проведении расчетных оценок и для улучшения качественного понимания некоторых природных явлений (такие как циклоны и антициклоны, торнадо, смерчи, столбчатые вихри в мантии Земли и т.п.), а также для оптимизации ряда технологических процессов (охлаждение реакторов с жидкометаллическим теплоносителем, камеры сгорания, сушильные установки и т.д.);

- вычисленная функция распределения интенсивности волнового пакета свидетельствует о малом отличии статистики интенсивности выходящего сиг-

нала от релеевской, что говорит о низкой вероятности "выбросов" в такой системе. Эти результаты могут быть использованы для создания волоконных линий сверхдальней связи, а также для оптимизации технологических процессов, связанных со случайными волоконными лазерами.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается физически обоснованными, непротиворечивыми математическими моделями гидродинамики несжимаемой жидкости и уравнением Навье-Стокса, соотношениями магнитной гидродинамики, нелинейным уравнением Шредингера, аппаратом теории турбулентности, волновой кинетической теории, магнитной гидродинамики и статистической физики, аппаратом уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппаратом математического анализа, интегрального исчисления и теории вероятности, аппаратом диаграммной техники Уайльда, приближенными методами аналитических вычислений и асимптотик, хорошей согласованностью найденных зависимостей с натурными и численными экспериментами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- С.С. Вергелес, Л.Л. Огородников, В.В. Лебедев, И.В. Колоколов, «Статистика интенсивности в случайном волоконном лазере», VII Международная конференция по фотонике и информационной оптике, Москва, 24-26 января 2018. Сб. научных трудов, с. 184-185 (2018).

- L.L. Ogorodnikov, S.S. Vergeles, V.V. Lebedev, «Intensity Statistics of the Emission of Raman Random Fiber Laser», Optics, Photonics and Lasers: Proc. 1st International Conference on on Optics, Photonics and Lasers (OPAL' 2018), 9-11 May 2018, Barcelona, Spain, p. 257-260 (2018), WoS: 000454436200075.

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес «Структура и пространственные корреляции столбчатых когерентных вихрей в трехмерной вращающейся жидкости», XV Международная конференция «Забабахинские научные чтения», г. Снежинск, 27 сентября – 1 октября 2021.

- Л.Л. Огородников, Вергелес С.С., Лебедев В.В. «Статистика интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера», XVIII Научная школа «Нелинейные волны-2018», г. Нижний Новгород, 26 февраля - 4 марта 2018.

- Вергелес С.С., Огородников Л.Л. «Поведение когерентных вихрей в трехмерной жидкости», Международная конференция «XXI Харитоновские тематические научные чтения», г. Саров, 15 – 19 апреля 2019 г.

- L.L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles «Study of correlation properties of a three-dimensional coherent vortex», Самарские чтения (в память об академике А.А. Самарском), Москва, 22-25 декабря 2021 г.

- Vergeles S.S., Ogorodnikov L.L. «Coherent columnar vortex in three-dimensional rotating turbulent flow: structure and spatial correlations», IV Russian Conference on Magnetohydrodynamics, September 20 – 22, 2021, Perm, Russia

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес « α -эффект в магнитном поле в присутствии трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости», XX Научная школа «Нелинейные волны – 2022», г. Нижний Новгород, 7-13 ноября 2022.

Личный вклад автора заключается в участии в формулировке темы диссертационной работы, проведении аналитических исследований, обсуждении и интерпретации полученных результатов, подготовке материалов к публикации.

Таким образом, в результате выполнения научно-квалификационной работы решена важная научная задача, связанная с исследованием статистических свойств когерентных вихревых и волновых течений, которая может быть использована в интересах прогнозирования ряда природных явлений (в том числе катаклизмов), оптимизации передачи сигналов на дальние расстояния и интенсификации технологических процессов.

Публикации. По теме диссертации **опубликованы** 4 печатные работы в статьях [6], [64], [65], [66], 3 из которых также входят в перечень WoS, и 10 работ в материалах конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 172 страницы с 15 рисунками. Список литературы содержит 155 наименований.

Благодарности

Автор диссертационной работы **благодарен** научному руководителю, Сергею Сергеевичу Вергелесу, за помощь в постановке задачи и многочисленные обсуждения промежуточных и финальных результатов, Колоколову Игорю Валентиновичу и Лебедеву Владимиру Валентиновичу за поддержку, важные

замечания и интерес, проявленный к работе. Автор благодарен всем участникам семинаров и конференций, на которых присутствовал и выступал, и постарался учесть их замечания и рекомендации, высказанные на научных мероприятиях.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, приводится общая характеристика работы, формулируется цель работы и решаемые задачи для её достижения, отмечаются её научная новизна, теоретическая и практическая значимость, обосновывается достоверность полученных результатов и личный вклад автора в работу, приводятся научные положения, выдвигаемые на защиту.

В первой главе диссертации содержится литературный обзор по теме научного исследования. Рассматриваются различные режимы течений жидкости от ламинарного до развитого турбулентного вихревого движения. Приводятся примеры течений в форме трехмерных когерентных столбчатых вихрей. Отмечается их позитивная и негативная роль в ряде природных и технологических процессов.

Рассматриваются способы описания вихревых течений, отмечается сложность получения точного решения уравнения Навье-Стокса для таких движений и обосновывается необходимость статистического способа их описания, в том числе, с использованием корреляционных функций. Излагаются основные положения теории трехмерных когерентных вихревых течений при постоянной температуре, развитой в [6], позволяющей определить профиль скорости среднего течения $U(r)$ и получить выражение для перекрестного коррелятора флуктуаций поля скорости $\langle u^{\xi} u^{\eta} \rangle$. Далее в обзоре освещается важность исследования влияния трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости на внешнее магнитное поле. Проводится анализ области значений магнитных чисел Прандтля, которые уместно рассматривать на практике для решения поставленной задачи. Обсуждается связь α -эффекта, выраженного количественно в виде матрицы пропорциональности между компонентами электродвижущей силы, возникающей за счет турбулентного течения проводящей жидкости в магнитном поле, и компонентами самого магнитного поля, с преобразованием тороидального магнитного поля в полоидальное. Указывается, что α -эффект возможен в течении с дифференциальным вращением и нарушением зеркальной симметрии, а такое спиральное течение может быть создано искусственно. В обзоре анонсируется, что величина α -эффекта трехмерного когерентного вихря

проводящей жидкости вычисляется в области малых чисел Ek , Ro и Pr_m в третьей главе. В обзоре также говорится о важности исследования статистических свойств течений в другом предельном случае, когда амплитуда флуктуаций становится сравнимой с величиной среднего течения. В качестве одного из классов таких нелинейных систем рассматриваются системы, описываемые нелинейным уравнением Шредингера, которое может быть использовано для описания как волн на глубокой воде, так волн в оптоволокне. Обсуждаются способы статистического исследования активных волновых систем с циклическим усилением, к которым относится случайный волоконный лазер с обратной связью. Делается вывод о возможности применения волновой кинетической теории, описанной в [62] на примере случайного волоконного лазера, для исследования таких систем.

Во второй главе изложен подход, позволяющий количественно описывать статистические свойства турбулентных течений и, в частности, трехмерных когерентных геострофических вихревых течений при постоянной температуре. Предполагается возможным разделение течения на средний крупномасштабный поток \mathbf{U} и турбулентные пульсации \mathbf{u} . Задача решается в пределе большого числа Рейнольдса Re , малых чисел Россби Ro и Экмана $Ek \ll Ro$. Влияние конвекции учитывается в виде модельного случайного поля внешних сил, которое считается равномерно распределенным в объеме. Статистика этих сил, передающих энергию вихрю, изотропна, предполагается скоррелированной на малых временах и на конечном пространственном масштабе $\sim k_f^{-1}$. С учетом вышеперечисленного излагается методика вычисления корреляционных функций турбулентных пульсаций поля скорости, описывающих статистические свойства течения. Данный подход реализован на примере вычисления одноточечной парной корреляционной функции азимутальной и радиальной компонент турбулентных пульсаций поля скорости $\langle u_\rho u_\varphi \rangle$, которая содержится в выражении для тензора Рейнольдса и позволяет определить профиль среднего течения. Вычисления $\langle u_\rho u_\varphi \rangle$ проведены в предположении о том, что локальный коэффициент сдвига Σ не зависит от координат на характерных пространственных масштабах инерционных волн. Данное предположение оказывается самосогласованным и позволяет найти средний профиль скорости течения. В результате величина коэффициента сдвига трехмерного когерентного вихревого течения определяется мощностью случайного поля внешних сил, которое может иметь конвективную природу, и кинематической вязкостью. Также пока-

зано, что основной вклад в парную корреляционную функцию дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций ($k_z/k \gtrsim \text{Ro}$). Выражение для парной корреляционной функции было получено для определенного вида модельной внешней силы с корреляционной функцией поля силы $\chi(k)$ специального вида, однако развитый формализм позволяет проводить вычисления для поля случайной силы общего вида. Затем в данной главе исследуется пространственная статистика турбулентных пульсаций поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре. В работе проведены вычисления структурной функции скорость-скорость различных компонент флуктуаций поля скорости \mathbf{u} на малых пространственных масштабах для трехмерных когерентных геострофических вихрей. Полученная структурная функция имеет существенную анизотропию, которая обусловлена локальным сдвигом.

С учетом свойств двумерных флуктуаций [6], [67] посчитаны структурные функции различных компонент поля скорости турбулентных пульсаций в двумерном когерентном вихре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды. Сравнение показало, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный вид, чем в двумерном когерентном течении.

Проведены вычисления структурной функции скорость-скорость различных компонент флуктуаций поля скорости \mathbf{u} на малых пространственных масштабах для трехмерных когерентных вихревых течений. Были вычислены компоненты структурной функции поля скорости в трехмерном когерентном вихре. Также показано, что основной вклад в структурную функцию дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций ($k_z/k \gtrsim \text{Ro}$). С учетом свойств двумерных флуктуаций [6], [67] посчитаны структурные функции различных компонент поля скорости турбулентных пульсаций в двумерном когерентном вихре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды. Сравнение показало, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный вид, чем в двумерном когерентном течении.

Третья глава посвящена рассмотрению вопросов генерации магнитного поля в вихревом потоке проводящей жидкости для случая малых магнитных чисел Прандтля $\text{Pr}_m \lesssim 1$. В частности, рассмотрен α -эффект, связанный с тем, что турбулентный характер вихревого потока приводит к преобразованию тороидального магнитного поля в полоидальное, которое в свою очередь приводит к

возникновению электродвижущей силы. В данной главе исследован α -эффект для трехмерного когерентного вихря с ненулевой спиральностью в проводящей жидкости. С использованием модели трехмерного когерентного вихря найдены компоненты одноточечного коррелятора скорость-завихренность. В присутствии такого когерентного вихря в проводящей жидкости рассмотрено поведение магнитного поля. Показано, что связь между компонентами электродвижущей силы \mathcal{E} и магнитного поля $\bar{\mathbf{V}}$ линейная: $\mathcal{E}^i = \alpha_{ip} \bar{V}_p$, а также получено выражение для всех элементов псевдотензора $\hat{\alpha}$ в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости в зависимости от величин вязкости, магнитной диффузии, угловой скорости вращения и коэффициента сдвига, то есть в зависимости от чисел Россби Ro , Экмана Ek и магнитного числа Прандтля Pr_m . Определена связь между псевдотензором $\hat{\alpha}$ и тензором \hat{N} , элементы которого являются корреляторами различных компонент скорости и завихренности. Найдено выражение для элементов псевдотензора $\hat{\alpha}$ в практически важной области параметров $Ek \ll Ro \lesssim 1$, $Pr_m \lesssim 1$ в зависимости от различных соотношений между этими параметрами. На основании результатов сделан вывод о том, как на величину α -эффекта влияют коэффициент магнитной диффузии и угловая скорость вращения жидкости.

Также получено уравнение эволюции среднего магнитного поля в трехмерном когерентном вихре, а также найден критерий его неустойчивости во времени, то есть роста величины среднего магнитного поля, в зависимости от величины чисел Россби Ro , Экмана Ek , магнитного числа Прандтля Pr_m , а также отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля k_f/k_b .

Заключительная **четвертая глава** посвящена исследованию статистики другого предельного случая течения, когда флуктуации нельзя считать малыми по сравнению со средним течением. Такие системы становятся нелинейными и в ряде случаев могут описываться нелинейным уравнением Шредингера с усилением. Особый интерес среди них представляет исследование активных циклических волновых систем, в частности, случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью. В такой системе, поведение которой описывается в рамках волновой кинетической теории, развитой в [62], определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер. В первом и втором порядках по параметру нелинейности $\gamma L_D \bar{I}$ найдено выражение для коэффициента эксцесса

\mathcal{K} как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеевской.

В заклучении отмечено, что полученные в работе результаты с использованием статистического подхода позволяет лучше понять природу когерентных вихревых и волновых течений, а также могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

Глава 1. Литературный обзор источников по вопросам исследования когерентных вихревых и волновых течений

1.1 Примеры вихревых течений в природе и технологических процессах

Режим течения жидкости характеризуется числом Рейнольдса Re . Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения ($Re < Re_{cr}$), то движение среды ламинарное. Под ламинарным течением понимается [1] упорядоченное движение жидкости или газа, при котором они перемещаются слоями без перемешивания и беспорядочных быстрых изменений поля скорости. Если же $Re > Re_{cr}$, то движение в большинстве случаев характеризуется резким возрастанием амплитуды малых начальных возмущений в движущейся среде и турбулизацией потока [1]. Отметим, что данный механизм имеет место не во всех видах течений. Так, при определенном соотношении между параметрами в течении Пуазейля амплитуда возмущений в каждой точке среды будет стремиться к нулю со временем за счет ненулевой групповой скорости волнового пакета (конвективная неустойчивость) [1], [68], [69]. Поэтому в течениях такого типа переход от ламинарного характера к турбулентному может и не происходить.

Ламинарные течения наблюдаются в очень вязких жидкостях, в течениях с малыми скоростями и в течениях с малыми характерными масштабами, например, в узких капиллярных трубках, в тонком пограничном слое, который образуется вблизи поверхности тел при обтекании их жидкостью или газом и т.п. Данные наблюдения находятся в хорошем согласии с определением числа Рейнольдса и формальным критерием ламинарного течения. С увеличением скорости движения жидкости или газа ламинарное течение в некоторый момент времени может перейти в неупорядоченное или турбулентное течение.

В турбулентном течении мгновенные параметры среды (скорость, плотность, давление, температура) распределены по случайному закону. Состояние турбулентного движения в каждый момент времени t определяется начальными возмущениями, а также свойствами инерции и диссипации, то есть величинами плотности ρ и вязкости ν . Как правило, турбулентное движение рассматрива-

ется как однородное (все средние величины в каждой точке не зависят от положения точки) и изотропное (обладает свойствами симметрии в среднем, т.е. предполагается, что в течение промежутка времени, за которое производится усреднение, в каждой точке пространства все направления равновероятны) [70]. Возмущенная среда движется по инерции, под действием внутренних сил вязкости происходит диссипация кинетической энергии и в результате затухания происходит вырождение турбулентных возмущений. При исследовании такой турбулентности определяются в основном законы затухания [71], [72].

Одним из типов турбулентных течений при постоянной температуре, к описанию которых хорошо применим статистический подход, является развитая турбулентность [1]. Она характеризуется чрезвычайно нерегулярным и беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока, что характерно для достаточно больших значений Рейнольдса [1].

На инерционном интервале Колмогоровым и Обуховым было получено выражение для спектра кинетической энергии пульсаций в трехмерном развитом турбулентном течении [71], [73]:

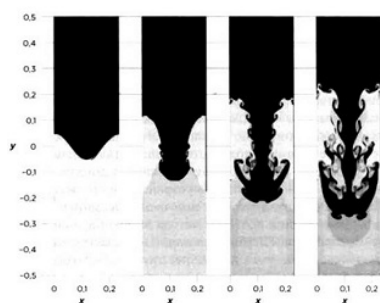
$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.1)$$

где ϵ — мощность диссипации энергии в системе, k — волновое число. Спектр энергии изотропен в пространстве волновых векторов. Энергия в этом случае передается от крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным через многоступенчатый каскадный процесс, который называется прямым каскадом. Крэйчнаном позднее было получено выражение для спектра двумерной развитой турбулентности [15], который также изотропен и имеет вид $E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ на волновых векторах, меньших масштаба накачки k_f (то есть на пространственных масштабах, больших масштаба накачки k_f^{-1}), и $E(k) \sim \nu^{2/3} k^{-3}$, где ν — вязкость жидкости, на волновых векторах, больших масштаба накачки k_f (то есть на пространственных масштабах, меньших масштаба накачки k_f^{-1}). При этом в двумерном течении наблюдается прямой каскад энергий при $k \gtrsim k_f$ и обратный каскад энергий (то есть передача энергии от мелкомасштабных вихрей к крупномасштабным) при $k \lesssim k_f$.

В реальных условиях режимы турбулентного течения заметно сложнее, что может негативно или позитивно отражаться на ряде технологических процессов. Так, например, при инерционном сжатии плазмы в цилиндрических или

сферических устройствах наличие начальных возмущений всегда приводит к развитию их неустойчивости и последующей турбулизации, что, в свою очередь, приводит к ограничению явления кумуляции [74], [75]. Это обстоятельство препятствует достижению необходимых величин сжатия и температуры плазмы для решения проблемы газодинамического термоядерного синтеза [76], [77].

В различных химических, биологических реакторах, теплообменных аппаратах и плазмотронах неустойчивость, напротив, способствует интенсификации режимов их работы и повышению производительности [78].



а) Неустойчивость Релея-Тэйлора



б) Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Рис. 1.1 — Примеры гидродинамических неустойчивостей

Известны различные виды неустойчивости в виде потери устойчивости формы границы раздела разнородных сплошных сред (например, жидкость и газ). Так, при ускоренном движении поверхности раздела двух сред с разной плотностью (ρ_1 и ρ_2), если плотность среды в направлении движения ρ_1 больше, чем плотность следующей за ней среды ρ_2 , то возникает неустойчивость Релея-Тейлора [79]. Развитие неустойчивости Релея-Тейлора сопровождается сдвиговыми течениями, которые приводят к развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и последующей турбулизации течения [80]. Последнее определяется большим числом макроскопических степеней свободы [81].

Обширный класс неустойчивостей обусловлен наличием конвекции. Одним из примеров таких течений является конвекция Бенара [82]. В слое вязкой жидкости в поле тяжести при постоянном градиенте температур возникает упорядоченное течение в виде конвективных ячеек в форме цилиндрических валов или правильных шестигранных структур (1.2). Отметим, что в задаче о конвекции в плоском слое для записи её в приближении Буссинеска возможно получить точное аналитическое решение уравнений гидродинамики

(при абстрактной постановке с двумя свободными недеформируемыми границами слоя) [83]. Гораздо более сложным образом устроено течение в случае, если жидкость вращается как целое, в этом случае возникает вращающаяся конвекция Релея-Бенара [84]. В работах [8; 9] проводилось численное моделирование конвекции Релея-Бенара во вращающейся жидкости. Было показано, что при различных соотношениях между гидродинамическими и теплофизическими параметрами возникают различные режимы течения (1.3). В частности, в некоторой области параметров возникают крупномасштабные вихревые течения (large-scale vortexes, LSV), которые оказываются долгоживущими по сравнению с характерным временем диссипации в системе.

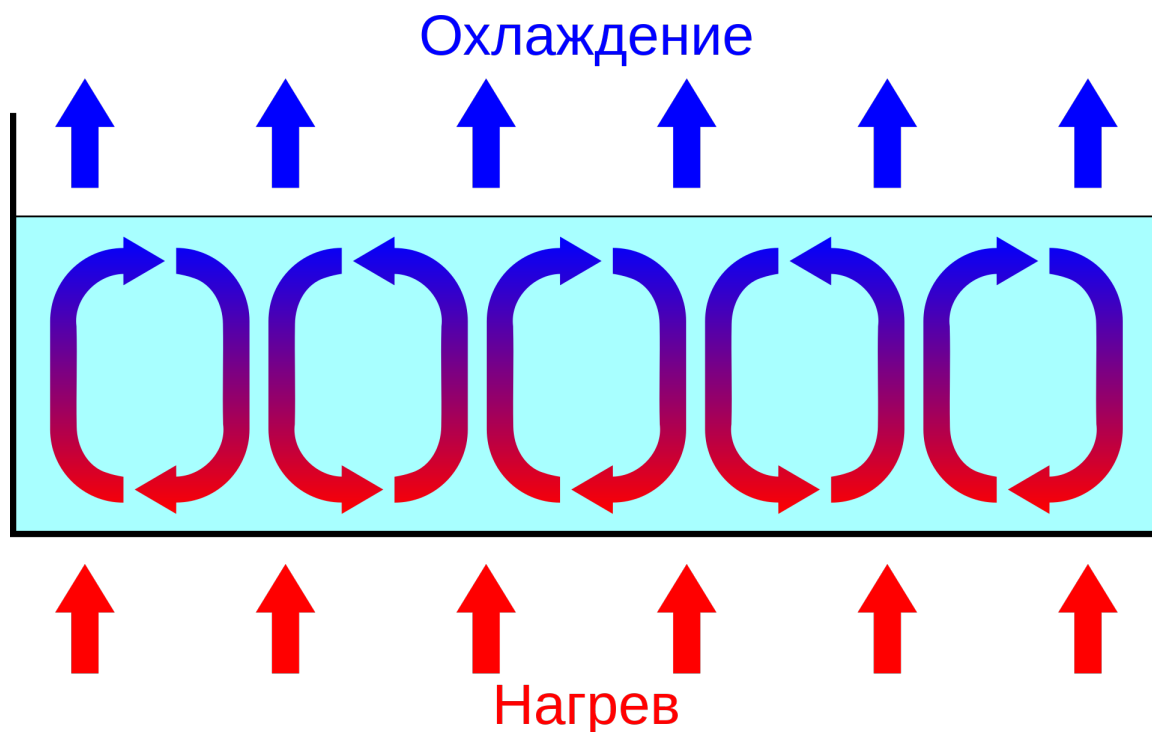


Рис. 1.2 — Схематическое изображение течения жидкости при конвекции Бенара

Вихревое движение является часто встречающимся видом течения жидкости и газа. Вихревые потоки в технике формируются и поддерживаются принудительно конструкцией каналов и камер, входов и выходов из них и используются в различных технологических процессах: сушка и охлаждение (вихревые трубки Ранка-Хилша), нанесение покрытий (плазмотроны), впрыскивание топлива (форсунки) и т.п. [25], [78].

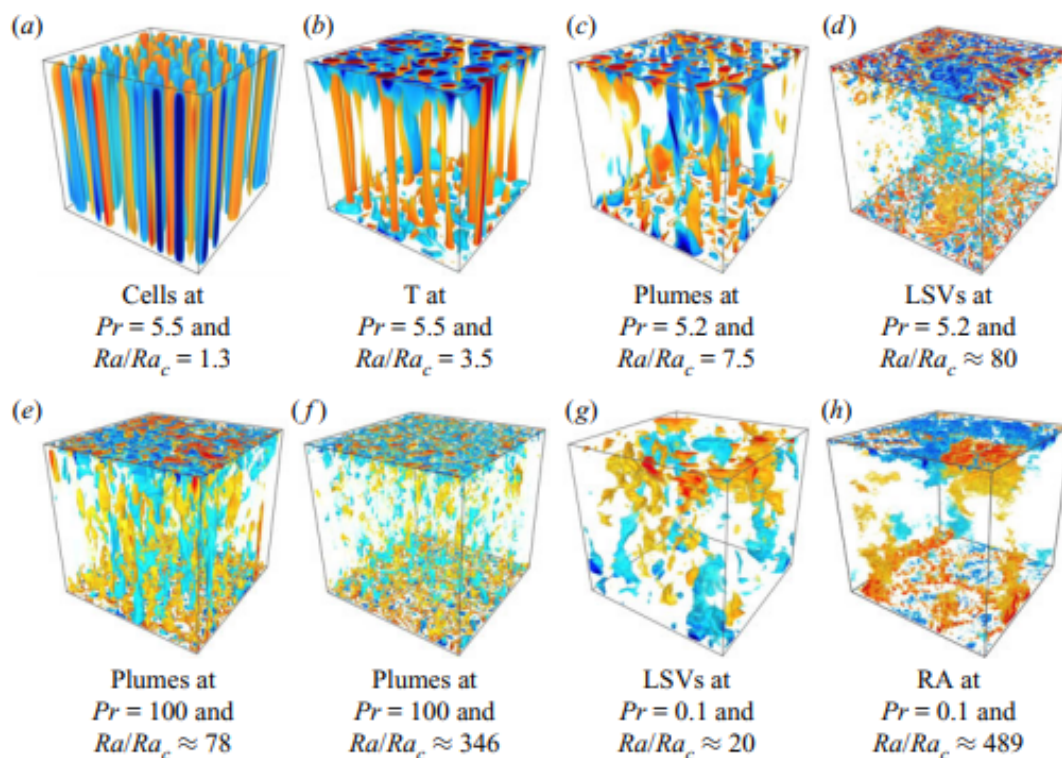


Рис. 1.3 — Результаты численного счета по исследованию вращающейся конвекции Релея-Бенара

В природе такие течения поддерживаются за счет передачи энергии от мелких флуктуаций крупномасштабному течению – смерчи (торнадо) в море и на суше, циклоны и антициклоны в атмосфере (Рис. 1.1а, 1.4а, 1.4б). Причиной возникновения флуктуаций поля скорости являются как правило флуктуации потоков тепла, имеющие место в различных атмосферных течениях. Важным механизмом, оказывающим влияние на формирование таких течений, является конвекция, наличие которой может быть учтено в дальнейшем за счет добавления некоторой модельной силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, действующей на поток жидкости. Вихревые потоки существуют вплоть до космических масштабов, например, это галактики и спиральные туманности [7].

Во многих вихревых течениях, встречающихся в природе и технических приложениях, распространяются инерционные волны, существование которых обусловлено наличием угловой скорости вращения [85]. Такие волны имеют две поляризации (одна волна распространяется вдоль вектора угловой скорости, другая в противоположном направлении). Их спектр имеет вид [85]



а)
Фотография
торнадо



б)
Фотография
циклона

Рис. 1.4 — Фотографии торнадо (а) и циклона (б)

$\omega_k = 2\Omega \cos \theta_k$, $\cos \theta_k = k_z/k$. Заметим, что такие волны могут существовать только в трехмерных течениях.

В природе и технике представлен крайне широкий класс гидродинамических и теплофизических течений, которые трехмерны, то есть не существует выделенного направления, масштаб по которому был бы существенно меньшим, чем по двум остальным. Одним из примеров такого течения при постоянной температуре являются трехмерные когерентные геострофические вихри – статистически устойчивые крупномасштабные структуры, существующие на фоне мелкомасштабных быстрых флуктуаций [31], [6].

Мелкомасштабные флуктуации возбуждаются случайной силой с однородной статистикой во времени и пространстве. Диссипация кинетической энергии в крупномасштабном вихре компенсируется перетоком энергии от мелкомасштабных флуктуаций к крупномасштабному вихрю. Когерентный вихрь заметно деформирует спектр мелкомасштабных пульсаций, так что картина течения сильно отличается от развитой турбулентности, где спектр изотропный [86].

Аналитическая теория когерентных вихрей основана на разделении потока на сильное среднее крупномасштабное течение и на слабые мелкомасштабные флуктуации [17], [5], [6]. Такое разделение невозможно для развитой турбулентности, для которой пульсации не являются слабыми. Усредненное уравнение Навье-Стокса, описывающее крупномасштабное движение, определяется влиянием мелкомасштабных флуктуаций. В частности, тензор напряжения Рейнольдса, через который выражается профиль среднего потока, определяется корреляцией радиальной и азимутальной проекций мелкомасштабной компо-

ненты скорости [19]. Подразумевается, что статистика внешней мелкомасштабной случайной силы является изотропной и однородной по времени. При этом, будучи первоначально изотропными, мелкомасштабные вихри, вовлекающиеся в средний поток, становятся сильно анизотропными за счет влияния среднего потока. Они передают свою кинетическую энергию крупномасштабному потоку и тратят лишь её незначительную часть на вязкую диссипацию. Поэтому корреляции различных компонент скорости вычисляются с учетом того, что поток значительно деформирует флуктуации.

В данной работе рассматривается трехмерный когерентный геострофический вихрь при малых числах Россби и больших числах Рейнольдса. Следует отметить, что многие крупномасштабные атмосферные явления (циклоны, антициклоны, ураганы) относятся именно к трехмерным когерентным геострофическим столбчатым структурам, родившимся из мелкомасштабных турбулентных потоков, и, как упомянуто в [87], в отдаленной перспективе некоторыми из этих явлений можно будет управлять.

1.2 Статистический подход при описании вихревых турбулентных течений

Описание движения воздушных потоков в атмосфере или газа и жидкости в различных технологических процессах основывается на уравнениях гидродинамики и теплофизики, а в качестве объекта используется модель вязкой несжимаемой жидкости [1]. Теоретические исследования течения вязкой жидкости исходят из предпосылки о справедливости уравнения Навье-Стокса для истинного неустановившегося пульсирующего движения. Однако ввиду крайней сложности траектории частиц жидкости при турбулентном движении и, по-видимому, вообще всех основных функциональных связей, получение решения уравнения Навье-Стокса для таких движений представляет собой крайне громоздкую и сложную задачу [70].

Несмотря на актуальность и важность описания и предсказания поведения процессов, происходящих в атмосфере и океанах, в жидком ядре Земли, конвективной зоне Солнца, а также в различных технологических процессах, к

настоящему времени известны точные решения уравнения Навье-Стокса лишь для небольшого класса течений. В этом плане интересна диссертационная работа Е.Ю. Просвирякова, в которой приводятся результаты разработки аналитических методов интегрирования уравнения Навье-Стокса с учетом диссипативных свойств жидкости, найдено точное решение, описывающее неоднородное крупномасштабное течение Куэтта вязкой несжимаемой жидкости для вертикального завихренного потока и ряд других [88]. В работе были найдены новые классы точных решений уравнений термодиффузии, описывающие течение вращающейся проводящей жидкости, а также приведены обобщения точного решения Остроумова - Бириха для конвективного (концентрационного) слоистого течения Марангони вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое.

Однако в природе и технике существует огромное количество классов теплофизических течений, которые имеют турбулентный вихревой характер и которые на текущий момент невозможно решить точно. При исследовании таких течений измеряемые теплофизические величины, быстро меняющиеся со временем, были бы бесполезны, не давали бы четкого представления о характере течения и не могли бы быть использованы в конкретных приложениях [89]. Этим обусловлена необходимость применения статистических способов их описания [90]. Тем не менее даже статистический подход далеко не всегда позволяет количественно описывать подобные течения.

Значительный прогресс в исследовании фундаментальных проблем турбулентности связан прежде всего с А.Н. Колмогоровым [71] и А.М. Обухова [73], их многочисленными учениками и последователями. Согласно теории Колмогорова-Обухова локальное строение мелкомасштабной развитой турбулентности описывается универсальными закономерностями. Доказано, что в области достаточно малых масштабов должен господствовать статистический универсальный режим, практически стационарный и однородный [91].

Однако общая теория турбулентности, которая содержала бы не только качественное описание основных процессов, но и количественные соотношения, позволяющие определять турбулентные характеристики, на текущий момент не создана. До недавнего момента не существовало теории, которая могла бы описывать взаимодействие трехмерного вихря с турбулентными пульсациями [17]. Такая теория была развита в работе [6]. Рассматривалось трехмерное течение жидкости, заполняющей собой всё пространство. Статистические свойства

вихря изучались во вращающейся системе отсчета, движущейся с угловой скоростью Ω , эволюция поля скорости подчиняется уравнению Навье-Стокса [1] во вращающейся системе отсчета. Отметим, что масштаб флуктуаций поля скорости \mathbf{u} определяется статистикой случайной силы. В экспериментах [31; 32] поле этих сил создавалось за счет быстрого вращения небольших лопастей, расположенных по краям сосуда с жидкостью. Они поочередно совершали колебания то в одном направлении относительно оси вращения, то в другом, так что их движение не вносило вклада в среднюю завихренность, но передавало течению конечную мощность. В некоторых системах эта сила может также иметь конвективную природу. В частности, в работах [8; 9] были описаны численные эксперименты, имеющие похожую постановку задачи, но отличные от рассматриваемой задачи теплофизические и гидродинамические параметры течения. В работах [8; 9] моделируется течение быстровращающейся вязкой жидкости в поле тяжести при ненулевом градиенте поля температур (вращательная конвекция Релея-Бенара). При определенном значении гидродинамических и теплофизических параметров в течении формируются когерентные структуры, называемые в работах [8; 9] крупномасштабными вихрями (large scale vortexes, LSV). Поэтому в рамках приближения Буссинеска влияние конвекции может быть учтено в уравнении Навье-Стокса в виде случайного поля внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Количественное исследование статистических свойств поля скорости в сдвиговом конвективном течении представляется крайне сложной задачей. Для простоты анализа данное поле сил в модели предполагается однородным по объему и изотропным, а также короткокоррелированным по времени:

$$\langle f_{u\mathbf{k}}^i(t) f_{u\mathbf{q}}^j(t_1) \rangle = (2\pi)^3 \epsilon \chi(\mathbf{k}) \delta_{\perp 3}^{ij} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t - t_1), \quad (1.2)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \chi(\mathbf{k}) = 1, \quad f_{u\mathbf{k}}^i = f_{u\mathbf{k}}^i.$$

где ϵ – мощность накачки, $\delta_{\perp 3}^{ij} = \delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2$, а функция $\chi(\mathbf{k})$ убывает при $k \sim k_f$ и нормирована на единицу. Также предполагается, что корреляционная функция накачки сферически симметрична. Среднее по времени значение этой внешней силы предполагается равным нулю, при этом она передает системе конечную мощность. Отметим, что проведенные в работе вычисления носят общий характер, поэтому для случая неизотропного поля сил с конечным време-

нем корреляций статистические свойства поля скорости могут быть посчитаны тем же методом, что используется для данной модельной постановки.

Таким образом, эволюция поля скорости подчиняется следующему уравнению:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] = -\nabla (p + p' + \tilde{p}) + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

где p есть давление, поделённое на массовую плотность несжимаемой жидкости ρ , $p' = \left((\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 - r^2 \Omega^2 \right) / 2$ – добавка к удельному давлению, возникающая за счет перехода во вращающуюся систему отсчета, \tilde{p} – добавка к удельному давлению, обусловленная наличием конвекции, ν – кинематическая вязкость. С учетом вышенаписанного уравнение на поле скорости можно записать в следующем виде:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] = -\nabla P_{\text{eff}} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1.4)$$

где P_{eff} – эффективный потенциал, связанный с давлением.

Когерентный вихрь предполагает сосуществование среднего течения \mathbf{U} на фоне быстрых флуктуаций \mathbf{u} , то есть поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$. Компоненты скоростей имеют вид:

$$v_r = u_r, \quad v_\varphi = U + u_\varphi, \quad v_z = u_z; \quad \langle u_i \rangle = 0. \quad (1.5)$$

Среднее течение направлено азимутально и зависит только от расстояния до оси вращения: $\mathbf{U} = U(\rho) \mathbf{e}_\varphi$. Здесь и ниже во всех остальных главах усреднение $\langle X \rangle$ случайной величины X производится по пространственным координатам, ниже также будет определяться усреднение \bar{X} произвольной случайной величины X по времени, большему, чем характерное время корреляции флуктуаций. Для турбулентного течения, которое описывается в рамках статистического подхода, эти средние равны между собой. На рис. 1.5 приведена качественная картина профиля скорости когерентного вихря и линий тока в жидкости.

Рассматривается несжимаемое течение, поэтому

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (1.6)$$

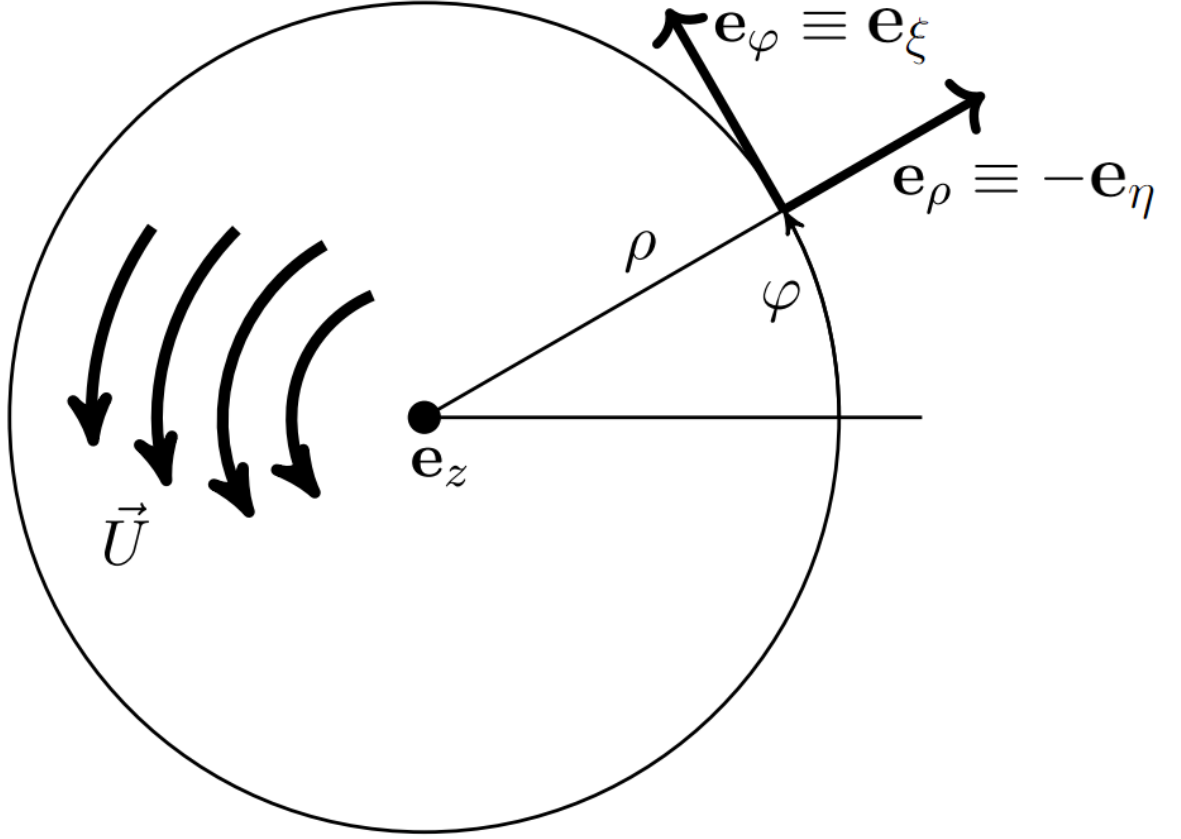


Рис. 1.5 — Профиль скорости трехмерного когерентного вихря

Коэффициент сдвига Σ выражается через скорость среднего течения как

$$\Sigma = \rho \partial_\rho (U/\rho) \quad (1.7)$$

Задача решается при большом числе Рейнольдса $Re \gg 1$ и малом числе Россби $Ro \sim |\nabla U|/\Omega \sim |\Sigma|/\Omega \ll 1$. Эволюцию среднего поля скорости можно определить, оставив только ненулевые слагаемые после усреднения уравнения (1.4) по флуктуациям:

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U} + \langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle + 2[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{U}] = -\nabla \bar{P} + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (1.8)$$

где $\bar{P} = \langle P_{\text{eff}} \rangle$. Поскольку профиль скорости среднего течения зависит только от радиуса и направлен азимутально, квадратичное по \mathbf{U} слагаемое $(\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U}$ обращается в ноль. Уравнение эволюции крупномасштабного течения было получено после усреднения уравнения (1.4) по флуктуациям, а характер эволюции определяется одноточечной парной корреляционной функцией азимутальной и

радиальной компонент турбулентных пульсаций поля скорости $\langle u_\rho u_\varphi \rangle$:

$$\partial_t U = - \left(\partial_\rho + \frac{2}{\rho} \right) \langle u_\rho u_\varphi \rangle + \nu \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \frac{1}{\rho^2} \right) U, \quad (1.9)$$

Данное соотношение может быть также переписано в терминах усредненного по флуктуациям тензора напряжений Рейнольдса [92]:

$$\begin{aligned} \partial_t U = - \left(\partial_\rho + \frac{2}{\rho} \right) \Pi^{\varphi\rho}, \quad \Pi^{ik} = \bar{P} \delta^{ik} + \langle v^i v^k \rangle - \nu (\partial_i U^k + \partial_k U^i), \quad (1.10) \\ \bar{P} = \langle P_{\text{eff}} \rangle, \quad \Pi^{\varphi\rho} = \langle u^\rho u^\varphi \rangle - \nu \Sigma \end{aligned}$$

Представляет интерес определение профиля среднего поля скорости в стационарном случае ($\partial_t U = 0$). Физический смысл тензора Рейнольдса – плотность потока импульса. Его элемент $\Pi^{\varphi\rho}$ будет равен нулю. Это связано с тем, что момент сил, действующих на жидкость внутри цилиндра радиуса ρ , соответствующего расстоянию от центра вихря до рассматриваемой точки лагранжевой траектории, равен нулю в силу стационарности крупномасштабного среднего течения и зависит от потока импульса как $-\rho^2 \Pi^{\varphi\rho}$. Поэтому профиль среднего течения будет определяться условием $\Pi^{\varphi\rho} = 0$:

$$\langle u^\rho u^\varphi \rangle = \nu \Sigma \quad (1.11)$$

Затем изучалось поведение флуктуаций в окрестности некоторой лагранжевой траектории среднего течения в декартовой системе координат $\{\xi, \eta, z\}$ (см. рис. 1.5). Единственной ненулевой компонентой сдвигового течения является U^ξ , которая в данной системе отсчета локально имеет вид

$$U^\xi = -\Sigma \eta. \quad (1.12)$$

Перекрестный коррелятор $\langle u^\rho u^\varphi \rangle$ в новой системе координат переписется как $\langle u^\rho u^\varphi \rangle = -\langle u^\xi u^\eta \rangle$.

В [6] теория трехмерных когерентных геострофических вихрей позволяет вычислять корреляционные функции флуктуаций поля скорости. В работе были проведены вычисления для поля сил накачки (1.2), где корреляционная

функция сил $\chi(k)$ имела гауссов вид:

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{16\pi^{3/2}}{3k_f^5} k^2 \exp\left(-\frac{k^2}{k_f^2}\right). \quad (1.13)$$

В частности, было найдено выражение для коррелятора $\langle u^\xi u^\eta \rangle$. Для более общего вида статистики случайных сил этот результат будет обобщен в следующем разделе, а также будут вычислены компоненты структурной функции флуктуаций поля скорости.

Таким образом, в данном разделе изложены основные предпосылки для создания модели, описывающей статистические свойства турбулентных пульсаций в трехмерном когерентном геострофическом вихре. Получено уравнение эволюции средней скорости, а также определена связь недиагональной компоненты тензора напряжений Рейнольдса для турбулентных пульсаций поля скорости с коэффициентом сдвига крупномасштабного течения для стационарного среднего течения. После вычисления тензора напряжений Рейнольдса, которое проводится во второй главе диссертации, полученное соотношение позволяет определить сначала коэффициент сдвига, а затем и сам профиль скорости крупномасштабного среднего течения.

1.3 Альфа-эффект в потоке проводящей жидкости

Течение проводящей жидкости неизбежно сопровождается возникновением электрического тока [43], который удобно описывать через индуцированное магнитное поле. Это поле можно рассматривать как результат усиления потоком некоторого слабого начального магнитного поля, причиной возникновения которого могут быть, например, тепловые флуктуации, с дальнейшим насыщением усиления за счет обратной реакции магнитного поля на поток [37], [38], [39]. Примерами подобного статистически стационарного насыщения являются магнитные поля планет [40], в частности, Земли [41], когерентное магнитное поле во Вселенной [42] и смоделированное состояние изотропной турбулентности [48]. Зачастую крупномасштабное магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$ поддерживается на фоне мелкомасштабного турбулентного движения. В этом случае взаимодей-

ствие мелкомасштабных турбулентных пульсаций с крупномасштабным магнитным полем создаёт мелкомасштабную слабую компоненту магнитного поля, которая, в свою очередь, взаимодействует с турбулентным потоком и создаёт крупномасштабную электродвижущую силу \mathcal{E} . В результате усиление магнитного поля описывается коэффициентами, являющимися результатом усреднения по турбулентным пульсациям потока [43], [93]. Самогенерация магнитного поля неизбежно имеет место в турбулентных потоках, поскольку в силу игры случая в таких течениях интересующая нас конфигурация будет рано или поздно возникать [94]. В зависимости от свойств симметрии течения может быть либо рост энергии магнитного поля при нулевом среднем поле, либо рост среднего магнитного поля. В случае течения, обладающего отражательной симметрией, среднее магнитное поле будет равно нулю [95]. В работе [95] было показано, что отдельные флуктуации магнитного поля растут экспоненциально на масштабах турбулентности, за счет чего энергия магнитного поля будет возрастать со временем, но среднее магнитное поле будет равно нулю. Для получения ненулевого среднего магнитного поля течение должно обладать зеркальной асимметрией [46], [45].

Если турбулентный поток характеризуется ненулевой средней спиральностью, то электродвижущая сила пропорциональна магнитному полю, $\mathcal{E} = \hat{\alpha}\bar{\mathbf{B}}$. Здесь $\hat{\alpha}$ – псевдотензор второго порядка, эта пропорциональность называется α -эффектом.

Мы рассматриваем жидкость, быстро вращающуюся как целое с угловой скоростью Ω . Например, так обстоит дело с жидким ядром Земли [10] и других планет [40], тогда как космологическое магнитное динамо происходит в других условиях и потому здесь не рассматривается. Предполагается, что течение существенно трёхмерно, поэтому мелкомасштабные турбулентные пульсации являются инерционными волнами [96]. Быстрое вращение подавляет прямой каскад трехмерной турбулентности [27] и поддерживает обратный каскад энергии, которая при определённых условиях может передаваться когерентному вихрю [6], [22], [9]. Мы предполагаем, что такой вихрь установился, то есть имеется среднее крупномасштабное геострофическое вихревое аксиально-симметричное течение \mathbf{U} . Аксиально-симметричное течение не вызывает рост со временем магнитного поля [39; 97]. Поэтому следует рассмотреть мелкомасштабные турбулентные пульсации на фоне среднего течения, нарушающие аксиальную сим-

метрию [98]. Для того, чтобы эти пульсации обеспечивали рост магнитного поля посредством α -эффекта, их статистика должна быть не инвариантной относительно зеркальной симметрии [43]. Отметим, что в общем случае нарушенная инвариантность по четности означает, что турбулентные пульсации обладают средней спиральностью, хотя ненулевая средняя спиральность не является обязательным свойством нарушения [99]. Спиральность течения $H = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$, где \mathbf{u} — поле скорости жидкости или газа, $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ — завихренность, является мерой заузленности вихревых линий в потоке жидкости [100], [101]. Данная физическая величина также является инвариантом для невязкой и даже вязкой среды при некоторых условиях [102]. Таким образом, данная физическая величина может оказаться очень полезной для описания реальных гидродинамических систем, что особенно востребовано при изучении атмосферных вихревых явлений, таких как торнадо, ураганы или смерчи [103], [104]. Спиральная теория турбулентности была развита в [105]. Спиральность также отвечает за вихревую структуру жидкого ядра в астрономических объектах [46]. Дэвидсон объясняет, как в жидком ядре Земли происходит пространственное разделение волн по спиральностям [106], [107]. В некоторых работах экспериментально изучалась спиральная турбулентность. Гайлитис описывает опыты, в которых экспериментально создавалась ненулевая спиральность в потоке [108]. В главе, посвященной α -эффекту для трехмерного когерентного спирального вихревого течения проводящей жидкости, будет показано, как может быть создан такой спиральный поток, вычисляя матрицу одноточечных корреляторов скорость-завихренность, след которой равен величине спиральности потока, а также найдено выражение для этой величины в зависимости от таких безразмерных параметров как числа Россби Ro , Экмана Ek и магнитное число Прандтля Pr_m в области их значений $Ek \ll Ro \lesssim 1$, $Pr_m \lesssim 1$. Нарушение пространственной чётности статистикой турбулентного потока может достигаться за счёт неоднородности возбуждающей течения силы, как это имеет место в геодинamo [106; 107], см. также численное моделирование [109]. В экспериментальных условиях чётность может быть нарушена намеренно [108].

Изучение эволюции таких вихрей может также иметь применение для моделирования процессов, происходящих в реакторах с жидкометаллическим теплоносителем, в силу актуальности описания теплогидравлических турбулентных характеристик сложных потоков в каналах с учетом крупномасштабных

вихревых течений [12]. Так, в исследованиях [50] было показано, что совместное воздействие магнитного поля и конвекции при определенном соотношении критериев Рейнольдса, Гартмана и Релея приводит к появлению весьма опасных режимов МГД-теплообмена в трубе и плоском канале. В пристенной области потока жидкого металла развиваются низкочастотные пульсации температуры аномально высокой амплитуды, равной температурному перепаду между стенкой и жидкостью [51]. Причина возникновения этих эффектов может состоять в том, что в потоке вследствие конвекции развиваются вторичные течения в виде крупномасштабных вихрей, устойчивых в магнитном поле [11].

Течение проводящей жидкости влияет на силовые линии магнитного поля за счет их "вмороженности" в поток (с поправкой на конечную диффузию) [47]. Как следствие этого, некоторые свойства потока могут в измененном виде передаваться магнитному полю. Поэтому спиральные течения проводящей жидкости, в которых имеет место зеркальная асимметрия, могут преобразовывать линии напряженности магнитного поля из тороидальных в полоидальные [46].

Нами предполагаются выполненными следующие неравенства для безразмерных параметров задачи при аналитическом вычислении тензоров $\hat{\alpha}$ и $H_{ik} = \langle u_i \omega_k \rangle$, где \mathbf{u} — поле скорости турбулентных пульсаций, завихренность $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$, а угловые скобки означают усреднение по статистике турбулентных пульсаций.

Эволюция магнитного поля в проводящей жидкости определяется полем скорости потока и магнитной диффузией [110]:

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \kappa \Delta \mathbf{B} \quad (1.14)$$

где κ — коэффициент магнитной диффузии. Большинству реальных течений жидкости также присуща кинематическая вязкость. Отношение порядка между кинематической вязкостью жидкости ν и коэффициентом магнитной диффузии выражается через магнитное число Прандтля $\text{Pr}_m \sim \nu/\kappa$. В ряде астрофизических объектов [48] магнитное число Прандтля мало у звезд ($\text{Pr}_m \sim 10^{-2}$ в основании зоны конвекции Солнца [111]), планет ($\text{Pr}_m \sim 10^{-5}$ [112], $\text{Pr}_m \sim 10^{-6}$ [113]) и в лабораторных динамо-машинах в жидких металлах [114], [115] ($\text{Pr}_m \sim 10^{-5}$ [116]). Большие магнитные числа Прандтля наблюда-

ются в межзвездной среде и протогалактической плазме ($\text{Pr}_m \sim 10^{14} \div 10^{22}$ [117]), разреженной плазме в солнечной короне ($\text{Pr}_m \sim 10^{10}$ [118]) и в галактиках ($\text{Pr}_m \sim 10^{11}$ [93]). Поэтому в данной главе рассматривается случай малых магнитных чисел Прандтля $\text{Pr}_m \lesssim 1$. Это неравенство выполнено в случаях планетарного динамо [112], [113] и лабораторных динамо-установок на жидких металлах [119], [120], [121], [122]. Течение в крупномасштабном вихре относительно слабо по сравнению с вращением жидкости как целого, то есть мало число Россби $\text{Ro} = |\Sigma|/2\Omega \ll 1$, где сила локального сдвига в дифференциальном вращении вихря $\Sigma = r\partial_r(U/r)$, U — азимутальная компонента среднего течения, а r — расстояние до оси вихря. Поэтому динамика турбулентных пульсаций в главном приближении является динамикой инерционных волн. Мы предполагаем, что инерционные волны возбуждаются случайной силой, статистически однородной в пространстве и осесимметричной относительно направления вращения, но имеющей нарушение зеркальной симметрии. Далее, процессы диссипации в жидкости предполагаются относительно слабыми. Вязкость считается малой, $\nu k_f^2/|\Sigma| \ll 1$, где k_f — характерное волновое число турбулентных пульсаций. Это означает, что влияние крупномасштабного течения на турбулентные пульсации преобладает над вязким затуханием. Неравенство может быть переписано в виде $\text{Ek} \ll \text{Ro}$, где число Экмана $\text{Ek} = \nu k_f^2/2\Omega$.

В общем случае тензоры \hat{H} и $\hat{\alpha}$ являются линейно независимыми, хотя оба они обязаны своим происхождением нарушению зеркальной симметрии в статистике турбулентности. Если турбулентность статистически изотропна, то оба этих тензора пропорциональны единичному [39], и имеет место оценка $\hat{\alpha} \sim -\min(\tau_u, 1/\kappa k_f^2) \cdot \hat{H}$ [123–125]. В первом предельном случае τ_u есть время корреляции турбулентного потока, при этом пропорциональность имеет отрицательный знак. Если жидкость быстро вращается как целое, а статистика турбулентного потока аксиально симметрична, то эту симметрию наследуют и тензоры \hat{H} , $\hat{\alpha}$. Для поперечных компонент имеет место оценка $\alpha_{\perp} \sim -\min(1/\Omega, 1/\kappa k_f^2) \cdot H_{\perp}$. Это же соотношение верно для продольной компоненты α_{\parallel} , если магнитная диффузия сильная, $\kappa k_f^2 \gg \Omega$. В обратном пределе слабой магнитной диффузии продольная компонента подавлена, $\alpha_{\parallel} \sim (\kappa k_f^2/\Omega)\alpha_{\perp}$ [126]. В работе [127] производился численный расчёт магнитного динамо на фоне кеплерова вращения, которое имело $\text{Ro} = 1/4$. Рассчитанный α -тензор обладает сильной асимметрией, так что $|\alpha_{\varphi\varphi}| \ll |\alpha_{rr}|$, где φ есть азимутальный

угол и символизирует направление вдоль линий тока сдвигового течения. Наши аналитические вычисления используют технику, развитую в работах [6; 64]. Результаты наших вычислений подтверждают характер анизотропии α -тензора, полученную в [127], хотя полного соответствия ожидать не следует вследствие существенной неоднородности течения в направлении оси вращения, предполагающуюся в [127].

После вычисления $\hat{\alpha}$ -тензора в главе 3 будет установлен критерий динамической неустойчивости аксиально-симметричного крупномасштабного магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$ в кинематическом режиме, основываясь на общем подходе [128], а также определена конфигурация растущего со временем магнитного поля. Согласно [98; 129], в условиях сильного крупномасштабного вихревого течения рост магнитного поля определяется элементом $\alpha_{\varphi\varphi}$. В работе [127] был получен этот критерий для магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$, зависящего только от координаты вдоль оси вращения z . Мы обобщаем его на случай зависимости $\bar{\mathbf{B}}$ также и от радиальной координаты. Полученный ниже критерий также зависит только от элемента $\varphi\varphi$, что находится в согласии с известными результатами [98; 129]. На основании полученной нами зависимости $\hat{\alpha}$ от параметров задачи, мы переписываем критерий неустойчивости магнитного поля в виде условия на безразмерные параметры, характеризующие параметры жидкости и течения.

1.4 Статистика волнового пакета, прошедшего через слабонелинейную среду с циклическим усилением

Предыдущие примеры вихревых когерентных течений были связаны с малыми амплитудами флуктуаций на фоне основного течения. Представляет интерес другой предельный случай, когда амплитуда флуктуаций сравнима с величиной среднего течения. Такие системы становятся нелинейными и в отдельных случаях могут быть описаны нелинейным уравнением Шредингера. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) объясняет большое количество реальных процессов, происходящих в различных физических системах [130]. Так, оно описывает волны на глубокой воде [53], волны Ленгмюра в плазме [54], конденсат Бозе-Эйнштейна в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях [55],

волны в оптоволокне [56]. НУШ может быть получено для волнового пакета с дисперсией ω_k , ширина которого в пространстве волновых векторов Δk много меньше характерных значений волновых векторов k_0 ($\Delta k \ll k_0$). Гамильтониан такой системы будет иметь вид

$$H = \sum_k \omega_k a_k a_k^* + H_{int}, \quad (1.15)$$

где a_k, a_k^* – нормальные координаты гамильтоновой системы, H_{int} – часть гамильтониана, описывающая нелинейное взаимодействие. Уравнения движения такой гамильтоновой системы будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k + i \frac{\delta H_{int}}{\delta a_k^*} = 0 \quad (1.16)$$

Взаимодействие в главном порядке будет четырехволновым, поскольку трехволновое невозможно в силу того, что и волновые векторы, и частоты лежат в узких диапазонах в районе значений k_0 и ω_0 соответственно. Такого рода взаимодействия описывают процессы столкновения и рассеяния двух волн. Часть гамильтониана, отвечающая за это взаимодействие, имеет вид

$$H_{int} = \int dk dk_1 dk_2 dk_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) T_{k, k_1, k_2, k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \quad (1.17)$$

В приближении $\Delta k \ll k_0$ считаем амплитуду взаимодействия слабо зависящей от \mathbf{k} : $T_{k, k_1, k_2, k_3} \approx T_0$, а саму величину T_0 отрицательной, $T_0 = -\gamma$, $\gamma > 0$. Перейдем в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, в которой спектр волны будет иметь вид

$$\omega_k \approx \omega_0 + \frac{\beta_2}{2} q^2, \quad (1.18)$$

где β_2 – коэффициент дисперсии, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Исследуем огибающую волны, которая имеет вид

$$a_k(t) = e^{-i\omega_0 t} \psi_q(t) \quad (1.19)$$

Тогда уравнение на огибающую будет иметь вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2}q^2\right)\psi_q(t) - i\gamma \int dq_1 dq_2 dq_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \psi_{q_1}^* \psi_{q_2} \psi_{q_3} = 0 \quad (1.20)$$

Совершая преобразование Фурье над обеими частями уравнения, прийдём к стандартному виду НУШ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\frac{\beta_2}{2}\Delta\psi - i\gamma|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.21)$$

В зависимости от знака коэффициента β_2 уравнение может быть фокусирующим ($\beta_2 < 0$) и дефокусирующим ($\beta_2 > 0$).

В оптических системах такая нелинейность возникает за счет эффекта Керра. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ зависит от напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} , в первом исчезающем порядке эта зависимость квадратична в силу изотропности среды [131]. В оптических и лазерных системах данный эффект возникает в ходе неупругого рассеяния фотонов на молекулах оптического волокна. Молекула поглощает фотон волны накачки на частоте ω_p и излучает фотон на частоте $\omega_s > \omega_p$. Вектор индукции является кубической функцией суперпозиции вкладов в напряженность поля на частоте накачки \mathbf{E}_p и на частоте рассеяния \mathbf{E}_s :

$$D^i(t) = \epsilon_{i,klm} (E^{*k} E^l E^m + E^{*l} E^m E^k + E^{*m} E^k E^l + c.c.), \quad E^j = E_p^j + E_s^j \quad (1.22)$$

Эффекту Керра будет отвечать слагаемое вида $\gamma|\mathbf{E}_s|^2 E_s^i$. В лазерных системах сигнал испытывает усиление на протяжении всей длины волокна, которое описывается линейным оператором \hat{g} . Оно может вносить какое-то уширение в спектр. Будем считать [62], что величина такого уширения мала по сравнению с шириной спектра.

С учетом добавления усиления, модифицированное уравнение Шредингера имеет вид:

$$\partial_z \psi = \hat{g}\psi + i\frac{\beta_2}{2}\partial_t^2 \psi - i\gamma|\psi|^2\psi, \quad (1.23)$$

где β_2 – дисперсия, γ – коэффициент керровской нелинейности, \hat{g} – коэффициент усиления.

Волновые нелинейные системы, имеющие большое число степеней свободы, являются случайными, поэтому их следует описывать в рамках статистического подхода. Классический подход предполагает получение и решение кинетического уравнения Больцмана [58], [59], [60]. Оптические системы описываются похожим образом, поскольку большое число волновых пакетов, имеющих место в сигнале, нелинейно взаимодействует между собой, взаимодействует со случайными примесями и частично рассеивается на них. Поэтому волновая кинетическая теория хорошо описывает ряд нелинейных оптических систем [56], [132], [133].

Однако в большинстве реальных оптических систем волны испытывают усиление за счет взаимодействия с примесными молекулами в оптоволокне, которое может быть как постоянным по времени, так и переменным, например, меняться циклически. Описанные свойства характерны для лазеров. Для различных механизмов усиления и типов резонаторов существует большое количество теоретических моделей [134], [135]. Однако для волоконных лазеров [136], [137], [138], [139], не имеющих как такового резонатора, данные модели неприменимы, поскольку в них есть сильное взаимодействие между различными модами [140], [141].

Уравнение (1.23) хорошо описывает большое количество различных физических систем [130]. Особый интерес представляет исследование среди них подмножества активных циклических волновых систем, в которых волновому пакету сообщается энергия со стороны внешнего источника, мощность передачи энергии зависит от времени периодически. Примером такой системы является случайный волоконный лазер с распределенной обратной связью [142]. Сигнал многократно проходит через один и тот же участок оптоволокна, на каждом цикле на него действует внешнее усиление. После прохождения большого числа циклов состояния на выходе статистически воспроизводятся от одного цикла к другому. В этом смысле можно говорить о статистическом равновесии, однако в рамках одного цикла спектр излучения может претерпевать заметные изменения. Случайность главным образом возникает за счет нелинейных взаимодействий волн, за счет этого на выходе у сигнала есть некоторая неопределенность величины, хаотичность. Кроме того, случайность может быть связана с наличием примесей, которые влияют на распределение коэффициента обрат-

ного рассеяния вдоль длины лазера. Поэтому такую систему нужно изучать статистическими методами [1], [90], [91].

В данной работе рассматривается случайный волоконный лазер с распределенной обратной связью [142], в котором моды нелинейно взаимодействуют через описанный выше эффект Керра. Эволюция огибающей сигнала в случайном волоконном лазере подчиняется уравнению (1.23). Распространяясь вдоль длины оптоволокна, излучение выходит из торца лазера, затем малая часть сигнала рассеивается назад, проходит следующий цикл усиления и так далее. Сигнал в таком лазере эволюционирует сначала в рамках одного цикла, пока сигнал проходит одну длину волокна и обратно, а затем происходит эволюция на следующих этапах цикла. Можно считать, что в таком лазере накачка происходит не постоянно, а циклически. В случайных волоконных лазерах за счёт керровской нелинейности спектр и другие величины могут заметно меняться и флуктуировать при распространении сигнала вдоль длины волокна в рамках одного цикла. При этом от одного такого цикла к другому выходной сигнал медленно эволюционирует, стремясь к какому-то стационарному состоянию. Если рассматривать состояния на выходе от одного цикла к другому, они статистически воспроизводятся. В таком смысле можно говорить о достижении статистического равновесия. Однако локально (в рамках одного цикла) спектр может претерпевать заметные изменения. В рамках описанных выше предположений в работе [62] была создана волновая кинетическая теория для активных циклических систем, в которой на примере случайного волоконного лазера была предсказана ширина спектра, хорошо согласующаяся с экспериментом [62]. Объектом исследования в [62] была парная одноточечная корреляционная функция $F(z, z, t) = \langle \psi(z, t + t') \psi^*(z, t') \rangle$. Разноточечная корреляционная функция определялась похожим образом: $F(z, z', t) = \langle \psi(z, t + t') \psi^*(z', t') \rangle$. Образ Фурье одноточечной корреляционной функции имеет вид $F(z, \omega) = \int dt e^{i\omega t} \langle \psi(z, t + t') \psi^*(z, t') \rangle$. Ширина спектра Δ определялась из условия $\Delta^2 = \bar{I}^{-1} \int (d\omega) \omega^2 F(z, \omega)$, где $\bar{I} = \langle \psi(L) \psi^*(L) \rangle$ – средняя интенсивность выходного излучения.

Коэффициент усиления \hat{g} имеет следующий вид в координатно-частотном представлении:

$$\hat{g}_\omega(z) = g_R P(z) \left(1 - \frac{\omega^2}{\Delta_g^2} \right), \quad (1.24)$$

где g_R – постоянный коэффициент, $P(z)$ – мощность накачки (безразмерная величина), Δ_g – ширина спектра усиления. Усиление сигнала на всей длине волокна

$$\mathcal{G} = \int_0^L dz g(z) = g_R \int_0^L dz P(z) - \omega^2 \mathcal{A}, \quad (1.25)$$

где $\mathcal{A} = g_R \Delta_g^{-2} \int_0^L dz P(z)$. Спектр усиления считается широким по сравнению со спектром излучения, так что $\Delta_g \gg \Delta$. Поэтому в ряде рассуждений зависимостью \hat{g} от частоты можно пренебречь. Мощность накачки $P(z)$ растет при движении вдоль волокна экспоненциально: $P(z) \sim P(L) \exp(\alpha(z - L))$. Однако темпы этого роста малы, так что $\alpha \ll g_\omega(z)$ [62].

Отметим, что волновая кинетическая теория [62] строится в пределе слабой нелинейности, то есть влияние нелинейного взаимодействия в (1.23) предполагается слабым по сравнению с влиянием дисперсии ($\gamma \bar{l} L_D \ll 1$, где $L_D = |l_D| = 1/(|\beta_2| \Delta^2) \ll L$ – масштаб дисперсионной длины). Основные интегралы, возникающие в процессе вычислений в [62], набирались на масштабах дисперсионной длины L_D возле конца оптоволокна. То есть значения величин именно возле конца волокна определяли основные интегралы. Теория также построена в предположении, что усиление сигнала на этом масштабе длины мало:

$$\epsilon = \int_{L-L_D}^L dz g(z) \ll 1 \quad (1.26)$$

Значит, соотношение $\alpha L_D \ll 1$ также справедливо, поэтому в ходе вычислений в дальнейшем зависимость усиления от координаты z можно будет не учитывать и использовать значение коэффициента усиления на конце оптоволокна $g(L) = g$. В этой связи $\epsilon \approx g L_D$.

В уравнении, описывающем огибающую сигнала, введем обозначение для правой части:

$$i \partial_z \psi = i \hat{g} \psi - \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \psi + \gamma |\psi|^2 \psi + \xi = f \quad (1.27)$$

Рассмотрим сначала среднее $\langle \psi \psi^* \rangle$. Оно вычисляется в пространстве всех состояний ψ и ψ^* , возможных в данной системе:

$$\langle \psi(z,t) \psi^*(z',t') \rangle = \int D\psi D\psi^* D\xi D\xi^* \langle \psi(z,t) \psi^*(z',t') \delta(i\partial_z \psi - f) \rangle_\xi \quad (1.28)$$

Дельта-функцию удобно представить через Фурье-образ:

$$\delta(x) = \int (dp) e^{ipx} \quad (1.29)$$

Зафиксируем реализацию функции ψ , она зависит от момента времени t и координаты z . Тогда для нее будет верно соотношение (1.29). Для произвольной вещественной величины φ , которая в каждой координате проходит по всем реализациям, получим

$$\delta(\varphi) = \int Dp^* \exp \left(i \int_0^L dz \int dt p^* \varphi \right) \quad (1.30)$$

Это представление можно записать для каждого момента времени и координаты. Так как поле ψ является комплексным, необходимо ввести два сопряженных поля: p и p^* . Тогда дельта-функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \delta(i\partial_z \psi - f) = \\ & = \int Dp Dp^* \exp \left(i \int_0^L dz \int dt \{ p^* (i\partial_z \psi - f) - p (-i\partial_z \psi^* - f^*) \} \right) = \quad (1.31) \\ & = \int Dp Dp^* \exp \left(i \int_0^L dz \int dt p^* (i\partial_z \psi - f) + c.c. \right) = \int Dp Dp^* e^{-S} \end{aligned}$$

Здесь S имеет смысл действия. Парная корреляционная функция будет иметь следующий вид:

$$F(z, z', t) = \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle = \int D\psi D\psi^* Dp Dp^* \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') e^{-S} \rangle_\xi \quad (1.32)$$

По аналогии определим функцию Грина

$$G(z, z', t, t') = \langle \psi(z, t) p^*(z', t') \rangle \quad (1.33)$$

и сопряженную функцию Грина

$$\bar{G}(z, z', t, t') = \langle p^*(z, t) \psi(z', t') \rangle \quad (1.34)$$

В выражении для действия есть линейная и нелинейная части: $S = S_0 + S_{int}$, где линейная часть имеет вид $S_0 = \int_0^L dz \int dt \{ p^* ((\partial_z - \hat{g})\psi - i\beta_2/2\partial_t^2\psi) + c.c. \}$, нелинейная часть $S_{int} = -i\gamma \int_0^L dz \int dt (p^*\psi^2\psi^* - p\psi\psi^{*2})$ является поправкой к действию S_0 . С учетом этого

$$\begin{aligned} \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle &= \int D\psi D\psi^* Dp Dp^* \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') e^{-S_0} e^{-S_{int}} \rangle_{\xi} = \quad (1.35) \\ &= \int D\psi D\psi^* Dp Dp^* \left\langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \left(1 - S_{int} + \frac{1}{2} S_{int}^2 + \dots \right) \right\rangle_0, \end{aligned}$$

где в качестве среднего $\langle \dots \rangle_0$ обозначено усреднение с весом e^{-S_0} . Можно посчитать затравочную, то есть усредненную с весом e^{-S_0} , функцию Грина:

$$G_0(\omega, z, z') = \theta(z - z') e^{(g + i\beta_2\omega^2/2)(z - z')} \quad (1.36)$$

В данной задаче удобно вычислять различные средние с помощью диаграммной техники Уайльда [143]. В частности, в [62] с её помощью были получены уравнения на функцию Грина и корреляционную функцию. Функция Грина имеет графическое представление в виде двойной линии:

$$\begin{aligned} (z_1, t_1) \longleftarrow \longrightarrow (z_2, t_2) &= \quad (1.37) \\ &= \langle p^*(z_1, t_1) \psi(z_2, t_2) \rangle \\ &= G(z_2 - z_1, t_2 - t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_1, t_1) \xrightarrow{\times} (z_2, t_2) &= \\
&= \langle p(z_1, t_1) \psi^*(z_2, t_2) \rangle \\
&= G^*(z_2 - z_1, t_2 - t_1)
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$G(z_2 - z_1, t_2 - t_1) = G^*(z_2 - z_1, t_2 - t_1) = 0, \quad z_1 < z_2 \tag{1.39}$$

Затравочные функции Грина обозначаются одиночной линией:

$$\begin{aligned}
(z_1, t_1) \dashrightarrow (z_2, t_2) &= \\
&= \langle p^*(z_1, t_1) \psi(z_2, t_2) \rangle_0 \\
&= G_0(z_2 - z_1, t_2 - t_1)
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Комплексно-сопряженная затравочная функция Грина:

$$\begin{aligned}
(z_1, t_1) \xrightarrow{\times} (z_2, t_2) &= \\
&= \langle p^*(z_1, t_1) \psi(z_2, t_2) \rangle_0 \\
&= G_0^*(z_2 - z_1, t_2 - t_1)
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Парная корреляционная функция обозначается волнистой линией:

$$\begin{aligned}
\psi^*, 2 \overset{\omega}{\rightsquigarrow} \psi, 1 &= \\
&= \int d(t_1 - t_2) \exp(i\omega(t_1 - t_2)) \langle \psi(z_1, t_1) \psi^*(z_2, t_2) \rangle \\
&= F(z_1, z_2, \omega)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Частичное суммирование диаграмм приводит к следующим формально точным соотношениям в рамках техники Уайльда [62]:

$$\xrightarrow{\quad} = \dashrightarrow + \dashrightarrow \boxed{\Sigma_\omega} \xrightarrow{\quad} \tag{1.43}$$

$$\text{wavy line} = \text{double line} \rightarrow \boxed{\Pi_\omega} \times \text{double line} \rightarrow \text{double line} \quad (1.44)$$

где $\hat{\Sigma}$ – собственно-энергетическая функция, $\hat{\Pi}$ – поляризационный оператор. Эти операторы имеют следующий вид в графическом представлении:

$$\Sigma_\omega = -i \text{ (loop) } + \frac{1}{2} \text{ (loop with cross) } - \text{ (loop with cross) } + \dots \quad (1.45)$$

$$\Pi_\omega = \text{ (loop with cross) } + \dots \quad (1.46)$$

Уравнение (1.43) может быть записано аналитически в операторном виде:

$$\hat{G} = \hat{G}_0 \left(\hat{1} + \hat{\Sigma} \hat{G} \right); \quad (1.47)$$

а также в частотном представлении:

$$(G_0^{-1} - \Sigma(\omega)) G(\omega) = \delta(z - z'), \quad G_0^{-1} = \partial_z - g - i\beta_2 \omega^2 / 2 \quad (1.48)$$

Уравнение (1.44) удобно домножить на \hat{G}_0^{-1} и записать аналитически сначала в операторном виде:

$$\hat{G}_0^{-1} \hat{F} = \hat{G}_0^{-1} \hat{G} \hat{\Pi} \hat{G} = \hat{\Sigma} \hat{G} \hat{\Pi} \hat{G} + \hat{\Pi} \hat{G} = \hat{\Sigma} \hat{F} + \hat{\Pi} \hat{G}, \quad (1.49)$$

а затем в частотном представлении:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_z - g - i\frac{\beta_2}{2} \omega^2 \right) F(z, z', \omega) = \\ & = \int_0^z dy \left[\Sigma(z, y, \omega) F(y, z', \omega) + \bar{G}(z', z, \omega) \Pi(z, y, \omega) \right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

Из уравнения (1.50) следует, что если z -интервал достаточно малый и нелинейность невелика, справедливо следующее соотношение:

$$F(y, z, \omega) \approx F(z, z, \omega) \exp \left[(g + i\beta_2 \omega^2 / 2)(y - z) \right], \quad F(y, z, \omega) = \bar{F}(z, y, \omega) \quad (1.51)$$

С учетом этого в [62] было получено уравнение на одноточечную корреляционную функцию:

$$(\partial_z - 2g) F(z, z, \omega) = \int_0^z dy \left[\Sigma(z, y, \omega) F(y, z, \omega) + \bar{G}(z, y, \omega) \Pi(y, z, \omega) + \text{c.c.} \right] \quad (1.52)$$

Исследуем спектр выходного излучения в стационарном режиме. Интенсивность выходного излучения $\langle I(L) \rangle$ обозначим как \bar{I} . Сигнал многократно проходит вдоль волокна, сначала испытывая усиление, затем рассеиваясь назад возле правого торца оптоволокна с помощью механизма случайного релеевского рассеяния назад [57] и так далее. Такое рассеяние можно описывать путем ввода эффективных коэффициентов отражения $|R_\omega| \ll 1$ [57], связывающих амплитуды огибающих сигнала на левом и правом концах оптоволокна:

$$\psi_\omega(0) = R_\omega \psi_\omega(L) \quad (1.53)$$

В теории [62] исследовался режим слабой нелинейности, так что относительное усиление интенсивности сигнала η после прохождения оптоволокна сначала в одну сторону, а потом в другую, предполагалось достаточно малым ($\eta \ll 1$):

$$1 + \eta = |R_\omega|^2 \exp \left(2 \int_0^L dz g \right), \quad (1.54)$$

Введем обозначения $F = F(L, \omega)$, $F_j = F(L, \omega_j)$, $j = \bar{1, 3}$. В [62] уравнение (1.52) было переписано в следующей форме:

$$(\eta - 2\mathcal{A}\omega^2) F = \frac{4\gamma^2}{3\beta_2^2} \int (d\omega_1)(d\omega_2) \frac{F F_1 F_2 + F F_1 F_3 - F F_2 F_3 - F_1 F_2 F_3}{(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)^2}, \quad (1.55)$$

где величина $\mathcal{A} = g_R \Delta_g^{-2} \int_0^L dz P(z)$ была определена выше таким же образом, частота $\omega_3 = \omega + \omega_1 - \omega_2$. Ширина спектра определяется из условия $\eta - 2\mathcal{A}\Delta^2 = 0$. Сравнивая различные слагаемые в (1.55), можно установить $\bar{I} \sim \beta_2 \eta^{3/2} / (\gamma \mathcal{A})$, откуда получается следующая зависимость средней интенсивности выходного излучения от ширины спектра:

$$\bar{I} \sim \frac{\beta_2}{\gamma} \sqrt{\mathcal{A}} \Delta^3 \quad (1.56)$$

Таким образом, в данном режиме $\Delta \propto \bar{I}^{1/3}$, что хорошо согласуется с экспериментом в слабонелинейном режиме [62].

Таким образом, в данном разделе описаны основные принципы волновой кинетической теории [62] для активных циклических волновых систем на примере случайного волоконного лазера, а также показано, как данная теория была использована в [62] для нахождения зависимости ширины спектра от интенсивности выходного излучения, которая хорошо согласуется с экспериментом [62].

Выводы по главе 1

1. Приведены примеры основных видов вихревых течений в природе и технике.
2. Анализ характера турбулентных пульсаций вихревых течений говорит о необходимости использования статистического подхода к определению основных закономерностей вихревого течения, в том числе с использованием корреляционных и структурных функций. Сформулированы основные предпосылки для создания аналитического подхода, описывающего статистические свойства трехмерного когерентного геострофического вихря.
3. Отмечена актуальность исследования α -эффекта в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости. Рассмотрена связь α -эффекта со спиральностью течения.
4. Изложены основные предпосылки создания волновой кинетической теории для активных циклических нелинейных волновых систем. Приведен вывод нелинейного уравнения Шредингера, лежащего в основе описания эволюции сигнала, распространяющегося в некоторых видах таких систем, в частности, в случайном волоконном лазере.

Глава 2. Трехмерный когерентный вихрь и вычисление структурных функций на малых пространственных масштабах

Как было определено во введении, когерентными вихрями называются статистически устойчивые крупномасштабные структуры, существующие на фоне быстрых флуктуаций в течение времени, много большего характерного времени диссипации в системе, и имеющие скоррелированную по фазе завихренность во всех точках существования течения [4]. Примерами таких течений в природе являются торнадо, циклоны и антициклоны, а также столбчатые вихри, возникающие в мантии земной коры [7].

Рассматриваем трехмерное течение жидкости, заполняющей собой всё пространство. В начальный момент времени жидкость покоится, затем включается глобальное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, направленной вертикально вверх. Поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ такого течения жидкости подчиняется уравнению Навье-Стокса во вращающейся системе отсчета [1]:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] = -\nabla P_{\text{eff}} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ содержит среднюю компоненту $\mathbf{U}(t, \mathbf{r})$ и турбулентные пульсации $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ [6]. Вращение предполагаем сильным, так что число Россби крупномасштабного течения мало, $Ro_R \sim |\nabla \mathbf{U}|/2\Omega \sim |\Sigma|/2\Omega \ll 1$. Считаем также, что средняя компонента \mathbf{U} меняется на временах и пространственных масштабах много больших, чем характерные масштабы для флуктуирующей части \mathbf{u} , среднее по времени от которой равняется нулю. Среднее течение аксиально-симметричное, так что компоненты скоростей имеют следующий вид:

$$v_r = u_r, \quad v_\varphi = U + u_\varphi, \quad v_z = u_z; \quad \langle u_i \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Согласно (1.9), для определения среднего профиля скорости необходимо вычислить тензор напряжений Рейнольдса турбулентных пульсаций поля скорости. Для этих целей, а также для определения других статистических свойств течения, исследуем уравнение на турбулентные пульсации поля скорости. Пред-

полагаем, что флуктуирующая часть потока \mathbf{u} относительно слабая, так что в уравнении на турбулентные пульсации поля скорости можно пренебречь нелинейным по \mathbf{u} слагаемым по сравнению со слагаемым, отвечающим за взаимодействие пульсаций со средним полем скорости \mathbf{U} . Таким образом, динамика турбулентной части \mathbf{u} будет описываться линеаризованным по \mathbf{u} уравнением Навье-Стокса, которую удобно исследовать в декартовой системе координат $O\xi\eta z$, заданной в локальной окрестности лагранжевой траектории.

Данная глава посвящена изучению статистики турбулентных пульсаций трехмерного когерентного геострофического вихря в рамках описанной выше постановки. В следующих разделах получим уравнение, описывающее эти флуктуации, а затем определим корреляционные и структурные функции турбулентных пульсаций поля скорости.

2.1 Трёхмерные флуктуации на фоне вращения и трёхмерного сдвигового течения

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса во вращающейся системе координат (1.4) с добавлением модельной случайной силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Согласно (1.5), выделим среднюю и флуктуирующую части поля скорости и подставим их в (1.4). Из уравнения (1.4) исключим слагаемые, имеющие ненулевые средние по турбулентным пульсациям и содержащиеся в уравнении на среднее поле скорости (1.8):

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{U} + \{(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \rangle\} + 2[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}] = \\ = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $P = P_{\text{eff}} - \langle P_{\text{eff}} \rangle$. В предположении о том, что флуктуации малы по сравнению со средним течением, мы можем пренебречь квадратичным слагаемым по пульсациям поля скорости, содержащимся в фигурной скобке. Таким образом, линеаризованное уравнение эволюции пульсаций поля скорости имеет следующий вид в декартовой системе координат $O\xi\eta z$ [6]:

$$(\partial_t + \Sigma\eta\partial_\xi)\mathbf{u} + u^\eta\Sigma\mathbf{e}_\xi + 2[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}] = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}_u, \quad (2.4)$$

которое в Фурье-представлении имеет вид

$$(\partial_t - \Sigma k_\xi \partial_{k_\eta})\mathbf{u} + 2\Omega[\mathbf{e}_z, \mathbf{u}] = -\Sigma u^\eta \mathbf{e}_\xi - i\mathbf{k}P_{\mathbf{k}} - \nu\mathbf{k}^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_u, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_u) = 0, \quad (2.5)$$

где \mathbf{e}_ξ – единичный вектор, направленный вдоль оси $O\xi$.

Парная корреляционная функция случайной силы, возбуждающей флуктуации, короткокоррелирована во времени, а образ Фурье её пространственной части в имеет вид

$$\begin{aligned} \langle f_{u\mathbf{k}}^i(t) f_{u\mathbf{q}}^j(t_1) \rangle &= \epsilon\chi(\mathbf{k})\delta_{\perp 3}^{ij} \frac{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{(2\pi)^{-3}} \delta(t - t_1), \\ \int (d^3k) \chi(\mathbf{k}) &= 1, \quad f_{u\mathbf{k}}^i = f_{u\mathbf{k}}^i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ϵ – мощность накачки, $\delta_{\perp 3}^{ij} = \delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2$, а функция $\chi(\mathbf{k})$ убывает при $k \sim k_f$ и нормирована на единицу. Также предполагается, что корреляционная функция накачки сферически симметрична. Считаем также, что на характерном пространственном масштабе инерционных волн $\sim v_g |\Sigma|^{-1} \sim k_f^{-1} \Omega / |\Sigma| \sim (k_f \text{Ro})^{-1}$ величина коэффициента сдвига остается неизменной, поэтому при изучении эволюции турбулентных пульсаций величину коэффициента сдвига Σ можно считать постоянной и независимой от волновых векторов.

Решение будем искать методом характеристик [144]. Выберем параметром вдоль характеристики время, тогда характеристика задаётся линией

$$k'_\eta(t) = k_\eta - tk_\xi, \quad \mathbf{k}'(t) = \{k_\xi, k'_\eta(t), k_z\}. \quad (2.7)$$

Производная от скорости вдоль характеристики:

$$\partial_t \mathbf{u} = -\Sigma u^\eta \mathbf{e}_\xi - 2\Omega[\mathbf{e}_z, \mathbf{u}] - i\mathbf{k}'P_{\mathbf{k}'} - \nu\mathbf{k}'^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_u, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}'(t)}. \quad (2.8)$$

Чтобы найти давление, надо воспользоваться условием несжимаемости. Продифференцируем его по времени:

$$0 = \partial_t(\mathbf{k}'(t), \mathbf{u}) = (\mathbf{k}'(t), \partial_t \mathbf{u}) + (\partial_t \mathbf{k}'(t), \mathbf{u}) = (\mathbf{k}'(t), \partial_t \mathbf{u}) - \Sigma u^\eta k_\xi. \quad (2.9)$$

Теперь домножим обе части уравнения (2.8) скалярно на вектор $\mathbf{k}'(t)$, воспользовавшись результатом преобразований (2.9):

$$0 = -2\Sigma k_\xi u^\eta - 2\Omega (\mathbf{k}', [\mathbf{e}_z, \mathbf{u}]) - ik'^2 P_{\mathbf{k}'}, \quad (\mathbf{k}', [\mathbf{e}_z, \mathbf{u}_k]) = k'_\eta u^\xi - k_\xi u^\eta.$$

В результате получим выражение для давления в импульсном представлении:

$$P_{\mathbf{k}'} = \frac{2i}{k'^2} (\Sigma k_\xi u^\eta + \Omega [k'_\eta u^\xi - k_\xi u^\eta]) \quad (2.10)$$

Подставим полученное выражение (2.10) в исходное уравнение (2.8):

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= -\Sigma u^\eta \mathbf{e}_\xi - 2\Omega [\mathbf{e}_z, \mathbf{u}_k] + \\ &+ \frac{2\mathbf{k}'}{k'^2} (\Sigma k_\xi u^\eta + \Omega k'_\eta u^\xi - \Omega k_\xi u^\eta) - \nu k'^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_u. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эту систему неоднородных линейных уравнений можно переписать в сокращённом виде

$$\partial_t u^i = C_j^i u^j - \nu k'^2 u^i + f_u^i, \quad (2.12)$$

$$C_j^i = \begin{pmatrix} \frac{2\Omega k_\xi k'_\eta}{k'^2} & \Sigma \left(\frac{2k_\xi k_\xi}{k'^2} - 1 \right) + 2\Omega \left(1 - \frac{k_\xi^2}{k'^2} \right) & 0 \\ -2\Omega \left(1 - \frac{k'_\eta{}^2}{k'^2} \right) & \frac{2k_\xi k'_\eta}{k'^2} (\Sigma - \Omega) & 0 \\ \frac{2\Omega k_z k'_\eta}{k'^2} & \frac{2k_\xi k_z}{k'^2} (\Sigma - \Omega) & 0 \end{pmatrix}^i_j \quad (2.13)$$

Таким образом, в данном разделе получено линеаризованное уравнение, описывающее турбулентные пульсации поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре.

2.2 Эволюция флуктуаций в базисе круговых поляризаций

Если сдвиговое течение отсутствует, то в линейном приближении эволюция флуктуаций на фоне вращения сводится к осцилляциям инерционных волн, которые характеризуются волновым вектором и поляризацией, так что Фурье-компоненту скорости следует раскладывать по двум круговым поляризациям (число поляризаций равняется двум в силу несжимаемости поля скорости жидкости):

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=\pm 1} a_{\mathbf{k},s} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = a_{\mathbf{k},+} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^+ + a_{\mathbf{k},-} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^-, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = \frac{[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{e}_z]] + isk [\mathbf{k}, \mathbf{e}_z]}{\sqrt{2}k^2 \sin \theta_{\mathbf{k}}}, \quad (2.14)$$

$a_{\mathbf{k},s}$ – коэффициенты разложения. Базисные векторы являются ортонормированными и обладают следующими симметриями

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) &= 1, & (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) &= 0, \\ \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{*,s} &= \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s} = \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s, & (\mathbf{k}, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Введя обозначение $k_{\perp} = \sqrt{k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2}$, распишем отдельно компоненты базисных векторов:

$$h_{\mathbf{k}}^{s,x} = \frac{k_z k_{\xi} + isk k_{\eta}}{k_{\perp} k \sqrt{2}} \quad h_{\mathbf{k}}^{s,y} = \frac{k_z k_{\eta} - isk k_{\xi}}{k_{\perp} k \sqrt{2}} \quad h_{\mathbf{k}}^{s,z} = h_{\mathbf{k}}^{-s,z} = -\frac{k_{\perp}}{k \sqrt{2}} \quad (2.16)$$

В силу того, что в координатном представлении скорость $\mathbf{u}(r)$ – вещественна, справедливо следующее соотношение:

$$a_{\mathbf{k},s} = a_{-\mathbf{k},s}^* \quad (2.17)$$

Нам также понадобятся для дальнейших вычислений следующие комбинации компонент базисных векторов:

$$h_{\mathbf{k}}^{s,x} h_{\mathbf{k}}^{s,y} = \frac{k_{\xi} k_{\eta} (k^2 + k_z^2) + isk k_z (k_{\eta}^2 - k_{\xi}^2)}{2k_{\perp}^2 k^2}; \quad h_{\mathbf{k}}^{s,x} h_{\mathbf{k}}^{-s,y} = -\frac{k_{\xi} k_{\eta} + isk k_z}{2k^2}. \quad (2.18)$$

Соотношения (2.14)-(2.18) понадобятся в дальнейшем для описания корреляционных свойств трехмерного когерентного вихря.

В силу условия несжимаемости течения, у скорости есть только две линейно-независимые компоненты. Перепишем уравнение (2.12) в терминах двух круговых поляризаций (2.14). Нам надо в том числе учесть, что волновой вектор теперь меняется в соответствии с уравнением характеристики (2.7). Уравнение (2.12) теперь выглядит так:

$$\partial_t(a_{\mathbf{k}',+} h_{\mathbf{k}'}^{+i} + a_{\mathbf{k}',-} h_{\mathbf{k}'}^{-i}) = C_j^i(a_{\mathbf{k}',+} h_{\mathbf{k}'}^{+j} + a_{\mathbf{k}',-} h_{\mathbf{k}'}^{-j}) - \nu \mathbf{k}'^2 u^i + f_u^i \quad (2.19)$$

(далее для удобства в рамках этого раздела опускаем штрих над волновым вектором). Спроецируем это уравнение на вектор $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}$, воспользовавшись условием ортогональности (2.15). При этом нам придётся вычислить

$$(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \partial_t \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = -is \Sigma \frac{k_\xi^2 k_z}{k_\perp^2 k}, \quad (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \partial_t \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = 0, \quad (2.20)$$

а также

$$(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \hat{C} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = -\Sigma \frac{k_\xi k_\eta (k^2 + k_z^2) + isk k_z (k_\eta^2 - k_\xi^2)}{2k_\perp^2 k^2}, \quad (2.21)$$

$$(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \hat{C} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = 2is\Omega \frac{k_z}{k} + \Sigma \frac{k_\xi k_\eta + isk k_z}{2k^2} \quad (2.22)$$

Проекция на векторы $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}$ приводит к системе двух уравнений

$$2\partial_t a_{\mathbf{k},s} + (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \partial_t \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) a_{\mathbf{k},s} = (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \hat{C} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) a_{\mathbf{k},s} + (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}, \hat{C} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{-s}) a_{\mathbf{k},-s} - 2\nu \mathbf{k}^2 a_{\mathbf{k},s} + 2f_{u\mathbf{k}}^s. \quad (2.23)$$

которые после приведения подобных слагаемых записываются в виде

$$\begin{aligned} \partial_t a_{\mathbf{k},s} = & \left(2is\Omega \frac{k_z}{k} + \Sigma \frac{k_\xi k_\eta - isk k_z}{2k^2} - is \Sigma \frac{k_\xi^2 k_z}{k_\perp k} \right) a_{\mathbf{k},s} - \\ & - \Sigma \frac{k_\xi k_\eta (k^2 + k_z^2) - isk k_z (k_\eta^2 - k_\xi^2)}{2k_\perp^2 k^2} a_{\mathbf{k},-s} - \nu \mathbf{k}^2 a_{\mathbf{k},s} + f_{u\mathbf{k}}^s. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для дальнейшего удобства введем следующие обозначения:

$$\ell_{\mathbf{k}} = \Sigma \frac{k_{\xi} k_{\eta}}{2k^2}, \quad g_{\mathbf{k}} = 2\Omega \frac{k_z}{k} - \Sigma \frac{k_z(3k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2)}{2kk_{\perp}^2}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}} + isp_{\mathbf{k}} &= -(\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s, \hat{C}\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s) = \Sigma h_{\mathbf{k}}^{s,\xi} h_{\mathbf{k}}^{s,\eta} = \Sigma (h_{\mathbf{k}}^{-s,\xi} h_{\mathbf{k}}^{-s,\eta})^*, \\ q_{\mathbf{k}} &= \Sigma \frac{k_{\xi} k_{\eta} (k^2 + k_z^2)}{2k_{\perp}^2 k^2}, \quad p_{\mathbf{k}} = \Sigma \frac{k_z (k_{\eta}^2 - k_{\xi}^2)}{2k_{\perp}^2 k}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тогда уравнение (2.24) на коэффициенты разложения запишется в виде

$$\partial_t \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}',+} \\ a_{\mathbf{k}',-} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}',+} \\ a_{\mathbf{k}',-} \end{pmatrix} - \nu \mathbf{k}'^2 \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}',+} \\ a_{\mathbf{k}',-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{u\mathbf{k}'}^+ \\ f_{u\mathbf{k}'}^- \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\hat{A}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} \ell_{\mathbf{k}'} + ig_{\mathbf{k}'} & -q_{\mathbf{k}'} + ip_{\mathbf{k}'} \\ -q_{\mathbf{k}'} - ip_{\mathbf{k}'} & \ell_{\mathbf{k}'} - ig_{\mathbf{k}'} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

или

$$\begin{aligned} \partial_t a_{\mathbf{k}',s} &= (\ell_{\mathbf{k}'} + isg_{\mathbf{k}'}) a_{\mathbf{k}',s} - (q_{\mathbf{k}'} - isp_{\mathbf{k}'}) a_{\mathbf{k}',-s} - \nu \mathbf{k}'^2 a_{\mathbf{k}',s} + f_{u\mathbf{k}'}^s = \\ &= A_{s\sigma}(\mathbf{k}') a_{\mathbf{k}',\sigma} - \nu \mathbf{k}'^2 a_{\mathbf{k}',s} + f_{u\mathbf{k}'}^s. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Данное уравнение описывает динамику коэффициентов разложения поля скорости в базисе круговых поляризаций и является линейным. В пространстве двух поляризаций скорости введём эволюционную матрицу \hat{Q} для уравнения (2.29), которая не учитывает влияние вязкости и внешней силы:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{Q}(t,\tau) &= \hat{A}\hat{Q}(t,\tau), \quad Q^{s,\sigma}(\tau,\tau) = \delta^{s,\sigma}, \\ \hat{Q}(t,\tau) &= \mathcal{T}_{t_1} \exp \left(\int_{\tau}^t dt_1 \hat{A}(\mathbf{k}'(t_1)) \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решением (2.27) для коэффициентов $a_{\mathbf{k},s}$ в терминах эволюционной матрицы \hat{Q} является

$$a_{\mathbf{k}'(t),s}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau e^{-\Gamma(t,\tau)/2} Q^{s,\sigma}(t,\tau) f_{u\mathbf{k}'(\tau)}^{\sigma}(\tau), \quad (2.31)$$

где $\Gamma(t, \tau) = 2\nu \int_{\tau}^t dt_1 k^2(t_1)$.

Таким образом, в данном разделе найдено выражение для коэффициентов разложения $a_{\mathbf{k},s}$ флуктуаций поля скорости \mathbf{u} в базе векторов поляризации инерционных волн $\mathbf{h}_{\mathbf{k},s}$. Это выражение позволяет проводить вычисления корреляционных и структурных функций турбулентных пульсаций поля скорости.

2.3 Вычисление коррелятора коэффициентов разложения

Зная выражение для коэффициентов разложения $a_{\mathbf{k},s}$, можно вычислить их коррелятор, который определяется статистикой случайной силы. Спроецируем компоненты корреляционной функции случайной изотропной силы \mathbf{f} (1.2) на базисные векторы круговых поляризаций $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$ для дальнейший вычислений:

$$\begin{aligned} \langle f_{u\mathbf{k}}^s(t_1) f_{u\mathbf{q}}^\sigma(t_2) \rangle &= \frac{(2\pi)^3}{4} \epsilon \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\perp 3}^{ij} \chi(\mathbf{k}) h_{\mathbf{k}}^{-s,i} h_{-\mathbf{k}}^{-\sigma,j} = \\ &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) F_{s\sigma}(\mathbf{k}), \quad F_{s\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon (2\pi)^3}{2} \chi(\mathbf{k}) \delta_{s\sigma} \quad (2.32) \\ \langle f_{u\mathbf{k}}^s f_{u\mathbf{q}}^{*\sigma} \rangle &= \langle f_{u\mathbf{k}}^s f_{u,-\mathbf{q}}^\sigma \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta(t_1 - t_2) F_{s\sigma}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Здесь учитывались симметрия базисных векторов и их ортогональность волновому вектору и друг другу, см. (2.15).

Тогда коррелятор коэффициентов разложения $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{q},s'} \rangle$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{q},s'} \rangle &= \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^t d\tau_2 e^{-\Gamma(t,\tau_1)} \\ &\quad \sum_{\sigma_1 \sigma_2} Q_k^{s\sigma_1}(t, \tau_1) Q_q^{s'\sigma_2}(t, \tau_2) F_{\sigma_1 \sigma_2} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(\tau_1 - \tau_2) = \quad (2.33) \\ &= \int_{-\infty}^t d\tau e^{-\Gamma(t,\tau)} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} Q_k^{s\sigma_1}(t, \tau) Q_{-k}^{s'\sigma_2}(t, \tau) F_{\sigma_1 \sigma_2}(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \end{aligned}$$

В секторе быстрых осцилляций ($\Sigma k_\xi \ll \Omega k_z$) решение для матрицы (2.30) находится в виде разложения T -экспоненты по малому параметру $\Sigma k_\xi / (\Omega k_z) \ll 1$. Малость этого параметра приводит к тому, что в матрице \hat{A} (2.27) разность диагональных матричных элементов велика по сравнению со всеми другими матричными элементами. Исключим быстрые осцилляции, перейдя во вращающуюся систему координат. Для этого вводим матрицу \hat{P} , см. (2.27):

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}_d + \hat{A}_o, & A_{ds,\sigma}(t) &= (\ell_{\mathbf{k}'(t)} + isg_{\mathbf{k}'(t)})\delta_{s\sigma}, \\ \hat{Q}(t,\tau) &= \exp\left(\int_\tau^t dt_1 \hat{A}_d(t_1)\right) \hat{P}(t,\tau) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$Q_{\mathbf{k},s,\sigma}(t,\tau) = P_{\mathbf{k},s,\sigma}(t,\tau) \exp\left(\int_\tau^t dt_1 (\ell_{\mathbf{k}'(t_1)} + isg_{\mathbf{k}'(t_1)})\right) P_{\mathbf{k},s,\sigma}(t,\tau) \quad (2.35)$$

Эволюция матрицы \hat{P} определяется уравнением

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{P}(t,\tau) &= \exp\left(-\int_\tau^t dt_1 \hat{A}_d(t_1)\right) \hat{A}_o(\mathbf{k}'(t)) \exp\left(\int_\tau^t dt_1 \hat{A}_d(t_1)\right) \hat{P}(t,\tau), \\ A_{o,s\sigma}(\mathbf{k}) &= (isp_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}})\delta_{s,-\sigma}, & B(t,\tau) &= -(q_{\mathbf{k}'(t)} - ip_{\mathbf{k}'(t)})e^{iG(t,\tau)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$G(t,\tau) = -2 \int_\tau^t dt_1 g_{\mathbf{k}'(t_1)}. \quad (2.37)$$

$$\partial_t \hat{P}_{\mathbf{k}(t)}(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & B(t,\tau) \\ B^*(t,\tau) & 0 \end{pmatrix} \hat{P}_{\mathbf{k}'(t)}(t,\tau) \equiv \hat{B} \hat{P}_{\mathbf{k}(t)}(t,\tau),$$

Величина B как функция времени быстро осциллирует (период осцилляций мал по сравнению со значением $1/B$). Поэтому эволюционное уравнение можно решать, раскладывая T -экспоненту:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\mathbf{k}(t)}(t,\tau) &\approx \left(\hat{1} + \int_\tau^t dt_1 \hat{B}(t_1,\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_\tau^t dt_1 \hat{B}(t_1,\tau) \int_\tau^{t_1} dt_2 \hat{B}(t_2,\tau) \right) \hat{P}_{\mathbf{k}'(\tau)}(\tau,\tau) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Мнимая часть показателя экспоненты (2.36) G может быть вычислена явно, используя соотношения (2.25) и (2.26):

$$G(k_\xi/k_\eta, k_\xi/k_z; t, \tau) \equiv G_\Omega + G_\Sigma,$$

$$G_\Omega = -2 \int_\tau^t dt_1 2\Omega \frac{k_z}{k'} = 4 \frac{\Omega k_z}{\Sigma k_\xi} \ln \left(\frac{k'(t) + k'_\eta(t)}{k'(\tau) + k'_\eta(\tau)} \right).$$

$$G_\Sigma(t, \tau) = \ln \left(\frac{k'(t) + k'_\eta(t)}{k'(\tau) + k'_\eta(\tau)} \right) + 2 \left[\arctan \left(\frac{k_z k'_\eta(t)}{k_\xi k'(t)} \right) - \arctan \left(\frac{k_z k'_\eta(\tau)}{k_\xi k'(\tau)} \right) \right].$$

Также вычислим явно действительную часть показателя экспоненты, т.е. интеграл от функции $\ell_{\mathbf{k}'}$ (2.25):

$$\int_\tau^t dt_1 \ell_{\mathbf{k}'(t_1)} = \int_\tau^t dt_1 \frac{\Sigma k'_\xi k'_\eta}{2 k'^2} = -\frac{1}{2} \int_{k'_\eta(\tau)}^{k'_\eta(t)} \frac{dk'_\eta k'_\eta}{k'^2} = \ln \left(\frac{k'(\tau)}{k'(t)} \right) \quad (2.39)$$

Недиагональный матричный элемент в (2.38) имеет следующий вид:

$$P_{\mathbf{k}'(t)}^{s, -s}(t, \tau) = \int_\tau^t dt_1 B(t_1, \tau) = \int_\tau^t dt_1 (isp_{\mathbf{k}'(t_1)} - q_{\mathbf{k}'(t_1)}) e^{isG(t_1, \tau)}, \quad (2.40)$$

Интегрирование (2.40) может быть выполнено приближённо, используя тот факт, что интеграл от отдельно быстроосциллирующего множителя экспоненты может быть вычислен точно в главном порядке по Ro :

$$\int_\tau^t dt_1 e^{iG_\Omega(t_1, \tau)} = \int_\tau^t dt_1 \left(\frac{k_\eta(t_1) + k'(t_1)}{k'_\eta(\tau) + k'(\tau)} \right)^{4i \frac{\Omega k_z}{\Sigma k_\xi}} \approx \frac{i}{4\Omega k_z} \left(k e^{iG_\Omega(t, \tau)} - k'(\tau) \right)$$

В результате недиагональные матричные элементы оказываются равными следующему выражению:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{k}'(t)}^{s,-s}(t,\tau) &= \int_{\tau}^t dt_1 B^{s,-s}(t_1,\tau) = \\
&= \int_{\tau}^t dt_1 (isp_{\mathbf{k}'(t_1)} - q_{\mathbf{k}'(t_1)}) e^{isG_{\Sigma}(t_1,\tau)} e^{isG_{\Omega}(t_1,\tau)} = \\
&= -\frac{is}{4\Omega k_z} \int_{\tau}^t d \left(k'(t_1) e^{isG_{\Omega}(t_1,\tau)} \right) (q_{\mathbf{k}'(t_1)} - isp_{\mathbf{k}'(t_1)}) e^{isG_{\Sigma}(t_1,\tau)} = (2.41) \\
&= \frac{1}{4\Omega k_z} \left((isp_{\mathbf{k}'(\tau)} + q_{\mathbf{k}'(\tau)}) k'(\tau) - (isp_{\mathbf{k}'(t)} + q_{\mathbf{k}'(t)}) k'(t) e^{isG(t,\tau)} \right) + \\
&\quad + \frac{is}{4\Omega k_z} \int_{\tau}^t dt_1 k'(t_1) e^{isG_{\Omega}(t_1,\tau)} \partial_{t_1} \left(\left(q_{\mathbf{k}'(t_1)} - isp_{\mathbf{k}'(t_1)} \right) e^{isG_{\Sigma}(t_1,\tau)} \right)
\end{aligned}$$

Последним слагаемым, представляющим из себя интеграл от быстроосциллирующего выражения с общим множителем $1/\Omega$, следует пренебречь в силу его малости.

Во втором порядке по B будет следующий вклад в диагональные элементы матрицы $\hat{P}_{\mathbf{k}(t)}(t,\tau)$ (2.38):

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^t dt_1 \hat{B}(t_1,\tau) \int_{\tau}^{t_1} dt_2 \hat{B}(t_2,\tau) &= \\
&= \begin{pmatrix} \int_{\tau}^t dt_1 B(t_1,\tau) \int_{\tau}^{t_1} dt_2 B^*(t_2,\tau) & 0 \\ 0 & \int_{\tau}^t dt_1 B^*(t_1,\tau) \int_{\tau}^{t_1} dt_2 B(t_2,\tau) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Рассмотрим вклад от верхнедиагонального элемента P^{++} , воспользовавшись уже произведённым интегрированием (2.41) для первого порядка. В процессе выкладок опускаем вклады, содержащие интегрирование от быстроосциллирующего множителя, поскольку в выражении для P^{++} уже содержится малый множитель $1/\Omega$. В результате имеем следующее выражение для верхнедиаго-

нального элемента P^{++} :

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{k}'(t)}^{++}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t dt_1 B(t_1, \tau) \int_{\tau}^{t_1} dt_2 B^*(t_2, \tau) \approx \\
&\approx \frac{-i}{4\Omega k_z} \int_{\tau}^t dt_1 k'(t_1) \left((q_{\mathbf{k}(t_1)})^2 + (p_{\mathbf{k}(t_1)})^2 \right) = \\
&= \frac{i}{4\Omega k_z \Sigma k_{\xi}} \int_{k(\tau)}^{k(t)} dk_{\eta} k^2 \left((q_{\mathbf{k}})^2 + (p_{\mathbf{k}})^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

С учетом соотношений (2.26) вычислим последний интеграл в выражении (2.43):

$$\int_{k(\tau)}^{k(t)} dk_{\eta} \sqrt{k_{\eta}^2 + k_{\xi}^2 + k_z^2} (q_{\mathbf{k}}^2 + p_{\mathbf{k}}^2) = \Sigma^2 \left[\frac{k_{\xi}^2 + k_z^2}{4} \ln(k + k_{\eta}) - \frac{k_{\xi}^2 k_{\eta}}{4k} \right] \tag{2.44}$$

В результате выражение для верхнедиагонального элемента будет иметь вид

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{k}'(t)}^{++}(t, \tau) &\approx \int_{\tau}^t dt_1 B(t_1, \tau) \int_{\tau}^{t_1} dt_2 B^*(t_2, \tau) \approx \\
&\approx \frac{i\Sigma^2}{4\Omega k_z \Sigma k_{\xi}} \left(\frac{k_{\xi}^2 + k_z^2}{4} \ln(k + k_{\eta}) - \frac{k_{\xi}^2 k_{\eta}}{4k} \right) \Big|_{k'_{\eta}(\tau)}^{k'_{\eta}(t)} = \\
&= \left(\frac{i\Sigma k_{\xi}}{16\Omega k_z} + \frac{i\Sigma k_z}{16\Omega k_{\xi}} \right) \ln \left(\frac{k'_{\eta}(t) + k'(t)}{k'_{\eta}(\tau) + k'(\tau)} \right) - \frac{i\Sigma k_{\xi}}{16\Omega k_z} \left(\frac{k'_{\eta}(t)}{k'(t)} - \frac{k'_{\eta}(\tau)}{k'(\tau)} \right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Таким образом, с учетом выражений (2.41) и (2.45) первый и второй порядки разложения Т-экспоненты матрицы \hat{P} по матрице \hat{B} в главном приближении дают линейные по параметру Ro поправки $P_I^{s,\sigma}$ и $P_{II}^{s,\sigma}$ к матрице $\hat{P}_{\mathbf{k}(t)}^{s,\sigma}(t, \tau)$:

$$\hat{P}_{\mathbf{k}(t)}^{s,\sigma}(t, \tau) \approx \delta_{s,\sigma} + P_I^{s,\sigma} + P_{II}^{s,\sigma} \tag{2.46}$$

где

$$P_I^{s,\sigma} = \frac{\delta_{s,-\sigma}}{\Omega k_z} \left[(isq_{\mathbf{k}'(\tau)} + p_{\mathbf{k}'(\tau)})k'(\tau) - (isq_{\mathbf{k}'(t)} + p_{\mathbf{k}'(t)})k'(t)e^{isG(t,\tau)} \right] \quad (2.47)$$

$$P_{II}^{s,\sigma} = \frac{is\Sigma}{16\Omega} \left[\left(\frac{k_\xi}{k_z} + \frac{k_z}{k_\xi} \right) \ln \left(\frac{k'_\eta(t) + k'(t)}{k'_\eta(\tau) + k'(\tau)} \right) - \frac{k_\xi}{k_z} \left(\frac{k'_\eta(t)}{k'(t)} - \frac{k'_\eta(\tau)}{k'(\tau)} \right) \right] \delta_{s,\sigma},$$

Отметим, что вклад от линейного члена чисто недиагональный, а от квадратичного – диагональный.

Как было показано выше (2.32), накачивающая случайная сила имеет изотропную статистику. С учетом полученных соотношений вычислим, какой вклад в корреляторы вносят поправки к матрице \hat{P} . Интерес представляют корреляционные функции $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},\sigma}^* \rangle$, которые в общем виде задаются следующим выражением:

$$\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},\sigma}^* \rangle = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\Gamma(\tau)} \sum_{s_1, \sigma_1} Q^{s,s_1}(0,\tau) Q^{*,\sigma,\sigma_1}(0,\tau) F_{s_1\sigma_1}(\tau), \quad (2.48)$$

где используется обозначение $\Gamma(\tau) = \Gamma(0,\tau)$. Воспользовавшись общим выражением (2.48), вычислим сперва перекрёстное среднее для амплитуд инерционных волн (2.36):

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\Gamma(\tau)} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} Q_{s,\sigma_1}(0,\tau) Q_{-s,\sigma_2}^*(0,\tau) \frac{(2\pi)^3}{2} \epsilon \chi(k'(\tau)) \delta_{\sigma_1, \sigma_2} = \\ &= \frac{(2\pi)^3}{2} \epsilon \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\Gamma(\tau)} \sum_{\sigma} Q_{s,\sigma}(0,\tau) Q_{-s,\sigma}^*(0,\tau) \chi(k'(\tau)) = \quad (2.49) \\ &= \frac{(2\pi)^3 \epsilon}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \exp \left(2 \int_{\tau}^0 dt_1 [\ell_{\mathbf{k}'(t_1)} - \nu k'^2(t_1)] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\sigma} e^{-isG(0,\tau)} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) (P_{\mathbf{k}}^{-s,\sigma}(0,\tau))^* \end{aligned}$$

Ненулевой вклад первого порядка малости по параметру $|\Sigma|/\Omega \sim \text{Ro}$ в коррелятор $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle$ дают только недиагональные элементы матрицы \hat{P} . Сначала вычислим множитель $\sum_{\sigma} e^{-isG(0,\tau)} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) (P_{\mathbf{k}}^{-s,\sigma}(0,\tau))^*$, содержащийся в

подынтегральной функции коррелятора $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle$. С учетом (2.41) запишем выражение для этого множителя:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} e^{-isG(0,\tau)} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) (P_{\mathbf{k}}^{-s,\sigma}(0,\tau))^* \rightarrow \\ & \rightarrow e^{-isG(0,\tau)} \left(P_I^{*,-s,s} + P_I^{s,-s} \right) = \frac{k'(t)(p_{\mathbf{k}} + isq_{\mathbf{k}})}{2\Omega k_z}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

В (2.50) были опущены быстроосциллирующие слагаемые, поскольку они будут далее интегрироваться и дадут поправку в коррелятор $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle$ следующего порядка малости. Полученное выражение (2.50) зависит только от конечного времени t . В итоге приходим к тому, что в главном приближении коррелятор $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle$ будет иметь вид

$$\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle = \frac{(2\pi)^3 \epsilon k'(t)(p_{\mathbf{k}} + isq_{\mathbf{k}})}{2 \cdot 2\Omega k_z} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k}{k'(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.51)$$

Выясним, каким будет вклад в диагональный коррелятор $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle$ в том же порядке по параметру $|\Sigma|/\Omega \sim \text{Ro}$, что имеется в выражении (2.51). Выражение для диагонального коррелятора будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle &= \frac{(2\pi)^3 \epsilon}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\Gamma(\tau)} \sum_{\sigma} Q^{s,\sigma}(0,\tau) Q^{s,\sigma,*}(0,\tau) \chi(k'(\tau)) = \\ &= \frac{(2\pi)^3 \epsilon}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k}{k'(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \sum_{\sigma} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma,*}(0,\tau) \end{aligned}$$

В силу соотношения (2.45) множитель $\sum_{\sigma} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma,*}(0,\tau)$ равен единичной матрице в нулевом порядке и имеет поправки не менее чем второго порядка малости по параметру Ro :

$$\sum_{\sigma} P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma}(0,\tau) P_{\mathbf{k}}^{s,\sigma,*}(0,\tau) = 1 + P_{II}^{ss} + P_{II}^{*,ss} \approx 1 \quad (2.52)$$

Отсюда следует, что в диагональный коррелятор $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle$ входят поправки также не менее чем второго порядка малости. Значит, в первом порядке по пара-

метру Ro поправок к коррелятору $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle$ нет. Тогда выражение для диагонального коррелятора коэффициентов разложения имеет следующий вид:

$$\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle = \frac{(2\pi)^3 \epsilon}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(\mathbf{k}'(\tau)) \frac{k}{k'(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.53)$$

Таким образом, в данном разделе была продемонстрирована методика определения статистических свойств течения, позволяющего вычислять такие объекты, как корреляционные и структурные функции поля скорости различных степеней. В частности, были вычислены диагональное и в пространстве инерционных волн средние $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^* \rangle$ и $\langle a_{\mathbf{k},s} a_{-\mathbf{k},s}^* \rangle$ соответственно до первого порядка малости по параметру Ro включительно, позволяющие находить парные корреляционные и структурные функции турбулентных пульсаций поля скорости.

2.4 Примеры вычисления корреляторов скорость-скорость

Полученные в предыдущем разделе выражения для корреляторов коэффициентов разложения позволяют определять корреляционные и структурные функции турбулентных пульсаций поля скорости. В качестве примера вычислим перекрестный коррелятор $\langle u^\xi(\mathbf{r}') u^\eta(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle$. Удобно сделать это в импульсном представлении:

$$\langle u^\xi(\mathbf{r}') u^\eta(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle u_{\mathbf{k}}^\xi u_{-\mathbf{k}}^\eta \rangle \quad (2.54)$$

Разложим каждую компоненту скорости по базисным векторам \mathbf{h} и посмотрим, какие комбинации из коэффициентов $a_{\mathbf{k},s}$ будут получаться:

$$u_{\mathbf{k}}^\xi u_{-\mathbf{k}}^\eta = (a_{\mathbf{k},+} h_{\mathbf{k}}^{+,\xi} + a_{\mathbf{k},-} h_{\mathbf{k}}^{-,\xi}) (a_{-\mathbf{k},+} h_{-\mathbf{k}}^{+,\eta} + a_{-\mathbf{k},-} h_{-\mathbf{k}}^{-,\eta}) \quad (2.55)$$

Используя симметрию коэффициентов разложения (2.17) и базисных векторов (2.15) при изменении знака волнового вектора, произведение компонент скорости можно выразить через коэффициенты $a_{\mathbf{k},s}$ с одним и тем же волновым

вектором \mathbf{k} :

$$u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} = |a_{\mathbf{k},+}|^2 h_{\mathbf{k}}^{+,\xi} h_{\mathbf{k}}^{-,\eta} + |a_{\mathbf{k},-}|^2 h_{\mathbf{k}}^{-,\xi} h_{\mathbf{k}}^{+,\eta} + 2\text{Re}\left(a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},-}^* h_{\mathbf{k}}^{+,\xi} h_{\mathbf{k}}^{+,\eta}\right) \quad (2.56)$$

Здесь была использована симметрия базисных векторов по отношению к комплексному сопряжению. Используем явные выражения векторов $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$, см. также (2.18), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} \rangle &= - \sum_{s=\pm 1} \langle |a_{\mathbf{k},s}|^2 \rangle \frac{k_{\xi} k_{\eta} + isk k_z}{k^2} + \\ &+ 2\text{Re}\left(\langle a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},-}^* \rangle \frac{k_{\xi} k_{\eta} (k^2 + k_z^2) + ik k_z (k_{\xi}^2 - k_{\eta}^2)}{k_{\perp}^2 k^2} \right) = \quad (2.57) \\ &= - \sum_{s=\pm 1} \langle |a_{\mathbf{k},s}|^2 \rangle \frac{k_{\xi} k_{\eta} + isk k_z}{k^2} + \frac{4}{\Sigma} \text{Re}(\langle a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},-}^* \rangle (q_{\mathbf{k}} + ip_{\mathbf{k}})) = \\ &= \langle u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} \rangle^{\text{d}} + \langle u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} \rangle^{\text{off}}. \end{aligned}$$

согласно (2.25). Выражение (2.57) содержит в себе множитель $\Sigma k_{\xi} / (\Omega k_z) \sim \Sigma k / (\Omega k_z)$, которое может быть как большим, так малым в различных областях пространства волновых векторов. Поведение коррелятора в этих областях будет существенно различаться, поскольку в области, где этот множитель большой или умеренный ($k_z/k \gtrsim \text{Ro}$), существуют инерционные волны, а в области, где множитель мал ($k_z/k \lesssim \text{Ro}$), их нет. Далее будем называть область $k_z/k \gtrsim \text{Ro}$ сектором быстрых осцилляций, а область $k_z/k \lesssim \text{Ro}$ – квазидвумерным сектором. Вычислим одноточечный перекрестный коррелятор в секторе быстрых осцилляций и в квазидвумерном секторе.

Вклад от сектора быстрых осцилляций. Будем считать, что в этом секторе во всех его точках существуют инерционные волны, а флуктуации трехмерны.

Вычислим сначала вклад от недиагональной части коррелятора $\langle u^{\xi} u^{\eta} \rangle$, которая равна второму слагаемому в (2.57), а затем вклад от диагональной части коррелятора $\langle u^{\xi} u^{\eta} \rangle$, которая равна первому слагаемому в (2.57).

Вклад от недиагональной части будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} \rangle^{\text{off}} &= \frac{4}{\Sigma} \text{Re} \left(\langle a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},-s}^* \rangle (q_{\mathbf{k}} + isp_{\mathbf{k}}) \right) = \frac{(2\pi)^3 \epsilon}{2} \frac{4}{\Sigma} \cdot \\ &\cdot \text{Re} \left((q_{\mathbf{k}} + isp_{\mathbf{k}}) \frac{isk(q_{\mathbf{k}} - isp_{\mathbf{k}})}{2\Omega k_z} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{k}{k'(\tau)} \chi(k'(\tau)) e^{-\Gamma(\tau)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Таким образом, коррелятор в данном секторе будет определяться только диагональной частью и иметь следующий вид [6]:

$$\langle u_{\xi} u_{\eta} \rangle = -\epsilon \int d^3k \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k_{\xi} k_{\eta} k'(\tau)}{k^3} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.59)$$

Квазидвумерный сектор. Область $k_z/k \lesssim \text{Ro}$ является квазидвумерной. Для оценки вклада от данной области достаточно изучить вклад от двумерного сектора волновых векторов ($k_z = 0$). При $k_z = 0$ вклад в коррелятор (2.57) с учётом приближений для волнового вектора, лежащего в горизонтальной плоскости, и выражения для aa^* -коррелятора имеет вид [67]:

$$\begin{aligned} \langle u_{\mathbf{k}}^{\xi} u_{-\mathbf{k}}^{\eta} \rangle &= \frac{2k_{\xi} k_{\eta}}{k_{\perp}^2} \left(-\langle a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},+}^* \rangle + \langle a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},-}^* \rangle \right) = \\ &= -(2\pi)^3 \epsilon \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\Gamma(\tau)} \chi(\mathbf{k}'(\tau)) \frac{k_{\xi} k_{\eta} k_{\perp}^2(\tau)}{k_{\perp}^4}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Вычисление перекрестной корреляционной функции скорость-скорость Итак, в случае изотропной накачки главный вклад в перекрёстный коррелятор имеет вид (2.59).

Сперва выпишем его целиком:

$$\begin{aligned}
\langle u_\xi u_\eta \rangle &= \int_{D_{osc}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(- \sum_{s=\pm 1} \langle |a_{k,s}|^2 \rangle \frac{k_\xi k_\eta}{k^2} + 0 \right) + \\
&+ \int_{D_{2D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(- \sum_{s=\pm 1} \langle |a_{k,s}|^2 \rangle \frac{k_\xi k_\eta}{k^2} + 2 \langle a_{k,s} a_{k,-s}^* \rangle \frac{k_\xi k_\eta}{k_\perp^2} \right) = \\
&= -\epsilon \int_{D_{osc}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_\xi k_\eta}{k^2} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k'(\tau)}{k} e^{-\Gamma(\tau)} - \\
&- \epsilon \int_{D_{2D}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_\xi k_\eta}{k_\perp^2} \int_{-\infty}^0 d\tau \chi(k'(\tau)) \frac{k'^2(\tau)}{k^2} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Вклад от квазидвумерного сектора будет сильно меньше, поскольку подынтегральное выражение того же порядка, а область интегрирования сильно меньше.

В работе [6] это выражение было посчитано аналитически для функции $\chi(k)$, имеющей вид (1.13), и в пределе $\tau_*^{-3} = 2\nu k_f^2 / |\Sigma| \ll 1$. Были сделаны замена переменной $\tau \rightarrow -|\Sigma|\tau$ под знаком интеграла по времени и переход к сферическим координатам при интегрировании по волновым векторам:

$$\begin{aligned}
k_z &= k_f k \cos \theta_{\mathbf{k}}, & k_\xi &= k_f k \cos \varphi \sin \theta_{\mathbf{k}}, \\
k'_\eta &= k_f k \sin \theta_{\mathbf{k}} (\sin \phi_{\mathbf{k}} + \tau \cos \phi_{\mathbf{k}}).
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Данный коррелятор можно вычислить для произвольной неотрицательной функции $\chi(k)$, характерный масштаб которой k_f , а сама функция достаточно быстро убывает на больших k . Введем обозначения, которые будут использоваться здесь и в дальнейших главах. Сделаем замену времени $\tau \rightarrow -|\Sigma|\tau$ и волнового вектора $\mathbf{k} \rightarrow k_f \mathbf{k}$. В терминах этих замен вязкая экспонента $\Gamma(\tau)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\Gamma(\tau) = \tau_*^{-3} \int_0^\tau dt_1 k'^2(t_1), \quad (2.63)$$

где $\tau_* = (|\Sigma|/2\nu k_f^2)^{1/3}$ — безразмерное время, а волновой вектор вдоль характеристики \mathbf{k}' имеет следующий вид:

$$\mathbf{k}'(\tau) = \{k_\xi, k_\eta - \varsigma\tau k_\xi, k_z\}, \quad \varsigma = \text{sign}(\Sigma) \quad (2.64)$$

Коррелятор $\langle u^\xi u^\eta \rangle$ имеет следующий вид:

$$\langle u^\xi u^\eta \rangle = -\frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3k) k \chi(k) \int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta(\tau)}{k'^3(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.65)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (2.65) является знакопеременным по времени. Поэтому для произвольной функции $\chi(k)$ данный интеграл удобнее взять сначала по переменной времени, а потом по волновому вектору. Произведем интегрирование по τ по частям, принимая во внимание, что $d\tau k_\xi k'_\eta(\tau) = -\varsigma dk'^2(\tau)/2$:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}) &= -\int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta(\tau)}{k'^3(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} = \frac{\varsigma}{2} \int_0^\infty \frac{dk'^2(\tau)}{k'^3(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} = \\ &= -\varsigma \int_0^\infty d\left(\frac{1}{k'(\tau)}\right) e^{-\Gamma(\tau)} = -\varsigma \frac{e^{-\Gamma(\tau)}}{k'(\tau)} \Big|_0^\infty - \varsigma \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{k'(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

За счет вязкой экспоненты первый вклад будет быстро убывать на больших временах, поэтому основной вклад будет набираться на малых временах при $\tau = 0$:

$$J(\mathbf{k}) = \frac{\varsigma}{k} - \varsigma \int_0^\infty \frac{d\tau k'^2(\tau)}{\tau_*^3 k'(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} = \frac{\varsigma}{k} - \varsigma \tau_*^{-3} \int_0^\infty d\tau k'(\tau) e^{-\Gamma(\tau)} \quad (2.67)$$

Интеграл во втором слагаемом будет набираться на временах $\tau \sim \tau_*$ и волновых числах $k \sim 1$, так что величина второго вклада будет порядка $\sim \tau_*^{-1} k_\xi$. Значит, второе слагаемое будет пренебрежимо мало по сравнению с первым. Таким образом, перекрестный коррелятор $\langle u^\xi u^\eta \rangle$ будет иметь следующий вид:

$$\langle u^\xi u^\eta \rangle \approx \varsigma \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3k) \frac{k \chi(k)}{k} = \frac{\epsilon}{\Sigma} \quad (2.68)$$

Таким образом, данный коррелятор будет определяться малыми временами τ и умеренными волновыми числами $k \sim 1$.

Как было упомянуто выше, величина коэффициента сдвига слабо меняется на характерных пространственных масштабах инерционных волн. В Приложении (А) приведено значение величины коэффициента сдвига для среднего профиля скорости в стационарном режиме, полученное с использованием соотношения (1.11). Данное значение определяется величиной мощности накачки ϵ поля случайной силы и кинематической вязкостью ν и не зависит от координат, что самосогласуется с допущением о малом изменении величины коэффициента сдвига на масштабах инерционных волн.

Таким образом, в данном разделе показано, как развитая выше методика определения статистических свойств течения используется для вычисления одноточечной парной корреляционной функции $\langle u_\xi u_\eta \rangle$. Показано, что основной вклад в рассматриваемую корреляционную функцию дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций, а также приведено явное выражение для этой функции.

2.5 Вычисление различных компонент структурной функции поля скорости

Объектом дальнейшего исследования является одновременная структурная функция $S^{ij}(\mathbf{r})$ турбулентных пульсаций поля скорости. В пределе сильного разделения масштабов статистику турбулентных пульсаций можно принять локально однородной в пространстве. Тогда структурная функция зависит только от расстояния между выбираемыми точками \mathbf{r} ,

$$S^{ij}(\mathbf{r}) = \langle (u^j(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^j(\mathbf{r}'))(u^i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^i(\mathbf{r}')) \rangle, \quad (2.69)$$

где предполагается усреднение либо по времени, либо по координате \mathbf{r}' . Область пространственного осреднения должна быть меньше характерного масштаба среднего потока U . Структурная функция симметрична по определению, $S^{ij}(\mathbf{r}) = S^{ji}(\mathbf{r}) = S^{ij}(-\mathbf{r})$.

Рассматриваем турбулентность во вращающейся жидкости с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ и обозначаем направление вращения $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$. Здесь декартова система отсчета $Oxyz$ предполагается заданной. В дальнейшем предполагается, что пульсирующая часть \mathbf{u} относительно слаба, поэтому ее самонелинейным влиянием можно пренебречь по сравнению с ее нелинейным взаимодействием со средней скоростью \mathbf{U} . Тогда динамика турбулентной части \mathbf{u} описывается уравнением Навье-Стокса, линеаризованным по \mathbf{u} . Глобальное вращение сильное, поэтому крупномасштабное число Россби мало, $Ro_R \sim |\nabla \mathbf{U}|/2\Omega \ll 1$. Тогда естественно разложить поле скорости по плоским волнам с круговой поляризацией,

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \sum_{s=\pm 1} \int (d^3k) a_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \quad (2.70)$$

где базисные векторы имеют вид $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = ([\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z]] + isk[\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z])/\sqrt{2}k^2 \sin \theta_{\mathbf{k}}$ и нормированы на единицу. Динамика амплитудных коэффициентов $a_{\mathbf{k}s}$ определяется дисперсионным соотношением для инерционных волн [85]. При малом числе Россби крупномасштабного течения инерционные волны с разными поляризациями некоррелированы [6]. Из однородности статистики в пространстве следует, что среднее второго порядка от амплитудных коэффициентов имеет вид

$$\langle a_{\mathbf{q}\sigma} a_{\mathbf{k}s} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}) K_{\mathbf{k}} \delta_{\sigma s}, \quad (2.71)$$

где средняя кинетическая энергия, запасенная в турбулентных пульсациях с волновым вектором \mathbf{k} , удовлетворяет симметрии $K_{\mathbf{k}} = K_{-\mathbf{k}}$. Здесь рассматривается случай, когда спиральность отсутствует, т.е. волновая статистика симметрична относительно преобразования $s \rightarrow -s$. В результате структурная функция скорости (2.69) параметризуется одной скалярной функцией:

$$S^{ij}(\boldsymbol{\delta r}) = 2\hat{\delta}_{\perp}^{ij} (K(\mathbf{0}) - K(\boldsymbol{\delta r})), \quad K(\boldsymbol{\delta r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} K_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\delta r}}, \quad (2.72)$$

где $\hat{\delta}_{\perp}^{ij}$ – линейный интегральный оператор в координатном пространстве, преобразование Фурье которого является поперечным проектором $\hat{\delta}_{\perp}^{ij} = \delta^{ij} - k^i k^j / \mathbf{k}^2$.

Пусть волновой вектор турбулентной пульсации равен \mathbf{k} в момент возбуждения $-\tau$ внешней силой [6; 17]. Во время измерения волновой вектор волны равен $\mathbf{k}'(\tau) = \{k^{\xi}, k^{\eta} - \tau k^{\xi}, k^z\}$. Тогда совокупный вклад всех предыдущих

времен и всех волновых векторов в структурную функцию равен

$$S^{ij}(\boldsymbol{\delta r}) = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k\chi(\mathbf{k})}{k'} \delta_{\perp}^{ij} \left(1 - e^{i\mathbf{k}'\boldsymbol{\delta r}}\right) e^{-\Gamma},$$

$$\Gamma = \tau_*^{-3} \int_0^{\tau} d\zeta k'^2(\zeta), \quad (2.73)$$

где $\boldsymbol{\delta r} = \{\xi, \eta, z\}$, $\delta_{\perp}^{ij} = \delta_{\perp}^{ij}(\mathbf{k}')$, \mathbf{k}' без аргумента означает $\mathbf{k}'(\tau)$, $\tau_* = (|\Sigma|/2\nu k_f^2)^{1/3}$. Рассматриваются малые расстояния, для которых поле скоростей может быть аппроксимировано линейной функцией в пространстве. Тогда достаточно разложить структурную функцию до второго порядка по $\boldsymbol{\delta r}$:

$$S^{ij}(\boldsymbol{\delta r}) = \frac{\epsilon \delta r^m \delta r^n}{|\Sigma|} \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k\chi(\mathbf{k}) \frac{\delta_{\perp}^{ij} k'^m k'^n}{k'} e^{-\Gamma}. \quad (2.74)$$

В (2.74) сначала можно провести интегрирование по волновым векторам, а затем по времени τ . При больших временах $\tau \gg 1$ и характерных значениях $k^{\xi} \lesssim 1$ интеграл набирается в области $k \lesssim 1$ при $k'(\tau) \sim \tau \gg 1$. Из вида $k'(\tau)$ следует, что соответствующий вклад в (2.74) подавляется множителем $1/\tau$. Кроме того, вязкость приводит к экспоненциальному подавлению, что становится актуальным, если $\tau > \tau_*$. Зависящую от вязкости экспоненту (2.74) можно оценить как $\Gamma \sim (\tau/\tau_*)^3/3$ при $k^{\xi} \sim 1$, при этом она меньше единицы, если

$$|k^{\xi}| \lesssim (\tau_*/\tau)^{3/2} \quad (2.75)$$

и если выполнено условие $\tau < \tau_*^3$.

Рассмотрим сначала след структурной функции $S(\boldsymbol{\delta r}) = S^{ii}(\boldsymbol{\delta r})$. Поскольку $\delta_{\perp}^{ii} = 2$, сходимость интеграла (2.74) определяется соотношением $k'^m k'^n/k'$ и зависящей от вязкости экспонентой Γ (2.73):

$$S^{ii}(\boldsymbol{\delta r}) = \frac{2\epsilon \delta r^m \delta r^n}{|\Sigma|} \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k\chi(\mathbf{k}) \frac{k'^m k'^n}{k'} e^{-\Gamma} = \quad (2.76)$$

$$= S_{(\eta\eta)}^{ii} + S_{(\xi\xi)}^{ii} + S_{(zz)}^{ii} + S_{(\xi\eta)}^{ii}.$$

Начнем с η^2 -вклада $S_{(\eta\eta)}^{ii}$ в (2.76), когда $n = m = \eta$. При больших баллистических временах $|k^\xi| \sim 1$, поэтому отношение $(k'^\eta)^2/k' \sim \tau|k^\xi|$ и подынтегральная функция по времени в (2.76) пропорциональна τ . В вязкие времена показатель вязкости накладывает ограничение (2.75), поэтому $(k'^\eta)^2/k' \sim \sqrt{\tau_*^3/\tau}$. В результате подынтегральная функция по времени пропорциональна τ_*^3/τ^2 . Таким образом, временной интеграл (2.74) определяется временами $\tau \sim \tau_*$, а коэффициент перед η^2 равен $\sim \tau_*^2$:

$$\begin{aligned} S_{(\eta\eta)}^{ii} &= \frac{\epsilon k_f^2 \eta^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) \frac{k'^2}{k'} e^{-\Gamma} \sim \\ &\sim \frac{\epsilon k_f^2 \eta^2}{|\Sigma|} \int_1^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) |k_\xi| \tau e^{-\Gamma} \sim \frac{\epsilon k_f^2 \eta^2}{|\Sigma|} \tau_*^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Далее рассмотрим ξ^2 -вклад $S_{(\xi\xi)}^{ii}$. На больших временах выражение $(k^\xi)^2/k' \sim k^\xi/\tau$. Тогда подынтегральное выражение в (2.76) пропорционально $1/\tau$, что дает логарифмическую расходимость на временах $\tau \sim \tau_*$. На временах, больших чем τ_* , подынтегральное выражение убывает быстрее за счет условия (2.75). Таким образом, ξ^2 -вклад имеет вид $\sim \ln \tau_*$:

$$\begin{aligned} S_{(\xi\xi)}^{ii} &= \frac{\epsilon k_f^2 \xi^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) \frac{k_\xi^2}{k'} e^{-\Gamma} \sim \\ &\sim \frac{\epsilon k_f^2 \xi^2}{|\Sigma|} \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int (d^3k) k \chi(k) |k_\xi| e^{-\Gamma} \sim \frac{\epsilon k_f^2 \xi^2}{|\Sigma|} \ln \tau_* \end{aligned} \quad (2.78)$$

Для z^2 -вклада $S_{(zz)}^{ii}$ выражение $(k^z)^2/k' \sim (k^z)^2/\sqrt{\tau^2(k^\xi)^2 + (k^z)^2}$. Существует логарифмическая расходимость при $|k^\xi| > 1/\tau$ в интеграле (2.76), которая обрезается при $k^\xi \sim 1$ на баллистических временах, и при (2.75) на вязких временах. Таким образом, подынтегральная функция по времени в (2.76) равна $\sim \tau^{-1} \ln \tau$ в баллистические моменты времени и $\sim \tau^{-1} \ln \sqrt{\tau_*^3/\tau}$ в вязкие

времена. В результате z^2 -вклад пропорционален $\sim \ln^2 \tau_*$:

$$\begin{aligned}
S_{(zz)}^{ii} &= \frac{\epsilon k_f^2 z^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3 k) k \chi(k) \frac{k_z^2}{k'} e^{-\Gamma} \sim \\
&\sim \frac{\epsilon k_f^2 z^2}{|\Sigma|} \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int (dk_\eta) \int_1^\tau (dk_\xi \tau) \int (dk_z) \frac{k \chi(k) k_z^2}{\sqrt{k_z^2 + (k_\xi \tau)^2}} e^{-\Gamma} \sim \\
&\sim \frac{\epsilon k_f^2 z^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \ln \tau \sim \frac{\epsilon k_f^2 z^2}{|\Sigma|} \ln^2 \tau_*
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Последний ненулевой вклад относится к $m = \xi$, $n = \eta$. Соответствующее отношение $k^\xi k'^\eta / k'$ является знакопеременным, его можно вычислить с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta}{k'} e^{-\Gamma} = -\varsigma \int dk' e^{-\Gamma} = -\varsigma \left(k - \frac{-1}{\tau_*^3} \int_0^\infty k' k'^2 e^{-\Gamma} d\tau \right) \tag{2.80}$$

Основной вклад в (2.80) будет даваться вторым слагаемым на волновых векторах $k \sim 1$ и временах $\tau \sim \tau_*$. Таким образом, коэффициент перед $\xi\eta$ будет иметь вид $\sim -\varsigma\tau_*$.

Итоговый результат имеет вид

$$S^{ii}(\boldsymbol{\delta r}) \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\ln \tau_* \cdot \xi^2 + \tau_*^2 \eta^2 - \varsigma \tau_* \xi \eta + \ln^2 \tau_* \cdot z^2). \tag{2.81}$$

Здесь числовые коэффициенты не выделяются, так как они зависят также от конкретных параметров корреляционной функции внешней силы $\chi(\mathbf{k})$. Результат следует сравнить с одноточечным средним $\langle \mathbf{u}^2 \rangle \sim (\epsilon/|\Sigma|) \ln^2 \tau_*$ [6]. Направление наиболее быстрого возрастания структурной функции является радиальным направлением. Точнее, направление отклоняется от радиального направления на угол $\sim 1/\tau_*$ в сторону продольного направления. Соответственно, направление наиболее медленного возрастания структурной функции отклоняется от продольного направления на такой же угол. Угол зависит от скорости сдвига и вязкости как $(\nu k_f^2 / \Sigma)^{1/3}$, что является характерным законом масштабирования для процесса адвекции-диффузии в стационарном сдвиговом течении [145].

Отметим, что поскольку $\delta_{\perp}^{\prime\xi\xi} \approx \delta_{\perp}^{\prime zz}$ на временах $\tau \gg 1$, имеем

$$S^{\xi\xi} = S^{zz} = S^{ii}/2. \quad (2.82)$$

Сейчас рассмотрим компоненту $S^{\eta\eta}$, которая оказывается меньше, чем $S^{\xi\xi}$. Для η^2 -вклада множитель $(k^{\eta})^2$ приводит к сокращению знаменателя в $\delta_{\perp}^{\prime\eta\eta} = (k^{\xi^2} + k^{z^2})/k'^2$, и дальнейшие вычисления повторяют аналогичные выкладки для z^2 -вклада в S^{ii} . Для компоненты z^2 , интегрирование выражения $\delta_{\perp}^{\prime\eta\eta}$ с множителем $1/k'$ по переменной k^{ξ} дает $1/\tau$ на баллистических временах $\tau \gg 1$. Подынтегральная функция по времени убывает быстрее в вязкие времена. Таким образом, коэффициент перед z^2 равен $\sim \ln \tau_*$. Для ξ^2 -вклада $\delta_{\perp}^{\prime\eta\eta}$ интегрирование по k^{ξ} с множителем $(k^{\xi})^2/k'$ приводит к подынтегральной функции $\tau^{-3} \ln \tau$ на больших временах $\tau \gg 1$. Таким образом, коэффициент ~ 1 перед ξ^2 определяется временами $\tau \sim 1$. Наконец, зависящая от времени часть подынтегрального выражения в (2.74) для $\xi\eta$ -вклада определяется $\tau \sim 1$. Его можно вычислить интегрированием по частям,

$$\int_0^{\infty} d\tau \frac{k^{\eta} k^{\xi}}{k'^3} e^{-\Gamma} = -\varsigma \int \frac{dk'}{k'^2} e^{-\Gamma} = -\frac{\varsigma}{k} + \frac{\varsigma}{\tau_*^3} \int_0^{\infty} d\tau k' e^{-\Gamma}. \quad (2.83)$$

Итоговый ответ имеет вид

$$S^{\eta\eta} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi^2 - \varsigma \cdot \eta\xi + \ln^2 \tau_* \cdot \eta^2 + \ln \tau_* \cdot z^2), \quad (2.84)$$

где также не опущены числовые коэффициенты.

Вычисление коэффициентов перед ξ^2 и z^2 в $S^{\xi\eta}$ проводится аналогично (2.83). Вычисление коэффициентов перед η^2 и $\xi\eta$ повторяет аналогичные выкладки для $\xi\eta$ - и ξ^2 - членов в S^{ii} . Собирая все слагаемые, приходим к результату

$$S^{\xi\eta} \sim \varsigma \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi^2 - \varsigma \ln \tau_* \cdot \xi\eta + \tau_* \eta^2 + z^2) \quad (2.85)$$

Похожим образом найдем остальные ненулевые матричные элементы структурной функции:

$$\begin{aligned}
S^{\xi z} &\sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3 k) k \chi(k) \left(-\frac{k_\xi k_z}{k'^2} \right) \left(0 + \xi z \frac{k_\xi k_z}{k'} + \eta z \frac{k'_\eta k_z}{k'} \right) = (2.86) \\
&= \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \int (d^3 k) k \chi(k) \left(-\xi z \int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi^2 k_z^2}{k'^3} - \eta z \int_0^\infty d\tau k_z^2 \frac{k_\xi k'_\eta}{k'^3} \right) \sim \\
&\sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi z + \varsigma \cdot \eta z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{\eta z} &\sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3 k) k \chi(k) \left(-\frac{k'_\eta k_z}{k'^2} \right) \left(0 + \xi z \frac{k_\xi k_z}{k'} + \eta z \frac{k'_\eta k_z}{k'} \right) = (2.87) \\
&= \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \int (d^3 k) k \chi(k) \left(-\eta z \int_0^\infty d\tau \frac{k_\eta'^2 k_z^2}{k'^3} - \xi z \int_0^\infty d\tau k_z^2 \frac{k_\xi k'_\eta}{k'^3} \right) \sim \\
&\sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (-\varsigma \xi z + \ln^2 \tau_* \cdot \eta z).
\end{aligned}$$

Удобно представить конечный ответ для структурной функции в цилиндрических координатах. Поскольку нас интересует поведение структурной функции на малых пространственных масштабах, можно связать декартовы координаты $\{\xi, \eta, z\}$ с малыми отклонениями $\delta\rho$, $\delta\varphi$, δz в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\xi = -\rho\delta\varphi \quad (2.88)$$

$$\eta = \delta\rho \quad (2.89)$$

$$\delta z = z \quad (2.90)$$

Тогда компоненты структурной функции будут выглядеть следующим образом:

$$S^{\varphi\varphi} = S^{zz} \approx S^{ii}/2; \quad (2.91)$$

$$S^{ii} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\ln \tau_* \cdot (\rho\delta\varphi)^2 + \tau_*^2 \delta\rho^2 + \varsigma \tau_* \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \ln^2 \tau_* \cdot \delta z^2); \quad (2.92)$$

$$S^{\rho\rho} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} ((\rho\delta\varphi)^2 + \varsigma \cdot \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \ln^2 \tau_* \cdot \delta\rho^2 + \ln \tau_* \cdot \delta z^2), \quad (2.93)$$

$$S^{\rho\varphi} \sim -\varsigma \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} ((\rho\delta\varphi)^2 + \varsigma \ln \tau_* \cdot \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \tau_* \delta\rho^2 + \delta z^2), \quad (2.94)$$

$$S^{\varphi z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\rho\delta\varphi\delta z - \varsigma \cdot \delta\rho\delta z), \quad S^{\rho z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\varsigma\rho\delta\varphi\delta z + \ln^2 \tau_* \cdot \delta\rho\delta z) \quad (2.95)$$

Удобно представить графически, как устроен след структурной функции в горизонтальной плоскости. На рисунке 2.1 видно, что проекция на горизон-

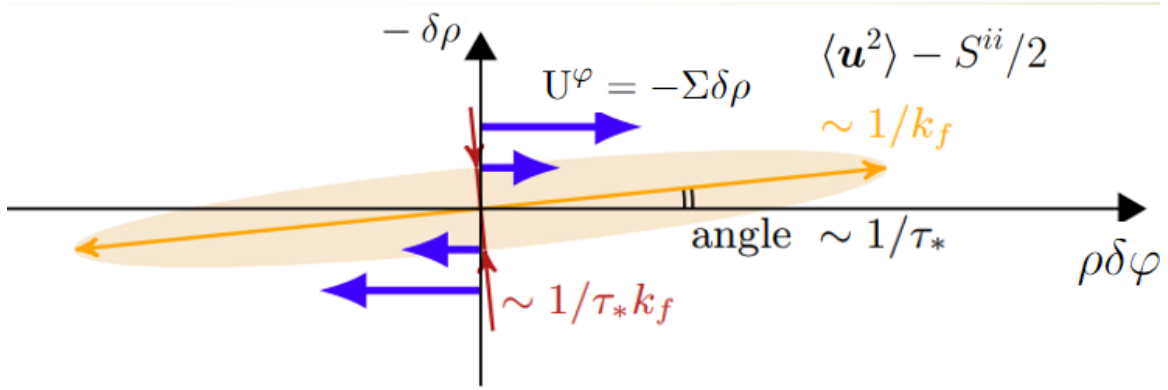


Рис. 2.1 — Разность следа структурной функции и одноточечного коррелятора турбулентных пульсаций трехмерного когерентного геострофического вихря в проекции на горизонтальную плоскость. Синими стрелками показано направление сдвигового течения, оранжевым цветом изображена область, в которой функция $\langle \mathbf{u}^2 \rangle - S^{ii}/2$ наиболее существенна.

тальную плоскость области, в которой разность следа структурной функции турбулентных пульсаций поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре и одноточечного коррелятора оказывается существенным, является анизотропной с отношением длин сторон $\sim \tau_*$, а также ориентирована под малым углом $\sim 1/\tau_*$ к азимутальному направлению.

Таким образом, в данном разделе определены величины различных компонент структурной функции поля скорости турбулентных пульсаций в трех-

мерном когерентном геострофическом вихре на пространственных масштабах, малых по сравнению с масштабом накачки.

2.6 Сравнение с двумерным случаем

По аналогии с (2.69) можно определить структурную функцию мелкомасштабных флуктуаций в двумерном когерентном вихре, учитывая свойства таких двумерных флуктуаций [6], [67]:

$$S^{ij}(\boldsymbol{\delta r}) = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^2k) \frac{k_\perp^2 \chi(k_\perp)}{k_\perp'^2} \delta_{\perp 2}^{ij} \left(1 - e^{i\mathbf{k}'_\perp \boldsymbol{\delta r}}\right) e^{-\Gamma_\perp}, \quad (2.96)$$

где $\boldsymbol{\delta r} = \{\xi, \eta, 0\}$, $\mathbf{k}'_\perp = \{k_\xi, k'_\eta, 0\}$. Флуктуации в двумерном когерентном вихре принципиально отличаются от флуктуаций в трехмерном когерентном вихре. В частности, в двумерном когерентном вихре отсутствуют инерционные волны, основное влияние на флуктуации оказывает сдвиговое течение. В выражении (2.96) для структурной функции главным вкладом будет второй порядок по координатам:

$$S^{ij}(\boldsymbol{\delta r}) \approx \frac{\epsilon \delta r^m \delta r^n}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^2k) \frac{k_\perp^2 \chi(k_\perp)}{k_\perp'^2} \delta_{\perp 2}^{ij} k'^m k'^n e^{-\Gamma_\perp} \quad (2.97)$$

Рассмотрим сумму диагональных элементов, учитывая, что $\delta_{\perp 2}^{ii} = 1$:

$$S^{ii} = \frac{\epsilon}{|\Sigma|} \delta r^m \delta r^n \int_0^\infty d\tau \int (d^2k) \chi(k_\perp) \frac{k_\perp^2 k'^m k'^n}{k_\perp'^2} e^{-\Gamma_\perp} \quad (2.98)$$

Изучим выражение $k_\perp^2 k'^m k'^n / k_\perp'^2$. Оно будет порядка 1 (при всех умеренных значениях компонент волновых векторов) на временах $\tau \sim 1$ для всех m, n . Исследуем выражение на больших временах. При $m = n = \eta$ выражение $k_\perp^2 k'^m k'^n / k_\perp'^2 \sim k_\perp^2$, при $m = \eta$, $n = \xi$ оно примет вид $\sim k_\perp^2 k_\xi k_\xi \tau / (k_\xi^2 \tau^2) \sim k_\perp^2 / \tau$, при $m = n = \xi$ выражение будет быстро убывать со временем как $\sim k_\perp^2 / \tau^2$.

Поэтому во вкладе с η^2 интеграл набирается на временах $\tau \sim \tau_*$ и волновых векторах $k_\xi \sim (\tau_*/\tau)^{3/2}$, а величина вклада оказывается порядка τ_* . Аналогично во вкладе с $\xi\eta$ интеграл набирается на временах $\tau \sim \tau_*$, волновых векторах $k_\xi \sim (\tau_*/\tau)^{3/2}$ и зависит логарифмически от τ_* , во вкладе с ξ^2 интеграл набирается на временах $\tau \sim 1$ и волновых векторах $k_\xi \sim 1$, а величина вклада будет порядка единицы.

В конечном итоге:

$$S^{ii}(\boldsymbol{\delta r}) \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\tau_* \eta^2 - \varsigma \ln \tau_* \xi \eta + \xi^2) \quad (2.99)$$

Распишем элементы матрицы проектора на больших временах:

$$\delta'_{\perp 2}{}^{\xi\xi} = 1 - \frac{k_\xi^2}{k_\perp'^2} \approx 1, \quad \delta'_{\perp 2}{}^{\eta\eta} = 1 - \frac{k_\eta'^2}{k_\perp'^2} = \frac{k_\xi^2}{k_\perp'^2} \ll 1, \quad \delta'_{\perp 2}{}^{\xi\eta} \approx -\frac{k_\xi k_\eta'}{k_\perp'^2} \quad (2.100)$$

Наибольший вклад в след структурной функции даёт элемент $\xi\xi$, то есть $S^{\xi\xi}(\boldsymbol{\delta r}) \approx S^{ii}(\boldsymbol{\delta r})$.

Теперь вычислим $S^{\eta\eta}(\boldsymbol{\delta r})$:

$$S^{\eta\eta}(\boldsymbol{\delta r}) = \frac{\epsilon \delta r^m \delta r^n}{|\Sigma|} \int_1^\infty d\tau \int (d^2 k) \chi(k_\perp) \frac{k_\perp^2 k_\xi^2 k'^m k'^n}{k_\perp'^4} e^{-\Gamma_\perp} \quad (2.101)$$

Для любых m и n на больших временах $\tau \gg 1$ справедлива следующая оценка:

$$\left| \frac{k_\perp^2 k_\xi^2 k'^m k'^n}{k_\perp'^4} \right| \lesssim \frac{k_\perp^2 k_\xi^2}{k_\perp'^2} \sim \frac{k_\perp^2}{\tau^2}. \quad (2.102)$$

Подынтегральная функция во всех случаях будет на больших временах убывать как $\propto 1/\tau^2$ или быстрее, поэтому все вклады будут набираться на временах $\tau \sim 1$ и волновых векторах $k_\xi \sim 1$. Поэтому

$$S^{\eta\eta}(\boldsymbol{\delta r}) \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2) \quad (2.103)$$

Теперь посчитаем недиагональный вклад

$$S^{\xi\eta}(\boldsymbol{\delta r}) = -\frac{\epsilon r^m r^n}{|\Sigma|} \int_1^\infty d\tau \int (d^2k) \chi(k_\perp) k_\perp^2 \frac{k_\xi k'_\eta k'^m k'^n}{k_\perp'^4} e^{-\Gamma_\perp} \quad (2.104)$$

Исследуем дробь в подынтегральном выражении (2.104) на больших временах. При $m = \eta$, $n = \xi$ подынтегральное выражение будет знакопостоянным, дробь будет вести себя как $\sim k_\xi^2 k'_\eta'^2 / k_\perp'^4 \sim 1/\tau^2$. Значит соответствующий вклад в (2.104) будет набираться на временах $\tau \sim 1$ и волновых векторах $k_\xi \sim 1$ и будет равен $\sim -\epsilon k_f^2 \xi \eta / |\Sigma|$. При $m = n = \eta$ подынтегральное выражение будет знакопеременным, дробь в подынтегральном выражении (2.104) будет иметь вид $\sim k_\xi k'_\eta'^3 / k_\perp'^4 \sim k_\xi k'_\eta' / k_\perp'^2$. Его можно вычислить с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta'}{k_\perp'^2} e^{-\Gamma} = -\varsigma \int \frac{dk'_\perp}{k'_\perp} e^{-\Gamma} = -\varsigma \left(-\ln k_\perp + \tau_*^{-3} \int_0^\infty d\tau k_\perp'^2 \ln k'_\perp e^{-\Gamma} \right) \quad (2.105)$$

В выражении (2.105) основной вклад будет давать второе слагаемое, которое будет набираться на временах $\tau \sim \tau_*$ и окажется порядка $-\varsigma k_\perp^2 \ln \tau_*$. Поэтому при $m = n = \eta$ соответствующий вклад в (2.104) будет пропорционален $-\varsigma \ln \tau_*$.

При $m = n = \xi$ подынтегральное выражение также будет знакопеременным, дробь в подынтегральном выражении (2.104) будет иметь вид $\sim k'_\xi^3 k'_\eta' / k_\perp'^4 \sim k_\xi^2 k_\xi k'_\eta' / k_\perp'^4$. Данный вклад удобно вычислить с помощью интегрирования по частям. Рассуждая аналогично вычислениям (2.83) (степень знаменателя будет отличаться), нетрудно установить, что данный вклад будет набираться на волновых векторах $k_\xi \sim 1$ и временах $\tau \sim 1$ и окажется пропорционален коэффициенту $\varsigma \cdot 1$.

В конечном итоге структурная функция различных компонент поля скорости в двумерном когерентном вихре будет иметь следующий вид:

$$S^{\xi\eta}(\boldsymbol{\delta r}) \sim \varsigma \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\ln \tau_* \eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2) \quad (2.106)$$

Таким образом, в двумерном когерентном вихре структурная функция турбулентных пульсаций поля скорости на малых пространственных масштабах выглядит следующим образом:

$$S_{2D}^{ij} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \begin{pmatrix} \tau_* \eta^2 - \varsigma \ln \tau_* \eta \xi + \xi^2 & \varsigma (\ln \tau_* \eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2) \\ \varsigma (\ln \tau_* \eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2) & \eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2 \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

Сравним результат (2.107) с аналогичными выражениями для трехмерного когерентного вихря (2.81), (2.84) и (2.85), положив в трехмерном случае $z = 0$. Для наглядности выпишем подматрицу $S^{ij}(\delta \mathbf{r})$ в плоскости $\xi\eta$ для трехмерного когерентного геострофического вихря (рассматривая $\delta \mathbf{r} = (\xi, \eta, 0)$):

$$S_{3D}^{ij} \Big|_{2D, z=0} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} \begin{pmatrix} \tau_*^2 \eta^2 - \varsigma \tau_* \eta \xi + \ln \tau_* \xi^2 & \varsigma (\tau_* \eta^2 - \varsigma \ln \tau_* \xi \eta + \xi^2) \\ \varsigma (\tau_* \eta^2 - \varsigma \ln \tau_* \xi \eta + \xi^2) & \ln^2 \tau_* \eta^2 - \varsigma \xi \eta + \xi^2 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

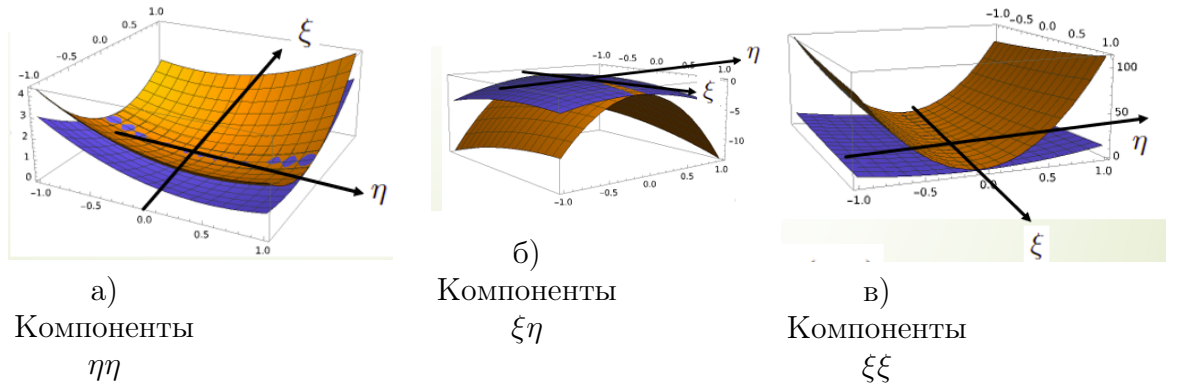


Рис. 2.2 — Сравнение соответствующих компонент структурных функций $S_{3D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$ и $S_{2D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$ — $\eta\eta$ —компоненты (Рис. 2.2а), $\xi\eta$ —компоненты (Рис. 2.2б) и $\xi\xi$ —компоненты (Рис. 2.2в) — в зависимости от координат ξ и η в случае $\Sigma < 0$ ($\varsigma = -1$). Синим цветом изображены компоненты $S_{2D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$, оранжевым — компоненты $S_{3D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$.

Как видно из выражений (2.107) и (2.108), коэффициенты перед соответствующими компонентами координат у структурных функций двумерного и трехмерного когерентного вихрей будут отличаться. В частности, за счет того, что в трехмерном случае практически все коэффициенты параметрически больше, чем соответствующие коэффициенты в двумерном вихре. Это говорит о том, что в трехмерном случае структурная функция более анизотропна, чем в двумерном (см. Рис. 2.2). Кроме того, отличаются и характерные времена, на которых набираются соответствующие вклады.

Таким образом, в данной главе вычислены структурные функции различных компонент поля скорости турбулентных пульсаций в двумерном когерентном вихре, а также проведено сравнение данных результатов с аналогичными величинами, полученными для трехмерного когерентного вихря.

Выводы по главе 2

1. В рамках статистической теории трехмерных когерентных геострофических вихрей развита методика описания статистических свойств турбулентных пульсаций в присутствии сильного вращения и сдвигового течения. Вычислена одноточечная парная корреляционная функция турбулентных пульсаций поля скорости $\langle u_\xi u_\eta \rangle$ для определенного вида модельной случайной силы. Данная методика развита для общего вида случайной силы, так что она позволяет определять статистические свойства течений для произвольного вида поля случайной силы.

2. Посчитана структурная функция различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости на малых масштабах для трехмерного и двумерного когерентных вихревых течений в зависимости от мощности накачки и вязкости среды, а также проведено сравнение полученных результатов. Установлено, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный характер, чем в двумерном когерентном течении.

3. Показано, что основной вклад в корреляционную и структурную функции скорость-скорость дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций ($k_z/k \gtrsim |\Sigma|/\Omega \sim \text{Ro}$).

Глава 3. Альфа-эффект для трехмерного когерентного вихря в магнитном поле

Рассмотрим эволюцию магнитного поля в присутствии трехмерного течения вращающейся проводящей жидкости [110]. Полная система уравнений, описывающая эволюцию поля скорости и магнитного поля, имеет следующий вид во вращающейся системе отсчета [47], [93]:

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \kappa \Delta \mathbf{B}; \quad (3.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{\varrho} (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (3.2)$$

где κ – коэффициент магнитной диффузии, ϱ – массовая плотность, P – эффективный потенциал, учитывающий глобальное вращение жидкости, \mathbf{f} – модельное поле внешних сил, сообщающих энергию системе на малых масштабах. Если, например, исследовать поведение трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости, данное поле сил может иметь конвективную природу, как это было описано выше.

Для исследования процесса возникновения магнитного поля в астрономических объектах представляет интерес ситуация, когда начальное магнитное поле предполагается достаточно малым и не оказывает существенного влияния на поток. Влиянием магнитного поля на поток можно пренебречь, пока частота альфвеновских волн $\omega_A \sim (\mathbf{B}, \mathbf{k}) / \sqrt{\varrho}$ много меньше частоты инерционных волн $\omega_k \sim 2\Omega k_z / k$, так что число Ленерта мало, $Le \sim \omega_A / \omega_k \sim Bk / (\sqrt{\varrho}\Omega) \ll 1$ [146], [147]. Однако если магнитное поле будет расти со временем ($Le \gtrsim 1$), то в какой-то момент оно может начать влиять на течение жидкости, что в дальнейшем приведет к насыщению магнитного поля.

В данной работе стадия насыщения не рассматривается, интерес представляет лишь предел $Le \ll 1$, в котором квадратичным слагаемым по магнитному полю \mathbf{B} в уравнении (3.2) можно пренебречь по сравнению со всеми остальными. Отметим, что теория, описывающая динамику турбулентных пульсаций \mathbf{u} на фоне сильного вихревого течения \mathbf{U} в трехмерном когерентном геострофическом вихре [6], применима в этом пределе без изменений. Эволюция магнитного поля подчиняется уравнению (3.1). Далее опишем статистические свойства по-

ля скорости трехмерного когерентного геострофического вихря и выясним, в каком случае такое течение может приводить к усилению магнитного поля.

3.1 Трехмерный когерентный вихрь с ненулевой спиральностью

Как было отмечено во введении, представляет интерес исследование поведения магнитного поля в присутствии трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости и связанного с этим α -эффекта. Покажем сначала, что спиральный поток в трехмерном когерентном геострофическом вихре может быть создан за счет добавления в рассматриваемую систему случайной силы с анизотропной статистикой определенного вида. Теория трехмерных когерентных геострофических вихрей с большим числом Рейнольдса и малым числом Россби была изложена в работе [6]. Такой подход позволяет исследовать статистические свойства когерентных течений. Пространственная структура на малых масштабах (по сравнению с масштабом накачки энергии в систему k_f^{-1}) изучалась в работе [64].

По аналогии с рассуждениями, проведенными в предыдущей главе, рассмотрим трехмерное течение проводящей жидкости, заполняющей собой всё пространство. В начальный момент жидкость покоится, затем включается глобальное вращение с угловой скоростью Ω , направленной вертикально вверх, декартову систему координат $Oxyz$ считаем заданной. Поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ содержит среднюю компоненту \mathbf{U} и флуктуирующую турбулентную часть \mathbf{u} , $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$. Считаем, что средняя компонента \mathbf{U} меняется на временах и пространственных масштабах много больших, чем характерные масштабы для флуктуирующей части \mathbf{u} , среднее по времени от которой равняется нулю. Также предполагаем, что флуктуирующая часть потока \mathbf{u} относительно слабая, так что можно пренебречь нелинейным по \mathbf{u} слагаемым по сравнению со слагаемым, отвечающим за взаимодействие пульсаций со средним полем скорости \mathbf{U} . Тогда динамика турбулентной части \mathbf{u} описывается линеаризованным по \mathbf{u} уравнением Навье-Стокса. Вращение предполагаем сильным, так что крупномасштабное число Россби мало, $Ro_R \sim |\nabla \mathbf{U}| / 2\Omega \sim |\Sigma| / 2\Omega \ll 1$. В этом приближении представим поле скорости пульсаций в двумерном пространстве

волн с круговой поляризацией:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{s=\pm 1} \int (d^3k) a_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \quad (3.3)$$

где векторы $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = ([\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z]] + isk[\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z]) / \sqrt{2}k^2 \sin \theta_{\mathbf{k}}$ образуют ортонормированный базис, а также введено обозначение $\int (d^3k) = \int d^3k / (2\pi)^3$. В рассматриваемом приближении сильного вращения (малого числа Россби) быстрая динамика коэффициентов разложения $a_{\mathbf{k}s}$ пульсаций поля скорости в этом базисе определяется законом дисперсии инерционных волн [85], причем, как это было показано в предыдущей главе (2.51), (2.53) инерционные волны с противоположными по знаку круговыми поляризациями нескоррелированы. Учитывая вышеизложенное и используя соотношения (2.31), (2.34), (2.46), запишем выражение для коэффициентов разложения в главном порядке по малому параметру Ro :

$$a_{\mathbf{k},s} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{|\Sigma|} \sqrt{\frac{k}{k'}} f_{k'}^s(\tau) \exp(is\Phi_{\mathbf{k}}(\tau) - \Gamma(\tau)/2), \quad (3.4)$$

где фаза $\Phi_{\mathbf{k}}$ описывает динамику инерционных волн, так что $\partial_t \Phi_{\mathbf{k}}(\tau) = -2\omega_{\mathbf{k}'(\tau)}$ в главном порядке по параметру Ro , $f_{k'}^s(\tau)$ — компонента силы накачки в базисе круговых поляризаций.

Среднее от произведения коэффициентов разложения имеет вид

$$\langle a_{\mathbf{q}\sigma} a_{\mathbf{k}s} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}) A_{k\sigma s}, \quad (3.5)$$

где коэффициенты $A_{\mathbf{k}\sigma s}$ удовлетворяет свойству симметрии $A_{\mathbf{k}\sigma s} = A_{-\mathbf{k}\sigma s} = A_{\mathbf{k}\sigma s}^*$, поскольку поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ является вещественным. При этом коэффициенты $A_{k\sigma s}$ могут быть анизотропны в пространстве поляризаций.

Таким образом, при фиксированном \mathbf{k} выражение $A_{\mathbf{k}\sigma s}$ содержит четыре независимых параметра, что соответствует четырем функциям, описывающим коррелятор скорость-скорость, имеющий в Фурье-пространстве вид $\langle u_{\mathbf{k}}^i u_{-\mathbf{k}}^j \rangle$. Для физической интерпретации удобно ввести среднюю кинетическую энергию (интенсивность волны) $K_{\mathbf{k}}$ и вклад $H_{\mathbf{k}}$, который, как будет показано далее, ответственен за спиральность, а также корреляции между волнами с противо-

положными поляризациями $A_{\mathbf{k}}$:

$$K_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(A_{\mathbf{k}--} + A_{\mathbf{k}++}), \quad H_{\mathbf{k}} = k(A_{\mathbf{k}--} - A_{\mathbf{k}++}), \quad (3.6)$$

$$A_{\mathbf{k}} \equiv A'_{\mathbf{k}} + iA''_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}-+}. \quad (3.7)$$

Здесь величина является $K_{\mathbf{k}} = K_{-\mathbf{k}}$ неотрицательной, а $H_{\mathbf{k}} = H_{-\mathbf{k}}$ — вещественной. Отметим, что при малых числах Россби инерционные волны с разными круговыми поляризациями нескоррелированы [6], поэтому $A_{\mathbf{k}} = 0$. Таким образом, коэффициенты $A_{\mathbf{k}\sigma s}$ имеют диагональный вид:

$$A_{\mathbf{k}\sigma s} = \left(K_{\mathbf{k}} - \frac{s}{2k_f k} H_{\mathbf{k}} \right) \delta_{s\sigma} \quad (3.8)$$

Нарушение зеркальной симметрии определяется антисимметричной по поляризации частью корреляционной функции $A_{\mathbf{k}s}$. Как будет показано ниже, для нас окажется важной только часть $A_{\mathbf{k}s}$, пропорциональная выражению $H_{\mathbf{k}}$, являющемуся функцией распределения средней спиральности $\mathbf{H} = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ в пространстве волновых векторов, где $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ — завихренность.

Рассмотрим одноточечный коррелятор скорость-завихренность $H_{ip} \equiv \langle u_i \omega_k \rangle$. Запишем завихренность в терминах коэффициентов разложения $a_{k,s}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} &= k_f [i\mathbf{k}, \mathbf{u}_{\mathbf{k}}] = i \sum_s a_{\mathbf{k},s} k_f [\mathbf{k}, \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s] = \\ &= i \sum_s a_{\mathbf{k},s} i s k_f k \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s = -k_f k \sum_s s a_{\mathbf{k},s} s \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно [64],

$$h_{\mathbf{k}}^{s,i} h_{-\mathbf{k}}^{s,j} = \frac{1}{2} \delta_{\perp}^{ij} - \frac{is}{2} \check{k}^{ij}, \quad \delta_{\perp}^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad \check{k}^{ij} = \frac{\epsilon^{ijl} k_l}{k} \quad (3.10)$$

С учетом этого получим, что одноточечный коррелятор скорость-завихренность $H_{ip} = \langle u^i \omega^p \rangle$ определяется исключительно асимметричным слагаемым выраже-

ния (3.8):

$$\begin{aligned}
H_{ip} &= \int (d^3k) \langle u_{\mathbf{k}}^i \omega_{-\mathbf{k}}^m \rangle = \int (d^3k) k_f k \sum_{s,\sigma} \langle a_{\mathbf{k},s} a_{-\mathbf{k},\sigma} \rangle (-s) h_{\mathbf{k}}^{s,i} h_{-\mathbf{k}}^{\sigma,p} = \\
&= - \int (d^3k) k_f k K_k \sum_s s h_{\mathbf{k}}^{s,i} h_{-\mathbf{k}}^{s,p} + \frac{1}{2} \int (d^3k) H_k \sum_s h_{\mathbf{k}}^{s,i} h_{-\mathbf{k}}^{s,p} = \quad (3.11) \\
&= \frac{1}{2} \int (d^3k) H_k \delta_{\perp}^{ip}
\end{aligned}$$

Этот тензор симметричен, $H_{ip} = H_{pi}$. Отметим, что вклад в выражение для коррелятора скорость-завихренность, связанный с кинетической энергией и имеющий K_k в подынтегральном выражении, будет равен нулю в силу нечетности подынтегрального выражения по \mathbf{k} , а средняя спиральность будет равна следу матрицы H_{ip} корреляторов скорость-завихренность:

$$H_{ii} = \frac{1}{2} \int (d^3k) \delta_{\perp}^{ii} H_{\mathbf{k}} = \text{H} \quad (3.12)$$

Аналогичным образом найдем связь между коррелятором скорость-градиент скорости $\langle u_i \partial_l u_j \rangle$ и коррелятором скорость-завихренность:

$$\begin{aligned}
\langle u_i \partial_l u_j \rangle &= -ik_f \int (d^3k) k_l \langle u_{\mathbf{k}}^i u_{-\mathbf{k}}^j \rangle = -ik_f \int (d^3k) k_l \left(\delta_{\perp}^{ij} K_k - i \frac{\check{k}^{ij}}{2k_f k} H_{\mathbf{k}} \right) = \\
&= -\frac{\epsilon^{ijm}}{2} \int (d^3k) \frac{k_l k_m}{k^2} H_{\mathbf{k}} = -\frac{\epsilon^{ijm}}{2} \int (d^3k) \left(\delta^{lm} \frac{1}{2} \delta_{\perp}^{nn} - \delta_{\perp}^{lm} \right) H_{\mathbf{k}} = \\
&= \epsilon^{ijm} (2H_{ml} - \text{H} \delta^{ml}) / 2 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Как будет показано ниже, полученное соотношение будет использоваться для анализа выражения α -эффекта.

Исследуем H_{ip} , учитывая свойства поля сил накачки. Предполагается, что асимметрия создается силой накачки, имеющей следующую статистику:

$$\langle f_{\mathbf{k}}^s(\tau_1) f_{\mathbf{q}}^{\sigma}(\tau) \rangle = \chi(k) \frac{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta(\tau_1 - \tau)}{(2\pi)^{-3} |\Sigma|^{-1}} \left(\epsilon - \frac{s\epsilon_h}{2k_f} \right) \delta_{s\sigma}. \quad (3.14)$$

Считаем функцию $\chi(k)$ изотропной, затухающей при $k \sim k_f$, стремящейся к нулю при $k \rightarrow 0$ и нормированной на единицу: $\int (d^3k) \chi(k) = 1$. Поскольку случайная сила производит положительную мощность, необходимо выполнение

условия $|\epsilon_h| < 2\epsilon k_f$. Поскольку силы накачки оказывают непосредственное влияние на коэффициенты разложения $a_{\mathbf{k}s}$, такая статистика сил накачки приводит к анизотропии коэффициентов $A_{k\sigma s}$ и, как будет показано далее, к возникновению ненулевой спиральности у течения.

Можно убедиться, что для такого поля случайной силы будет отличной от нуля величина $\langle \mathbf{f}(t) \cdot \int dt' \text{rot} \mathbf{f}(t') \rangle$. С учетом (3.10) в пространстве волновых векторов такое среднее будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t) \cdot \int dt' \text{rot} \mathbf{f}(t') \rangle &= -i\epsilon_{jml} \int (d^3k) k_f \int dt' k_m h_{\mathbf{k}}^{s,j} h_{-\mathbf{k}}^{\sigma,l} \chi(k) \cdot \\ \cdot \left(\epsilon - \frac{\epsilon_h}{2k_f} s \right) \delta^{s\sigma} \delta(t-t') &= \frac{\epsilon_h}{2} \int (d^3k) k \chi(k) \sim \epsilon_h \end{aligned} \quad (3.15)$$

При этом мощность сил накачки будет равна ϵ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t) \int dt' \mathbf{f}(t') \rangle &= \int (d^3k) \int dt' h_{\mathbf{k}}^{s,j} h_{-\mathbf{k}}^{\sigma,j} \chi(k) \left(\epsilon - \frac{\epsilon_h}{2k_f} s \right) \delta^{s\sigma} \delta(t-t') = \\ &= \epsilon \int (d^3k) \chi(k) = \epsilon \end{aligned} \quad (3.16)$$

С учетом статистики случайной силы (3.14) и выражения для коэффициентов разложения (3.4) вычислим распределение спиральности по волновым векторам:

$$H_{\mathbf{k}} = k_f k (A_{k,--} - A_{k,++}); \quad (3.17)$$

$$A_{k,\mp\mp} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{|\Sigma|} \frac{k}{k'(\tau)} \chi(k') \left(\epsilon \pm \frac{\epsilon_h}{2k_f} \right) \exp(-\Gamma(\tau)) \quad (3.18)$$

Получим следующее выражение для $H_{\mathbf{k}}$:

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \int_{-\infty}^0 d\tau k' \chi(k') \exp(-\Gamma(\tau)) \quad (3.19)$$

По аналогии с [6], получим выражение для среднего скорость-завихренность с помощью смены порядка интегрирования по переменным τ и \mathbf{k} , а также с

помощью замены $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{k}'(\tau)$:

$$H_{ip} = \frac{\epsilon_h}{2|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3q) q \chi(q) \delta'_{ip} e^{-\Gamma(\tau)}. \quad (3.20)$$

На больших временах ($\tau \gg 1$) вязкая экспонента Γ имеет вид $\Gamma \approx -q_\xi^2 (\tau/\tau_*)^3 / 3$, где $\tau_* = (\Sigma/2\nu k_f^2)^{1/3}$. Вычислим спиральность:

$$H \approx \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) e^{-\Gamma} \sim \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \int_1^{\tau_*} d\tau \sim \frac{\epsilon_h \tau_*}{|\Sigma|} \quad (3.21)$$

Основной вклад в спиральность приходит от $H_{\xi\xi}$ и H_{zz} :

$$H_{\xi\xi} \approx \frac{\epsilon_h}{2|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) e^{-\Gamma} \frac{k'^2 - k_\xi^2}{k'^2} \sim \frac{\epsilon_h \tau_*}{2|\Sigma|}; \quad (3.22)$$

$$H_{zz} \approx \frac{\epsilon_h}{2|\Sigma|} \int_0^\infty d\tau \int (d^3k) k \chi(k) e^{-\Gamma} \frac{k'^2 - k_z^2}{k'^2} \sim \frac{\epsilon_h \tau_*}{2|\Sigma|} \quad (3.23)$$

Таким образом, $H_{\xi\xi} \approx H_{zz} \approx H/2$.

Последний диагональный элемент $H_{\eta\eta}$ оказывается значительно меньше средней спиральности H . Соответствующий элемент ортогонального проектора мал при $q_\xi \tau \gg 1$, $\delta_\perp^{\prime\prime\prime\eta\eta} \sim 1/(q_\xi \tau)^2$. Тогда основной вклад в эти элементы дается от области $|q_\xi| \tau \lesssim 1$, где $\delta_\perp^{\prime\prime\prime\eta\eta} \sim 1$. Интеграл по q_ξ набирается на $|q_\xi| \sim 1/\tau$. Поэтому зависящее от времени подынтегральное выражение пропорционально $1/\tau$, и эта зависимость сменяется более быстро убывающей на временах $\tau \gg \tau_*^3$. Матричный элемент имеет вид

$$H_{\eta\eta} \sim \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \ln \tau_*. \quad (3.24)$$

Далее определим поведение недиагональных элементов матрицы H_{ip} . Элементы H_{iz} и H_{zi} с $i \neq z$ равны нулю вследствие нечетности подынтегрального выражения по k_z :

$$H_{iz} = H_{zi} = 0, \quad i = \{\xi, \eta\} \quad (3.25)$$

Оставшийся недиагональный элемент $H_{\xi\eta}$ содержит знакопеременную функцию под интегралом, поэтому его нужно вычислить с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} H_{\xi\eta} &= -\frac{\epsilon_h \varsigma}{2|\Sigma|} \int (d^3k) k \chi(k) \int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta}{k'^2} e^{-\Gamma(\tau)} = \\ &= -\frac{\epsilon_h \varsigma}{2|\Sigma|} \int (d^3k) k \chi(k) \left\{ \ln k - \int_0^\infty \frac{d\tau k'^2 \ln k'^2}{2\tau_*^3} e^{-\Gamma(\tau)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Основной вклад происходит от второго слагаемого. Интеграл набирается на масштабях $\tau \sim \tau_*$ и оказывается порядка $\ln \tau_*$ при $q \sim 1$, а сам недиагональный элемент имеет вид

$$H_{\xi\eta} \sim \varsigma \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \ln \tau_* \quad (3.27)$$

Полученные выше одноточечные корреляторы различных компонент скорости и завихренности удобно представить в виде матрицы:

$$\hat{H} \sim \frac{\epsilon_h}{|\Sigma|} \begin{pmatrix} \tau_* & \varsigma \ln \tau_* & 0 \\ \varsigma \ln \tau_* & \ln \tau_* & 0 \\ 0 & 0 & \tau_* \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Отметим, что только недиагональные элементы зависят от знака ς коэффициента сдвига Σ . Данный результат находится в согласии с результатами для корреляторов скорость-скорость в трехмерном когерентном геострофическом вихре [6], [64], [148].

Таким образом, с использованием описанной в предыдущей главе модели трехмерного когерентного вихря показано, что спиральный поток может быть создан за счет добавления в рассматриваемую систему случайной силы, имеющей диагональную анизотропную статистику в пространстве круговых поляризации, а также найдена матрица, элементами которой являются одноточечные корреляторы различных компонент скорости и завихренности, а след которой равен спиральности.

3.2 Альфа-эффект для трехмерного когерентного вихревого течения

Рассмотрим поведение магнитного поля в присутствии когерентного вихря в проводящей жидкости, описанного выше, в пределе $Le \ll 1$. Получим выражение для элементов α -матрицы в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости с ненулевой спиральностью. Выделим и в поле скорости, и в магнитном поле средние и флуктуирующие компоненты: $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$.

$$\partial_t \overline{\mathbf{B}} + \partial_t \mathbf{b} = \text{rot} [\mathbf{U} + \mathbf{u}, \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}] + \kappa \Delta (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) \quad (3.29)$$

Ненулевой вклад в среднюю электродвижущую силу $\langle [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \rangle$ создается за счёт взаимодействия между средним полем скорости и магнитным полем $\overline{\mathbf{E}} = [\mathbf{U} \times \overline{\mathbf{B}}]$ и взаимодействия между флуктуациями скорости и магнитного поля $\mathcal{E} = \langle [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] \rangle$. Эволюция среднего магнитного поля подчиняется следующему уравнению [128]:

$$\partial_t \overline{\mathbf{B}} = \text{rot} [\mathbf{U}, \overline{\mathbf{B}}] + \text{rot} \langle [\mathbf{u}, \mathbf{b}] \rangle + \kappa \Delta \overline{\mathbf{B}} \quad (3.30)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \text{rot} (\overline{\mathbf{E}} + \mathcal{E}) + \kappa \Delta \mathbf{b}. \quad (3.31)$$

Чтобы произвести усреднение электродвижущей силы \mathcal{E} по турбулентным пульсациям, необходимо изучить динамику флуктуаций магнитного поля \mathbf{b} . Их эволюция определяется всеми оставшимися слагаемыми в уравнении (3.30):

$$\partial_t \mathbf{b} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{U} + \kappa \Delta \mathbf{b} + (\overline{\mathbf{B}}, \nabla) \mathbf{u}. \quad (3.32)$$

Наряду со слагаемым $(\overline{\mathbf{B}}, \nabla) \mathbf{u}$, в правой части (3.32) должно стоять слагаемое $(\mathbf{u}, \nabla) \overline{\mathbf{B}}$. Однако оно не записано в уравнении, поскольку им можно пренебречь по сравнению с остальными слагаемыми, так как пространственный масштаб среднего поля много больше масштаба накачки энергии в систему за счет флуктуаций ($k_b/k_f \ll 1$). Последнее слагаемое в правой части (3.32) играет роль нерезонансного источника для флуктуаций магнитного поля \mathbf{b} . Значит, характерный масштаб флуктуаций магнитного поля \mathbf{b} совпадает с характерным масштабом пульсаций поля скорости \mathbf{u} .

Вспоминая структуру крупномасштабной компоненты течения \mathbf{U} , перейдем в импульсное представление и будем двигаться вдоль характеристики:

$$|\Sigma| \frac{d\mathbf{b}_{\mathbf{k}'}}{dt} + \Sigma b_{\mathbf{k}'}^\eta \mathbf{e}_\xi + \kappa k_f^2 k'^2 \mathbf{b}_{\mathbf{k}'} = ik_f \bar{B}^p k'_p \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \quad (3.33)$$

Уравнение (3.33) записано в переменных времени, обезразмеренном на $|\Sigma|^{-1}$, и волновых векторов, обезразмеренных на k_f . Разложим флуктуации магнитного поля в базисе поляризаций $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$ в виде $\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s$: $\mathbf{b}_{\mathbf{k}'} = \sum_s c_{\mathbf{k}',s} \mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^s$. Тогда коэффициенты разложения флуктуаций магнитного поля в этом базисе будут подчиняться следующему уравнению:

$$\begin{aligned} |\Sigma| \frac{dc_{\mathbf{k}',s}}{dt} + \left\{ \left(\mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^{-s}, \frac{d\mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^s}{dt} \right) + \Sigma h_{\mathbf{k}'}^{s,\eta} h_{\mathbf{k}'}^{-s,\xi} + \kappa k_f^2 k'^2 \right\} c_{\mathbf{k}',s} = \\ = ik_f \left(\mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^{-s}, \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \right) k'_p \bar{B}^p \end{aligned} \quad (3.34)$$

Это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая имеет диагональный вид, т.к. разные поляризации здесь не взаимодействуют.

$$|\Sigma| \frac{dc_{\mathbf{k}',s}}{dt} + \left\{ \left(\mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^{-s}, \frac{d\mathbf{h}_{\mathbf{k}'}^s}{dt} \right) + \Sigma h_{\mathbf{k}'}^{s,\eta} h_{\mathbf{k}'}^{-s,\xi} + \kappa k_f^2 k'^2 \right\} c_{\mathbf{k}',s} = ik_f a_{\mathbf{k}'}^s(t) k'_p \bar{B}^p \quad (3.35)$$

Положим $t = 0$ и запишем выражение для коэффициентов разложения:

$$c_{\mathbf{k}',s} = ik_f |\Sigma|^{-1} \int_{-\infty}^0 dT k'_p(T) a_{\mathbf{k}'}^s(T) \sqrt{\frac{k}{k'(T)}} \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + is\phi_{\mathbf{k}}(T)\right) \bar{B}_p \quad (3.36)$$

где $\phi_{\mathbf{k}}(T)$ – фаза, характерная величина которой порядка единицы. Она меняется на масштабах безразмерного времени $T \sim 1$.

$$b_{\mathbf{k}}^i = \frac{ik_f}{|\Sigma|} \sum_s h_{\mathbf{k}}^{s,i} \int_{-\infty}^0 dT k'_p(T) a_{\mathbf{k}'}^s(T) \sqrt{\frac{k}{k'(T)}} \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + is\phi_{\mathbf{k}}(T)\right) \bar{B}_p \quad (3.37)$$

Электродвижущая сила $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ определяется взаимодействием пульсаций поля скорости и флуктуаций магнитного поля и имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \int (d^3k) \langle [\mathbf{u}_{-\mathbf{k}} \times \mathbf{b}_{\mathbf{k}}] \rangle \quad (3.38)$$

Используя выражение для поля скорости в базисе круговых поляризаций (3.3), а также выражение для флуктуаций магнитного поля (3.37), выражение для $\hat{\alpha}$ можно выразить через корреляторы коэффициентов разложения поля скорости $a_{\mathbf{k}}^s$:

$$\begin{aligned} \alpha_{ip} = & \frac{ik_f}{|\Sigma|} \sum_{s,\sigma} [\mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s \times \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^\sigma]^i \int_{-\infty}^0 dT k'_p(T) \langle a_{-\mathbf{k}}^s(t) a_{\mathbf{k}}^\sigma(T) \rangle \cdot \\ & \cdot \sqrt{\frac{k}{k'(T)}} \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + is\phi_{\mathbf{k}}(T)\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Разновременные корреляции коэффициентов разложения имеют следующий вид:

$$\langle a_{\mathbf{k}'s}(0) a_{\mathbf{q}'\sigma}(T) \rangle = (2\pi)^3 A_{\mathbf{k}'\sigma s}(T) \sqrt{\frac{k'(T)}{k}} e^{2i\Phi_{\mathbf{k}}(T)} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{q}'), \quad (3.40)$$

где оба волновых вектора \mathbf{k}' и \mathbf{q}' под аргументом δ -функции взяты на характеристиках в момент времени $t = 0$,

$$\Phi_{\mathbf{k}}(T) = \frac{2\Omega k_z}{\Sigma k_\xi} \ln\left(\frac{k'(T) + k'_\eta(T)}{k + k_\eta}\right) \quad (3.41)$$

Подставим (3.40) в (3.39). С учетом этого запишем выражение для элементов $\hat{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{ip} = & \frac{ik_f}{|\Sigma|} \sum_s [\mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s \times \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s]^i \int_{-\infty}^0 dT k'_p(T) A_{\mathbf{k}'ss}(T) \cdot \\ & \cdot \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + 2i\Phi_{\mathbf{k}}(T) + is\phi_{\mathbf{k}}(T)\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Проинтегрируем по времени T . В показателе экспоненты присутствует сумма фаз $\Phi_{\mathbf{k}}(T)$ и $\phi_{\mathbf{k}}(T)$. Интеграл по времени в (3.42) может быть вычислен с по-

мощью метода перевалов. Поскольку фаза $\phi_{\mathbf{k}}(T)$ меняется по времени гораздо медленнее, чем фаза $\Phi_{\mathbf{k}}(T)$, ею можно пренебречь:

$$|\partial_t \phi_{\mathbf{k}}(0)| \sim |\Sigma| \ll |\omega_{\mathbf{k}}| \sim |\partial_t \Phi_{\mathbf{k}}(0)| \quad (3.43)$$

Сравнение с пределом большой проводимости. Применим приближение (3.43) к выражению (3.42). Тогда мы можем записать элементы псевдотензора $\hat{\alpha}$ через флуктуации поля скорости \mathbf{u} :

$$\alpha_{ip} \approx \frac{ik_f}{|\Sigma|} \int (d^3k) \int_{-\infty}^0 dT k'_p(T) \langle [\mathbf{u}_{-\mathbf{k}'}(0) \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}(T)]^i \rangle \cdot \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m}\right) \quad (3.44)$$

Рассмотрим предел $\kappa \rightarrow 0$. Тогда мы можем провести интегрирование по волновым векторам в (3.44), записав также выражение в терминах размерного времени $t = T|\Sigma|^{-1}$:

$$\alpha_{ip} \approx \epsilon^{imj} \int_{-\infty}^0 dt \langle u^m(0) \partial_p u^j(t) \rangle \quad (3.45)$$

Аналогичное (3.45) выражение было получено в работе [149], формула (3.3). След тензора (3.45) будет иметь следующий вид:

$$\alpha_{ii} \approx - \int_{-\infty}^0 dt \langle \mathbf{u}(0) \boldsymbol{\omega}(t) \rangle \quad (3.46)$$

Результат, аналогичный (3.46), был получен в [150], формула (3.41a) для следа $\hat{\alpha}$ во вращающемся изотропном турбулентном течении с однородной по пространству угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ ($\nabla \boldsymbol{\omega} = 0$). Если коррелятор в подынтегральном выражении (3.46) определяется временами $t \sim \tau_{corr}$, след тензора $\hat{\alpha}$ можно оценить как $\alpha_{ii} \sim -\tau_{corr} \text{H}$ [150], [39].

Интегрирование по промежуточному времени T . Вернемся к соотношению (3.42). Далее перейдем к положительным безразмерным временам, осуществив замену $T \rightarrow -T$. Определим временной масштаб, на котором будет набираться интеграл. Он будет набираться на малых временах за счет наложения затухающей экспоненты $-\Gamma(T)\text{Pr}_m^{-1}$ и быстрых осцилляций $i\Phi_{\mathbf{k}}(T)$ с

частотой $\omega_{\mathbf{k}}$. В пределе $T \rightarrow 0$ показатель экспоненты имеет вид:

$$-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + 2i\Phi_{\mathbf{k}}(T) \approx -\left(\kappa(k_f k)^2 |\Sigma|^{-1} + i\frac{4\Omega k_\xi}{|\Sigma| k_z}\right) T \quad (3.47)$$

В зависимости от отношения порядка между частотой осцилляций и скоростью экспоненциального затухания интеграл будет набираться на временах $T \sim \min\{\text{Ro}, \text{Ek}/(\text{Pr}_m \text{Ro})\}$, которые в любом случае малы: $T \ll 1$. Итак, интеграл будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_0^\infty dT k'_p(T) A_{\mathbf{k}'ss}(T) \exp\left(-\frac{\Gamma(T)}{2\text{Pr}_m} + 2i\Phi_{\mathbf{k}}(T)\right) &\approx \\ \approx k_p A_{\mathbf{k}ss}(0) \frac{\text{Ro} k^4 \tau_\Omega^{-3}}{k_z^2 + (k/\tau_\Omega)^6}, &\quad (3.48) \end{aligned}$$

где вводится безразмерное время $\tau_\Omega = (\Omega/\kappa k_f^2)^{1/3} \sim (\text{Pr}_m/\text{Ek})^{1/3}$.

Сравнение с пределом слабого вращения $\Omega \ll \kappa k_f^2$.

Вернемся к выражению (3.44). После интегрирования по переменной времени T (аналогично тому, как это было сделано выше в формуле (3.48)), перепишем элементы тензора:

$$\alpha_{ip} \approx \int (d^3 k) \frac{k^4 \Omega^{-1} \tau_\Omega^3}{k^6 + k_z^2 \tau_\Omega^6} \epsilon^{imj} \langle u^m(0) \partial_p u^j(0) \rangle_{\mathbf{k}} \quad (3.49)$$

Рассмотрим предел слабого вращения $\Omega \rightarrow 0$ ($\tau_\Omega \rightarrow 0$):

$$\alpha_{ip} \approx \frac{1}{\kappa k_f^2} \int (d^3 k) \frac{1}{k^2} \epsilon^{imj} \langle u^m(0) \partial_p u^j(0) \rangle_{\mathbf{k}} \quad (3.50)$$

Удобно сначала исследовать след тензора:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{\kappa k_f^2} \int (d^3 k) \frac{1}{k^2} (-\epsilon^{mij}) \langle u^m(0) \partial_i u^j(0) \rangle_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\kappa k_f^2} \int (d^3 k) \frac{1}{k^2} \text{H}_{\mathbf{k}} \quad (3.51)$$

Похожий результат для следа $\hat{\alpha}$ был получен в [123], формулы (3.11) и (3.13), для случая псевдо-изотропной турбулентности в отсутствие вращения ($\Omega = 0$, $\Sigma = 0$).

Проанализируем тензорную структуру $\hat{\alpha}$ в этом пределе. Выражение (3.50) может быть записано в следующем виде:

$$\alpha_{ip} \approx \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{k_f}{\kappa k_f^2} \int d^3k \cdot k_p \langle [\mathbf{u}_{-\mathbf{k}}(0) \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(0)]^i \rangle \quad (3.52)$$

Похожее выражение было получено в работе [151] для проводящего невращающегося потока и использовано в [152], формула (10), для численного счета.

Связь псевдотензора $\hat{\alpha}$ с тензором \hat{H} . Используя полученную выше формулу (3.13), перепишем тензорный объект в подынтегральном выражении (3.50) через элементы \hat{H} :

$$\epsilon^{imj} \langle u^m \partial_p u^j \rangle_{\mathbf{k}} = (H_{ip} + H_{pi} - H_{mm} \delta^{ip})_{\mathbf{k}} \quad (3.53)$$

Тогда можно связать элементы $\hat{\alpha}$ с элементами \hat{H} в следующем виде:

$$\alpha_{ip} \approx \frac{1}{\kappa k_f^2} \int (d^3k) \frac{1}{k^2} (H_{ip} + H_{pi} - H \delta^{ip})_{\mathbf{k}} \quad (3.54)$$

В работе [125] элементы $\hat{\alpha}$ были выражены в виде похожей линейной комбинации элементов \hat{H} , не содержащей зависящего от волновых векторов множителя $(\kappa k_f^2 k^2)^{-1}$ в подынтегральном выражении ([125], формула в верхней части правой колонки на странице 316). Отметим, что при наличии вращения указанный выше множитель становится анизотропным в пространстве волновых векторов:

$$\alpha_{ip} = \Omega^{-1} \int (d^3k) \frac{k^4 \tau_\Omega^{-3}}{k_z^2 + (k/\tau_\Omega)^6} (H_{ip} + H_{pi} - H \delta^{ip})_{\mathbf{k}} \quad (3.55)$$

Выражение для элементов $\hat{\alpha}$.

Получим выражение для элементов $\hat{\alpha}$ в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости. Преобразуем предэкспоненту из (3.42):

$$i \sum_s [\mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^s \times \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^s]^i k_p A_{k,ss}(0) = \frac{k_i k_p}{k} \sum_s s A_{k,ss}(0) = -\frac{k_i k_p}{k_f k^2} H_{\mathbf{k}}, \quad (3.56)$$

После замены $\tau \rightarrow (-\tau)$ в (3.19) выражение для элементов $\hat{\alpha}$ примет следующий вид:

$$\alpha_{ip} \approx -\frac{\epsilon_h}{\tau_\Omega^3 |\Sigma| \Omega} \int_0^\infty d\tau \int (d^3 q) q \chi(q) \cdot e^{-\Gamma(\tau)} \frac{q'_i(\tau) q'_p(\tau) q'^2(\tau)}{q_z^2 + (q'(\tau)/\tau_\Omega)^6} \quad (3.57)$$

Пренебрегая зависимостью волновых векторов от времени (то есть предполагая сдвиг нулевым $\Sigma = 0$), можно прийти к выражению, полученному в работе [126]. Вязкая экспонента Γ в подынтегральном выражении (3.57) определяется безразмерным отношением τ_* , при этом знаменатель в подынтегральном выражении (3.57) определяется безразмерным отношением τ_Ω . Поэтому выражения для элементов псевдотензора α зависят от отношения порядка между τ_* и τ_Ω , $\tau_*/\tau_\Omega \sim (\text{Ro}/\text{Pr}_m)^{1/3}$. Величина τ_Ω может быть как большой, так и малой по сравнению с единицей. Случай относительно слабой $\tau_\Omega \gg 1$ (то есть $\text{Ek} \ll \text{Pr}_m$) и относительно большой магнитной диффузии $\tau_\Omega \ll 1$ (то есть $\text{Ek} \gg \text{Pr}_m$) нужно рассматривать отдельно. Поэтому элементы α существенно зависят от отношения порядка между числами Pr_m и Ro , а также между числами Pr_m и Ek . Подробные вычисления элементов псевдотензора α приведены в Приложении Б. Для удобства в Приложении вводится безразмерная матрица $\beta_{ip} = \alpha_{ip} |\Sigma| \Omega / \epsilon_h$. Здесь мы для наглядности резюмируем связь наших вычислений с результатами, приведенными в предыдущих работах, и после этого представим окончательные выражения для α -матрицы во всех рассмотренных предельных случаях. В пределе слабой магнитной диффузии ($\kappa \rightarrow 0$), выражение для $\hat{\alpha}$ из данной работы переходит к соответствующим выражениям, полученным в [149] и [150] для течения общего вида в пределе $\kappa = 0$ (см. уравнения (3.44)-(3.46) выше). Для конечной магнитной диффузии в пределе слабого вращения след $\hat{\alpha}$ соответствует формуле, полученной в [123], а сам тензор имеет похожий вид, что и соответствующие выражения в [151] и [125], полученные в отсутствие вращения ($\Omega = 0$, см. формулы (3.51), (3.52), (3.54) выше). В [125] приведена связь между элементами $\hat{\alpha}$ и элементами тензора \hat{H} , которая уточнена в данной работе. Кроме того, в данной работе она обобщается на случай сильного вращения, что соответствует рассматриваемому трехмерному когерентному вихрю, и приведена в (3.55) (см. формулы (3.54), (3.55) выше).

Сначала рассмотрим случай относительно слабой магнитной диффузии (то есть $\Omega \gg \kappa k_f^2$ или $\text{Ek} \ll \text{Pr}_m$). В пределе быстрого вращения $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$, псевдотензор $\hat{\alpha}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Omega|\Sigma|} \begin{pmatrix} \beta_{\xi\xi} & -\varsigma\tau_* & 0 \\ -\varsigma\tau_* & \tau_*^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

где обе величины $\beta_{\xi\xi} = -\ln(\text{Pr}_m(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$ и $\beta_{zz} = \text{Ro}/\text{Pr}_m \ll 1$ положительны. Величина $|\Sigma|/\kappa k_f^2 = \text{RoPr}_m/\text{Ek}$, $\beta_{\xi\xi}$ зависит логарифмически от параметров течения, и поэтому много меньше других элементов из плоскости $\xi\eta$. В пределе сильного вращения в отсутствие сдвигового течения ($\text{Pr}_m \gg \text{Ro} \rightarrow 0$), полученные результаты находятся в согласии с выражениями, полученными в [126] для похожего предела. В противоположном пределе $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$ выражение для элементов $\hat{\alpha}$ выглядит следующим образом:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Omega|\Sigma|} \begin{pmatrix} \beta_{\xi\xi} & -\varsigma\tau_\Omega & 0 \\ -\varsigma\tau_\Omega & \tau_\Omega^2\beta_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

где величины $\beta_{\xi\xi} = -\ln(\text{Ro}(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$ и $\beta_{zz} = \ln(\text{Ro}/\text{Pr}_m)$ обе положительные и много больше единицы, но меньше, чем τ_Ω . Поскольку вычисления проведены с логарифмической точностью, одно решение (3.58) переходит в другое (3.59) при $\text{Ro} \sim \text{Pr}_m$. С точностью до логарифмических поправок выражения (3.58) и (3.59), спроецированные на плоскость $\xi\eta$, могут быть унифицированы, если взять $\min(\tau_*, \tau_\Omega)$. Спроецированные на эту плоскость элементы $\hat{\alpha}$ слабо зависят от коэффициента магнитной диффузии в пределе (3.58) и начинают убывать с ростом коэффициента магнитной диффузии в пределе (3.59). Отметим также, что величина $\hat{\alpha}$ убывает с ростом угловой скорости.

В случае относительно большого коэффициента магнитной диффузии ($\Omega \ll \kappa k_f^2$ или $\text{Ek} \gg \text{Pr}_m$) характерное время, необходимое для того, чтобы флуктуации магнитного поля \mathbf{b} формировались за счет флуктуаций поля скорости \mathbf{u} , есть время магнитной диффузии $\sim (\kappa k_f^2)^{-1}$, так что α имеет следующий

вид:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{|\Sigma|\kappa k_f^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varsigma & 0 \\ -\varsigma & \ln \tau_* & 0 \\ 0 & 0 & \ln \tau_* \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Величина $\hat{\alpha}$ (3.60) убывает с ростом коэффициента магнитной диффузии и не зависит от величины угловой скорости.

Поскольку вычисления проведены с логарифмической точностью, решение (3.60) переходит в (3.59) при $\text{Ek} \sim \text{Pr}_m$ ($\tau_\Omega \sim 1$). В силу свойств симметрии недиагональные элементы всегда зависят от знака ς коэффициента сдвига Σ , в то время как диагональные элементы от него не зависят. Согласно проведенным вычислениям $\alpha_{\eta\eta}$, $\alpha_{\xi\eta}$ и α_{zz} набираются при $q_z \gg \text{Ro}$. Однако $\alpha_{\xi\xi}$ определяется интегралом, который логарифмически расходится по q_z . Случаи (3.58,3.59) определяются масштабами $\max(\text{Ro}, \kappa k_f^2/\Omega) \lesssim q_z \lesssim \min(\text{Ro}/\text{Pr}_m, 1)$. Нижнее ограничение $q_z \gtrsim \text{Ro}$ возникает вследствие того, что величина α -эффекта обращается в ноль для чисто двумерного случая $q_z = 0$ для малых чисел Ленерта $\text{Le} \ll 1$, что можно непосредственно проверить, используя технику, применяемую в [67]. Используемая в работе теория применима и для $q_z \sim \text{Ro}$. Логарифмический тип расходимости является следствием предполагаемой изотропии корреляционной функции силы $\chi(\mathbf{q})$. Однако он не является изотропным в реальных системах и накапливается при меньших q_z [106]. В этом случае значение $\xi\xi$ -элемента α -матрицы определяется окрестностью наименьшего $q_z \sim \text{Ro}$. Существует связь между значением q_z и характерным значением времени τ для интегралов, $\tau \sim \tau_\Omega q_z^{1/3}$, поэтому характерный интервал для q_z соответствует интервалу времени $\max(\tau_\Sigma, 1) \lesssim \tau \lesssim \min(\tau_*, \tau_\Omega)$ где используется обозначение $\tau_\Sigma = (\Sigma/\kappa k_f^2)^{1/3}$.

Для удобства представим выражение $\hat{\alpha}$ в терминах переменных цилиндрических координат $\{\rho, \varphi, z\}$:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \tau_*^2 & -\varsigma \tau_* & 0 \\ -\varsigma \tau_* & \beta_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ro} \ll \text{Pr}_m; \quad (3.61)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \tau_\Omega^2 \beta_{zz} & -\varsigma \tau_\Omega & 0 \\ -\varsigma \tau_\Omega & \beta_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ek} \ll \text{Pr}_m \ll \text{Ro} \quad (3.62)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{|\Sigma| \kappa k_f^2} \begin{pmatrix} \ln \tau_* & -\varsigma & 0 \\ -\varsigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \tau_* \end{pmatrix}, \quad \text{Pr}_m \ll \text{Ek} \ll \text{Ro} \quad (3.63)$$

где $\beta_{\varphi\varphi} = -\ln(\text{Ro}(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$, $\beta_{zz} = \text{Ro}/\text{Pr}_m$ в пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$; $\beta_{\varphi\varphi} = -\ln(\text{Pr}_m(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$, $\beta_{zz} = \ln(\text{Ro}/\text{Pr}_m)$ в пределе $\text{Pr}_m \ll \text{Ro}$.

3.3 Среднее магнитное поле

Здесь мы рассматриваем начальную стадию роста среднего магнитного поля и устанавливаем пороговое условие для кинематического динамо. Поскольку вращение предполагается сильным, будем предполагать среднее магнитное поле аксиально-симметричным и зависящим только от вертикальной и радиальной координат: $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}(\eta, z)$. Электродвижущая сила будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{E} = \left(\alpha_{\xi\xi} \bar{B}^\xi + \alpha_{\xi\eta} \bar{B}^\eta \right) \mathbf{e}_\xi + \left(\alpha_{\xi\eta} \bar{B}^\xi + \alpha_{\eta\eta} \bar{B}^\eta \right) \mathbf{e}_\eta + \alpha_{zz} \bar{B}^z \mathbf{e}_z \quad (3.64)$$

Система координат (ξ, η, z) является локальной в окрестности Лагранжевой траектории радиуса ρ_0 (см. Рис. 1.5). Поскольку мы изучаем эволюцию среднего магнитного поля, являющегося крупномасштабным, мы рассматриваем его динамику на масштабах $k \sim k_b \ll k_f$. В силу аксиальной симметрии системы удобно ввести цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) , в которой диффе-

ренциальные операторы и базисные векторы будут иметь следующий вид:

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \partial_\varphi + \mathbf{e}_z \partial_z; \quad (3.65)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Поле скорости направлено вдоль азимутального направления: $\mathbf{U} = U(\rho)\mathbf{e}_\varphi$. Поэтому

$$\text{rot} [\mathbf{U}, \overline{\mathbf{B}}] = \mathbf{U} \text{div} \overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}} \text{div} \mathbf{U} + (\overline{\mathbf{B}}, \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U}, \nabla) \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{e}_\varphi \overline{B}^\rho \partial_\rho U \quad (3.67)$$

Используя соотношение (3.64), выразим компоненты $\text{rot} \mathcal{E}$ через компоненты среднего магнитного поля в цилиндрических координатах:

$$\text{rot} \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{\xi\eta} \partial_z \overline{B}^\rho - \alpha_{\xi\xi} \partial_z \overline{B}^\varphi \\ \alpha_{\eta\eta} \partial_z \overline{B}^\rho - \alpha_{\xi\eta} \partial_z \overline{B}^\varphi - \alpha_{zz} \partial_\rho \overline{B}^z \\ -\alpha_{\xi\eta} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) \overline{B}^\rho + \alpha_{\xi\xi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) \overline{B}^\varphi \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Лапласиан среднего поля $\overline{\mathbf{B}}(\rho, z)$ в цилиндрических координатах будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\mathbf{B}} &= \left(\Delta \overline{B}^\rho - \frac{\overline{B}^\rho}{\rho^2} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\Delta \overline{B}^\varphi - \frac{\overline{B}^\varphi}{\rho^2} \right) \mathbf{e}_\varphi + \Delta \overline{B}^z \mathbf{e}_z, \\ \Delta &= \Delta_\rho + \partial_z^2, \quad \Delta_\rho = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho \end{aligned} \quad (3.69)$$

Отсюда можно записать систему уравнений, описывающую эволюцию среднего поля:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \overline{B}^\rho \\ \overline{B}^\varphi \\ \overline{B}^z \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \overline{B}^\rho \\ \overline{B}^\varphi \\ \overline{B}^z \end{pmatrix}; \quad (3.70)$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \kappa \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2} \right) + \alpha_{\xi\eta} \partial_z & \alpha_{\eta\eta} \partial_z + \partial_\rho U & 0 \\ -\alpha_{\xi\xi} \partial_z & \kappa \left(\Delta - \frac{1}{\rho^2} \right) - \alpha_{\xi\eta} \partial_z & -\alpha_{zz} \partial_\rho \\ -\alpha_{\xi\eta} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) & \alpha_{\xi\xi} \left(\partial_\rho + \frac{1}{\rho} \right) & \kappa \Delta \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Данная система линейных дифференциальных уравнений в частных производных имеет первый порядок по времени и второй по переменным координат ρ и z . После диагонализации такая система преобразовывается в систему более высокого порядка по переменной ρ и станет достаточно сложной для дальнейшего количественного анализа [153]. Нас будет интересовать случай, когда характерный пространственный масштаб среднего поля мал по сравнению с характерным размером вихря $R \sim R_u$, определенном в [6], то есть $k_b R_u \gg 1$. Поэтому в данном пределе все частные производные по пространственным переменным могут быть переписаны в локальной декартовой системе координат (ξ, η, z) . В частности, слагаемое $\kappa \Delta \bar{\mathbf{B}}$ имеет вид $\kappa (\partial_\eta^2 + \partial_z^2) \bar{\mathbf{B}}$, слагаемое $\text{rot } \boldsymbol{\mathcal{E}}$ состоит из частных производных первого порядка. Отметим, что если бы масштаб среднего магнитного поля k_b был бы сравним с масштабом вихря, данные слагаемые были бы нелинейными. Нетрудно убедиться, что вне зависимости от отношения порядка между числом Россби и магнитным числом Прандтля будет верно следующее неравенство: $|k_f \alpha_{ij}| \ll |\Sigma|$. Таким образом, в пределе $R_u^{-1} \ll k_b \ll k_f$ эволюция среднего магнитного поля будет определяться следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} \bar{B}^\xi \\ \bar{B}^\eta \\ \bar{B}^z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\Sigma \bar{B}^\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \Delta \begin{pmatrix} \bar{B}^\xi \\ \bar{B}^\eta \\ \bar{B}^z \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\alpha_{\xi\eta} \partial_z & -\alpha_{\eta\eta} \partial_z & \alpha_{zz} \partial_\eta \\ \alpha_{\xi\xi} \partial_z & \alpha_{\xi\eta} \partial_z & 0 \\ -\alpha_{\xi\xi} \partial_\eta & -\alpha_{\xi\eta} \partial_\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B}^\xi \\ \bar{B}^\eta \\ \bar{B}^z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Перейдем в импульсное пространство:

$$\left\{ (\partial_t - \kappa k^2) \hat{I} - \begin{pmatrix} -ik_z \alpha_{\xi\eta} & -\Sigma - ik_z \alpha_{\eta\eta} & ik_\eta \alpha_{zz} \\ ik_z \alpha_{\xi\xi} & ik_z \alpha_{\xi\eta} & 0 \\ -ik_\eta \alpha_{\xi\xi} & -ik_\eta \alpha_{\xi\eta} & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \bar{B}_k^\xi \\ \bar{B}_k^\eta \\ \bar{B}_k^z \end{pmatrix} = 0; \quad (3.73)$$

Оставим только главные элементы:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \overline{B}_{\mathbf{k}}^\xi \\ \overline{B}_{\mathbf{k}}^\eta \\ \overline{B}_{\mathbf{k}}^z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\kappa k^2 & -\Sigma & 0 \\ ik_z \alpha_{\xi\xi} & -\kappa k^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{B}_{\mathbf{k}}^\xi \\ \overline{B}_{\mathbf{k}}^\eta \\ \overline{B}_{\mathbf{k}}^z \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Как будет показано ниже, основное влияние на рост магнитного поля окажут сдвиговое течение и $\xi\xi$ - элемент $\hat{\alpha}$. Данная линейная система уравнений с постоянными коэффициентами имеет три собственных значения, одно из которых всегда отрицательно ($\lambda_0 = -\kappa k^2$), а два других имеют вещественную и мнимую части, зависящие от волнового вектора \mathbf{k} :

$$\lambda_{\pm} \approx -\kappa k^2 \pm \sqrt{\frac{|\alpha_{\xi\xi} k_z \Sigma|}{2}} (1 + i \cdot \text{sgn}(\epsilon_h k_z \Sigma)) \quad (3.75)$$

Собственное значение λ_- имеет отрицательную вещественную часть, при этом другое собственное значение, λ_+ , может иметь положительную вещественную часть только в случае $\sqrt{|\alpha_{\xi\xi} k_z \Sigma|}/2 > \kappa k^2$, и только в этом случае возможен рост магнитного поля со временем. Нас будет интересовать только собственное значение λ_{\pm} , поэтому в дальнейших рассуждениях опустим индекс \pm и будем писать λ . Рост среднего магнитного поля с течением времени возможен только при соблюдении вышенаписанного критерия. Аналогичный критерий был получен для магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$, которое зависит только от координаты вдоль оси вращения z в [127], здесь он обобщен для произвольной пространственной зависимости. Отметим, что согласно (3.75) именно $\xi\xi$ -элемент определяет критерий роста крупномасштабного магнитного поля, и с точки зрения геометрического смысла его роль состоит в превращении тороидального магнитного поля в полоидальное [129]. Эта ключевая роль элемента была обоснована ранее для течений общего типа, близких к осесимметричным [98, после (6)].

Далее мы устанавливаем критерий роста магнитного поля с точки зрения безразмерных параметров и определяем конфигурацию крупномасштабного магнитного поля. Будем предполагать, что мощность, связанная со спиральностью течения, порядка мощности накачки, т.е. $|\epsilon_h| \sim \epsilon k_f$. С учетом этого в пределе $\Omega \gg \kappa k_f^2$ (то есть когда $\text{Ek} \ll \text{Pr}_m$, а значит, применимы формулы (3.58) и (3.59)) перепишем данное условие с логарифмической точностью (не

учитываем логарифм в выражении для $\alpha_{\xi\xi}$):

$$\frac{Ek}{Pr_m} \lesssim Ro^2 Pr_m \left(\frac{k_f}{k_b} \right)^3 \frac{\epsilon}{\nu \Sigma^2}, \quad (3.76)$$

где мы не учитываем логарифмический множитель в $\alpha_{\xi\xi}$ и принимаем $k_z \sim k_b$. В пределе относительно большого коэффициента магнитной диффузии $\Omega \ll \kappa k_f^2$ (то есть $Ek \gg Pr_m$, когда применимо (3.60)) критерий имеет вид

$$\left(\frac{Ek}{Pr_m} \right)^2 \lesssim Ro^2 Pr_m \left(\frac{k_f}{k_b} \right)^3 \frac{\epsilon}{\nu \Sigma^2}. \quad (3.77)$$

Если размер системы допускает достаточно малые волновые числа k_b , которые удовлетворяют условиям (3.76,3.77), тогда скорость роста магнитного поля $Re \lambda$ (3.75) растет с волновым числом как $\sqrt{k_b}$ при $k_b \lesssim k_b^*$ и затем падает до отрицательных значений $k_b > k_b^*$, где k_b^* соответствует нулевой скорости роста. Таким образом, магнитное поле с минимально возможным масштабом $\sim 1/k_b^*$ должно достигать наибольшей амплитуды во время кинематической стадии динамо. Также нетрудно убедиться, что скорость роста λ всегда мала по сравнению с угловой скоростью вращения вихря $|\lambda| \ll \Omega$.

Вычислим собственный вектор $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}^\lambda$, соответствующий собственному значению λ , принимая во внимание, что среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}(\eta, z)$ соленоидально, то есть $k_\eta \overline{B}_k^{\lambda\eta} + k_z \overline{B}_k^{\lambda z} = 0$. Будем предполагать, что порог динамо значительно превышен, то есть первым слагаемым $-\kappa k^2$ в (3.75) можно пренебречь по сравнению со вторым.

В терминах локальных цилиндрических координат $\{\delta\rho, \rho\delta\varphi, \delta z\}$, определенных выше согласно (2.88), комплексная амплитуда среднего магнитного поля будет иметь следующий вид:

$$\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}^\lambda \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -|\Sigma|/\lambda \\ -k_\rho/k_z \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad \frac{|\Sigma|}{|\lambda|} \sim \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu \Sigma^2} \frac{k_f/k_b}{\min(Ek, Pr_m)}} \gg 1. \quad (3.78)$$

Азимутальная компонента поля относительно велика как $|\Sigma/\lambda|$, так что магнитное поле преимущественно направлено вдоль азимутального направления. При этом азимутальная компонента отстает от радиальной по фазе на

$3\pi/4$ в случае, если $\epsilon_h k_z \Sigma > 0$, в противном случае ($\epsilon_h k_z \Sigma < 0$) разность фаз имеет обратный знак. Таким образом, при смене знака спиральности ($\epsilon_h \rightarrow -\epsilon_h$) разность фаз азимутальной и радиальной компоненты меняет знак. Иными словами, при смене знака спиральности и амплитуда среднего магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}^\lambda$, и показатель λ в выражении для среднего магнитного поля меняются на комплексно-сопряженные: $\lambda \rightarrow \lambda^*$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}^\lambda \rightarrow (\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}^\lambda)^*$.

Выводы по главе 3

1. Для описанной в предыдущей главе модели трехмерного когерентного геострофического вихря показано, что ненулевая спиральность может возникать за счет специального вида случайной силы, который может быть создан в эксперименте искусственно, а также найдены компоненты одноточечного коррелятора скорость-завихренность.

2. Вычислены элементы матрицы α -эффекта в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости с ненулевой спиральностью при различных значениях числа Россби Ro , Экмана E_k и магнитного числа Прандтля Pr_m в области их значений $E_k \ll Ro \lesssim 1$ и $Pr_m \lesssim 1$.

3. Показано, что характер α -эффекта в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости существенно зависит от соотношений между числом Россби Ro и магнитным числом Прандтля Pr_m , а также между числом Экмана E_k и магнитным числом Прандтля Pr_m . Величина элементов $\hat{\alpha}$ уменьшается с ростом угловой скорости Ω при $E_k \ll Pr_m$ и не зависит от угловой скорости при $E_k \gg Pr_m$. Величина элементов $\hat{\alpha}$ слабо зависит от коэффициента магнитной диффузии κ в пределе $Ro \ll Pr_m$ и убывает с ростом κ в случае $Ro \gg Pr_m$.

4. Установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля со временем в трехмерном когерентном геострофическом спиральном вихре проводящей жидкости на кинематической стадии. Критерий записан в терминах безразмерных параметров течения Ro , E_k , Pr_m , а также отношения масштабов k_b/k_f . В области параметров, где в неравенстве, соответствующему критерию, большее выражение значительно превосходит меньшее, поле преимущественно направлено вдоль азимутального направления, а при смене знака спиральности амплитуда среднего магнитного поля преобразуется в комплексно-сопряженную величину.

Глава 4. Статистика выходного сигнала в среде с керровской нелинейностью

В предыдущих главах рассматривали статистику турбулентных пульсаций в трехмерном когерентном вихревом течении, предполагая их слабыми по сравнению со средним течением и рассматривая слабонелинейный режим, в рамках которого изучалось линеаризованное уравнение Навье-Стокса. Другими предельными случаями являются течения, в которых флуктуации достаточно сильные. Система становится существенно нелинейной. Предельным случаем нелинейных течений являются системы, описываемые нелинейным уравнением Шредингера (1.27).

Во введении была описана волновая кинетическая теория, полученная в работе [62] для таких нелинейных систем. Она хорошо предсказывает ширину спектра излучения случайных волоконных лазеров, демонстрируя хорошее соответствие с экспериментами. Представляет интерес исследование статистики интенсивности выходного сигнала, нахождение корреляционных моментов напряженности поля сигнала, а также функции распределения интенсивности, что является целью данной главы.

4.1 Статистика интенсивности выходного сигнала

Система, состоящая из большого числа случайных невзаимодействующих (независимых) элементов, подчиняется гауссовой статистике [154]. Одним из способов экспериментального определения функции распределения рассматриваемой величины является подсчет её средних. Теорема Вика [155] устанавливает связь между средними значениями изучаемой величины, возведенной в различные степени, в случае, если эта величина имеет гауссово распределение. В частности, для любого натурального числа n верно следующее соотношение:

$$\langle I^n \rangle = n! \langle I \rangle^n, \quad (4.1)$$

где $I = \psi^2$, а под средним $\langle \dots \rangle$ понимается усреднение с весом $\exp(-I/\bar{I})$, то есть усреднение по статистике, являющейся релеевской, т.к. в качестве случайной переменной рассматривается интенсивность I . Соотношение (4.1) справедливо для системы, состоящей из большого числа невзаимодействующих элементов. Однако если эти элементы будут нелинейно взаимодействовать друг с другом, их статистика будет отличаться от гауссовой в терминах огибающей ψ (или релеевской в терминах интенсивности I). Такое отличие можно количественно описать безразмерной величиной, называемой коэффициентом эксцесса:

$$\mathcal{K} = \langle I^2 \rangle / \bar{I}^2 - 2 \quad (4.2)$$

Пусть в главном порядке по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ коэффициент эксцесса $\mathcal{K} \approx K$. Будем действовать в предположении, что K мал по сравнению с единицей. Ниже будет показано, что данное допущение корректно в слабонелинейном режиме, который рассматривается в работе. Зная величину K , можно в главном порядке найти функцию распределения. Используя теорему Вика, получим связь между $\langle I^n \rangle$ и $\langle I \rangle^n$ в случае малого K :

$$\langle I^n \rangle = n! \bar{I}^n \left(1 + \frac{K}{2} n(n-1) \right) \quad (4.3)$$

Зная значение среднего $\langle I^n \rangle$, можно восстановить функцию распределения. Она имеет смысл веса при усреднении любой функции, зависящей от интенсивности. В частности,

$$\langle I^n \rangle = \bar{I}^{-1} \int_0^{\infty} dI I^n \mathcal{F}(I) \quad (4.4)$$

В пределе $K \rightarrow 0$ функция распределения интенсивности является релеевской и имеет вид $\exp(-I/\bar{I})$. Будем искать функцию распределения в виде

$$\mathcal{F}(I) = \sum_{k=0}^2 c_k (I/\bar{I})^k \exp(-I/\bar{I}), \quad (4.5)$$

поскольку во всех средних (4.3) выражение содержит произведение не более чем $(n+2)$ зависящих от n множителей.

После интегрирования и сравнения равенств, найдем функцию распределения:

$$\mathcal{F}(I) = \left(1 + \frac{(I/\bar{I})^2 - 4(I/\bar{I}) + 2}{2} K \right) \exp(-I/\bar{I}) \quad (4.6)$$

График данной функции изображен на рис. 4.1 при $K = 0.2$ (аномальная дисперсия, $\beta_2 < 0$, правый график) и при $K = -0.2$ (нормальная дисперсия, $\beta_2 > 0$, левый график). Пунктирной линией на обоих рисунках изображен график релеевской статистики (случай $K = 0$).

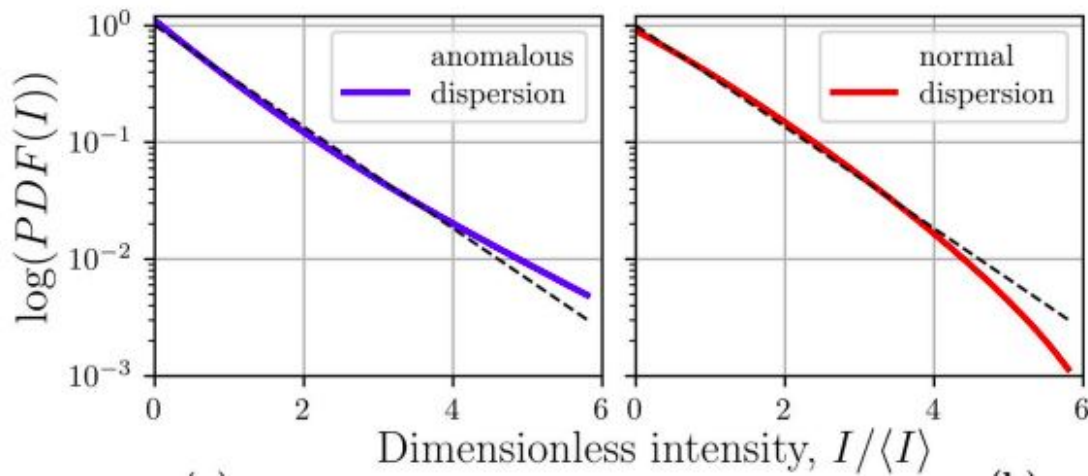


Рис. 4.1 — График функции распределения интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера при $|K| = 0.2$. Слева приведен график для аномальной дисперсии ($\beta_2 < 0$), справа приведен график для нормальной дисперсии ($\beta_2 > 0$).

Согласно (4.6), в пределе $K \rightarrow 0$ относительное отличие функции распределения $\mathcal{F}(I)$ от релеевского распределения $e^{-I/\bar{I}}$ по любой норме будет порядка коэффициента эксцесса K .

Таким образом, в данном разделе найдена функция распределения интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера в зависимости от величины коэффициента эксцесса в главном порядке по параметру нелинейности.

4.2 Определение коэффициента эксцесса в главном порядке

Для определения коэффициента эксцесса \mathcal{K} нужно посчитать среднее $\langle \psi^2 \psi^{*2} \rangle$ для выходного излучения. Среднее от любой величины $f(\psi, \psi^*)$, зависящей от огибающей ψ , сводится к среднему от $f(\psi, \psi^*) \exp(-S_{int})$ по невозмущенному состоянию $\langle \dots \rangle_0$. В приближении малого параметра нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ можно разложить экспоненту $\exp(-S_{int})$ в ряд и провести усреднение по невозмущенному состоянию $\langle \dots \rangle_0$ во всех слагаемых ряда, в котором каждое следующее слагаемое по параметру нелинейности будет параметрически меньше предыдущего. Используя данный подход, вычислим среднее от квадрата интенсивности выходного излучения:

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle = \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} S_{int}^m \right) \rangle_0 = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} S_{int}^m \rangle_0 = 2\langle I \rangle^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} S_{int}^m \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, в двух первых неисчезающих порядках по параметру нелинейности коэффициент эксцесса будет иметь вид

$$\mathcal{K} \approx \frac{1}{\bar{I}^2} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} S_{int} \rangle_0 - \frac{1}{2\bar{I}^2} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} S_{int}^2 \rangle_0 = K + \delta K \quad (4.8)$$

Величина K имеет первый порядок малости по параметру нелинейности $\gamma \bar{I} l_D$, величина δK – второй порядок малости.

Корреляционная функция во временном представлении:

$$\begin{aligned} (z_2, t_2) \rightsquigarrow (z_1, t_1) &= \\ &= \langle \psi(z_1, t_1) \bar{\psi}(z_2, t_2) \rangle = F(z_1, z_2, t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

и частотном представлении:

$$\begin{aligned}
 \psi^*,2 \overset{\omega}{\rightsquigarrow} \psi,1 &= \\
 &= \int d(t_1 - t_2) \exp(i\omega(t_1 - t_2)) \langle \psi(z_1, t_1) \psi^*(z_2, t_2) \rangle \\
 &= F(z_1, z_2, \omega)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

При совпадающих положениях

$$F(z, z, \omega) \equiv F(z, \omega) \tag{4.11}$$

Затравочная функция Грина во временном представлении

$$\begin{aligned}
 (z_1, t_1) \dashrightarrow (z_2, t_2) &= \\
 &= \langle p^*(z_1, t_1) \psi(z_2, t_2) \rangle \\
 &= G_0(z_2 - z_1, t_2 - t_1)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

и частотном представлении [62]

$$\begin{aligned}
 \bar{p},1 \dashrightarrow \psi,2 &= \\
 &= \int d(t_1 - t_2) \exp(i\omega(t_1 - t_2)) \langle p^*(z_1, t_1) \psi(z_2, t_2) \rangle \\
 &= G_0(z_2 - z_1, \omega) = \\
 &= \theta(z_2 - z_1) \exp\left(\left(g - \frac{i\beta_2}{2}\omega^2\right)(z_2 - z_1)\right)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Комплексно сопряжённая функция Грина (приводим только в частотном представлении ради краткости)

$$\begin{aligned}
 p \dashrightarrow \bar{\psi} &= \\
 &= \int d(t_1 - t_2) \exp(i\omega(t_1 - t_2)) \langle p(z_1, t_1) \bar{\psi}(z_2, t_2) \rangle \\
 &= G_0^*(z_2 - z_1, -\omega) = G_0^*(z_2 - z_1, \omega).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$-i\gamma \times 4 + \text{c.c}$$

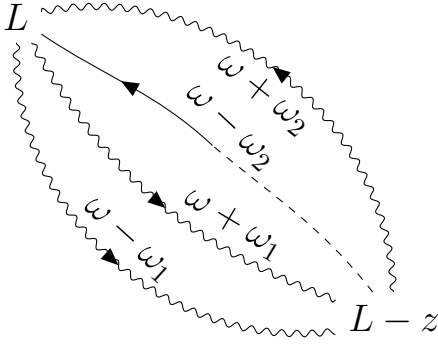


Рис. 4.2 — Диаграмма №1st1

Пусть $z_2 > z_1$. Тогда, если пренебречь нелинейностью, имеем

$$F(z_1, z_2, \omega) = F(z_2, \omega) / G_0(z_2 - z_1, \omega), \quad (4.15)$$

$$F(z_2, z_1, \omega) = F(z_2, \omega) / G_0^*(z_2 - z_1, -\omega).$$

Мы будем использовать следующее обозначение для обезразмеренного спектра при $z = L$:

$$F(L, \omega) = F(\omega) = \frac{I}{\Delta} f(\omega/\Delta), \quad \int \frac{dx}{2\pi} f(x) = 1. \quad (4.16)$$

Найдем коэффициент эксцесса в главном порядке по параметру нелинейности.

$$K = -\frac{i\gamma}{I^2} \left\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \int_0^L dz \int dt (p^* \psi^* \psi^2 - p \psi \psi^{*2}) \right\rangle_0 \quad (4.17)$$

Под знаком интегрирования будет стоять среднее от произведения восьми множителей, которое можно с помощью теоремы Вика свести к произведению попарных средних:

$$\begin{aligned} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} p^* \psi^* \psi^2 \rangle - \text{c.c.} &= 2 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi^2 \psi^* \psi_L \psi_L^{*2} \rangle - \text{c.c.} = \\ &= 2 \langle \psi_L p^* \rangle (2 \langle \psi_L \psi_L^* \rangle \langle \psi^2 \psi^* \psi_L^* \rangle + \langle \psi_L \psi^* \rangle \langle \psi^2 \psi_L^{*2} \rangle) - \text{c.c.} = \\ &= 8 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi_L \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle + 4 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi_L \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle - \text{c.c.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Отметим, что первое слагаемое сводится к выражению для приводимой части коррелятора, поэтому оно не будет давать вклад в K . Запишем аналитическое выражение для второй диаграммы 4.2, используя соотношения (4.15):

$$-4i\gamma\bar{I}^3 \int_0^\infty dz \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) \quad (4.19)$$

$$\frac{F(\omega - \omega_1)}{G_0(z, \omega - \omega_1)} \frac{F(\omega + \omega_1)}{G_0(z, \omega + \omega_1)} \frac{F(\omega + \omega_2)}{G_0^*(z, \omega + \omega_1)} + c.c.$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13) и напомним полный вклад от поправки первого порядка по γ в (4.17), перейдя при этом к безразмерной частоте согласно замене $\omega \rightarrow \Delta \cdot \omega$:

$$K = -4i\gamma\bar{I} \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) f(\omega + \omega_1) f(\omega - \omega_1) f(\omega + \omega_2) \int_0^L dz$$

$$\exp \left[-z \left(2g - i \frac{\beta_2 \Delta^2}{2} \{ (\omega + \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2 - (\omega + \omega_2)^2 - (\omega - \omega_2)^2 \} \right) \right] \quad (4.20)$$

$$+ c.c.$$

Для проведения дальнейших аналитических вычислений будем предполагать, что коэффициент усиления g однороден по всей длине волокна и не зависит от координаты z . Отметим, что $(\omega + \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2 - (\omega + \omega_2)^2 - (\omega - \omega_2)^2 = 2(\omega_1^2 - \omega_2^2)$. Интеграл по z будет иметь следующий вид:

$$-i \int_0^L dz \exp \left[-z \left(2g - il_D^{-1} [\omega_1^2 - \omega_2^2] \right) \right] + c.c. = 2l_D \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{4\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \cdot \quad (4.21)$$

$$\cdot \left\{ 1 - e^{-2g} \left[\cos \left(\frac{L}{l_D} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \right) + \frac{2\epsilon}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sin \left(\frac{L}{l_D} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \right) \right] \right\}$$

Нас интересует предел, когда накачка g на масштабе дисперсионной длины L_D мала ($\epsilon = gL_D \ll 1$), дисперсионная длина мала по сравнению с длиной всего оптоволокна ($L_D \ll L$), а усиление сигнала на всей длине волокна велико ($\mathcal{G} \gg 1$). В этом приближении интеграл по z будет набираться на масштабах порядка дисперсионной длины L_D в силу быстрых осцилляций подынтегрального выражения ($L_D \gg g^{-1}$). Кроме того, слагаемыми с синусом и косинусом

в (4.21) пренебрежимо малы по сравнению с первым слагаемым за счет малой экспоненты $\exp(-2\mathcal{G}) \ll 1$. Получим следующее выражение для K :

$$K = -\frac{8\gamma\bar{I}}{\beta_2\Delta^2} \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) \quad (4.22)$$

$$f(\omega + \omega_1)f(\omega - \omega_1)f(\omega + \omega_2) \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{(2\epsilon)^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}$$

Перейдём к переменным

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 - \omega_1 \\ \omega_2 + \omega_1 \\ \omega + \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_1 \\ 2\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix}$$

Интеграл переписется в виде

$$K = -\frac{4\gamma\bar{I}}{\beta_2\Delta^2} \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) f(\omega - \omega_1) f(\omega - \omega_2) f(\omega) \frac{\omega_1\omega_2}{(2\epsilon)^2 + \omega_1^2\omega_2^2} \quad (4.24)$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ (то есть в пределе малого усиления $gL_D \ll 1$) этот интеграл сводится к выражению

$$K_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} K(\epsilon) = -\frac{\gamma\bar{I}}{\beta_2\Delta^2} \int (d\omega) \tilde{f}^2(\omega) f(\omega), \quad (4.25)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \text{v.p.} \int \frac{d\omega_1}{\pi} \frac{f(\omega + \omega_1)}{\omega_1}. \quad (4.26)$$

Отметим, что знак K определяется знаком коэффициента дисперсии β_2 .

4.3 Вычисление квадратичной поправки к коэффициенту эксцесса

Коэффициент эксцесса посчитан в первом порядке по параметру нелинейности, далее вычислим его квадратичную поправку:

$$\begin{aligned}
\delta K &= -\frac{1}{2\bar{I}^2} \langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} S_{int}^2 \rangle_0 = \\
&= -\frac{\gamma^2}{2\bar{I}^2} \left\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \prod_{j=1}^2 \int_0^L dz_j \int dt_j (p_j^* \psi_j^2 \psi_j^* - c.c.) \right\rangle_0 \\
&\quad \frac{\gamma^2}{\bar{I}^2} \left\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \left| \int_0^L dz \int dt p^* \psi^2 \psi^* \right|^2 \right\rangle_0 - \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{2\bar{I}^2} \left\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} \left(\int_0^L dz \int dt p^* \psi^2 \psi^* \right)^2 + c.c. \right\rangle_0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Отметим, что от первое и второе слагаемые будут давать разные диаграммы разных типов. Диаграммы от первого слагаемого в выражении (4.27):

$$\begin{aligned}
\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} p_1^* p_2 \psi_1^2 \psi_2^{*2} \psi_1^* \psi_2 \rangle &= 16 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_1^* p_2 \rangle \langle \psi_1 \psi_L^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle \langle \psi_L \psi_2^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle + \\
&+ 8 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_L^* p_2 \rangle \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \langle \psi_2 \psi_1^* \rangle \langle \psi_L \psi_2^* \rangle \langle \psi_1 \psi_L^* \rangle + \\
&+ 8 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_L^* p_2 \rangle \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \langle \psi_L \psi_1^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Диаграмму, соответствующую первому слагаемому (4.28), назовем 111 4.3, диаграмму, соответствующую второму слагаемому, назовем 121 4.5, диаграмму, соответствующую третьему слагаемому, назовем 122 4.7. Диаграммы от второго слагаемого в выражении (4.27):

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_L^2 \psi_L^{*2} p_1^* p_2^* \psi_1^2 \psi_2^2 \psi_1^* \psi_2^* \rangle + c.c. = \\
&= 32 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_1 p_2^* \rangle \langle \psi_1 \psi_L^* \rangle \langle \psi_2 \psi_1^* \rangle \langle \psi_L \psi_2^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle + \\
&+ 16 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_1 p_2^* \rangle \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle \langle \psi_L \psi_1^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle + \\
&+ 16 \langle \psi_L p_1^* \rangle \langle \psi_L p_2^* \rangle \langle \psi_1 \psi_2^* \rangle \langle \psi_2 \psi_1^* \rangle \langle \psi_1 \psi_L^* \rangle \langle \psi_2 \psi_L^* \rangle + c.c.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

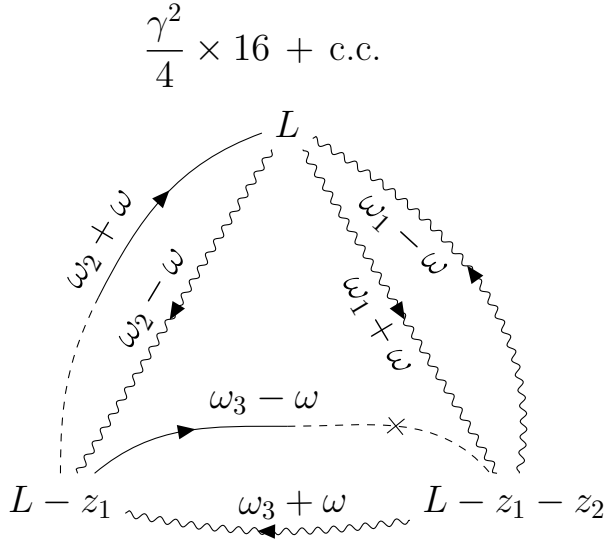


Рис. 4.3 — Диаграмма 111

Диаграмму, соответствующую первому слагаемому (4.29), назовем 211 4.4, диаграмму, соответствующую второму слагаемому, назовем 212 4.6, диаграмму, соответствующую третьему слагаемому, назовем 221 4.8.

Список диаграмм:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 111 & 4.3 & & 211 & 4.4 & 212 & 4.6 \\ 121 & 4.5 & 122 & 4.7 & 221 & 4.8 & \end{array}$$

Далее приведено подробное вычисление всех неприводимых диаграмм для квадратичной по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ поправки к коэффициенту экспоненты.

Диаграмма №111

Диаграмма на Рис. 4.3 происходит из первого слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы (поначалу без добавления комплексно-сопряжённого вклада).

$$\frac{\gamma^2 \cdot 16}{4} \int_0^L dz_1 \int_0^{L-z_1} dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.30)$$

$$G_0(z_1, \omega_2 + \omega) \frac{F(\omega_2 - \omega)}{G_0(z_1, \omega_2 - \omega)}$$

$$G_0^*(z_2, \omega_3 - \omega) \frac{F(\omega_3 + \omega)}{G_0(z_1, \omega_3 + \omega) G_0^*(z_1 + z_2, \omega_3 + \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 + \omega)}{G_0(z_1 + z_2, \omega_1 + \omega)} \frac{F(\omega_1 - \omega)}{G_0^*(z_1 + z_2, \omega_1 - \omega)}$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\begin{aligned}
& \frac{8\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& \exp \left[-z_1 \left(4\epsilon + i \{ (\omega_1 + \omega)^2 - (\omega_1 - \omega)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\omega_2 + \omega)^2 + (\omega_2 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& \exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \{ -(\omega_3 + \omega)^2 + (\omega_3 - \omega)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega_1 + \omega)^2 - (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 + \omega) f(\omega_1 + \omega) f(\omega_1 - \omega)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

где $F(\omega) \equiv F(L, \omega)$. Для более компактной записи введем далее обозначение $f^2(\omega_1, \omega) = f(\omega_1 + \omega) f(\omega_1 - \omega)$. Мы перешли к безразмерным переменным интегрирования

$$z = \frac{1}{\beta_2 \Delta^2} z', \quad \omega = \Delta \omega' \tag{4.32}$$

и опустили штрихи. Мы также предположили, что $\beta_2 > 0$, в этих вычислениях знак β_2 не является важным (вообще он важен, т.к. для исходного НУШ фокусирующее уравнение сменяется на дефокусирующее). Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и добавим комплексно сопряжённый вклад:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
& \frac{\epsilon^2 + 2\omega^2(\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_1)}{(\epsilon^2 + \omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2)(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_3)^2)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Перейдём к переменным интегрирования

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 - \omega_1 \\ 2(\omega_3 - \omega_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_3/2 + \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

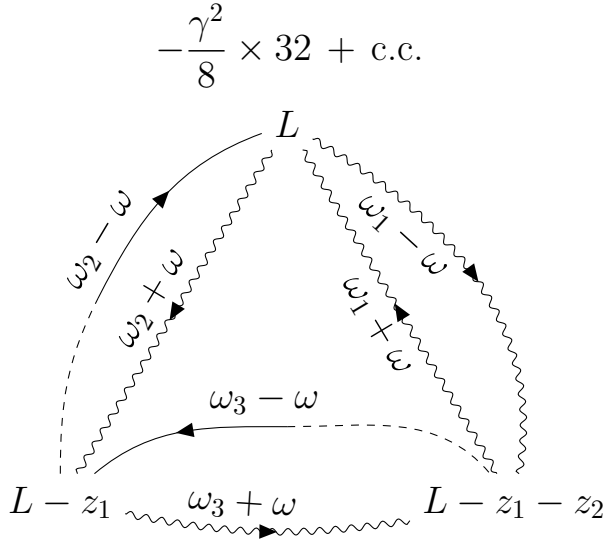


Рис. 4.4 — Диаграмма №211

Аналитическое выражение для диаграммы переписется в виде (опускаем знаки \sim):

$$\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.35)$$

$$f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega)$$

$$f^2(\omega_1, \omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)}$$

Диаграмма №211

Диаграмма на Рис. 4.4 происходит из второго слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы (поначалу без добавления комплексно-сопряжённого вклада).

$$-\frac{\gamma^2 \cdot 32}{8} \int_0^L dz_1 \int_0^{L-z_1} dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.36)$$

$$G_0(z_1, \omega_2 - \omega) \frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0(z_1, \omega_2 + \omega)}$$

$$G_0(z_2, \omega_3 - \omega) \frac{F(\omega_3 + \omega)}{G_0^*(z_1, \omega_3 + \omega) G_0(z_1 + z_2, \omega_3 + \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 + \omega)}{G_0^*(z_1 + z_2, \omega_1 + \omega)} \frac{F(\omega - \omega_1)}{G_0(z_1 + z_2, \omega_1 - \omega)}$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\begin{aligned}
& -\frac{8\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& \exp \left[-z_1 \left(4\epsilon + i \left\{ -(\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (\omega_2 + \omega)^2 - (\omega_2 - \omega)^2 \right\} \right) \right] \\
& \exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \left\{ (\omega_3 + \omega)^2 - (\omega_3 - \omega)^2 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - (\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \right\} \right) \right] \\
& f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и добавим комплексно сопряжённый вклад:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
& \frac{\epsilon^2 + 2\omega^2(\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_1)}{(\epsilon^2 + \omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2)(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_3)^2)}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Перейдём к переменным интегрирования

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 - \omega_1 \\ 2(\omega_3 - \omega_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_3/2 + \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

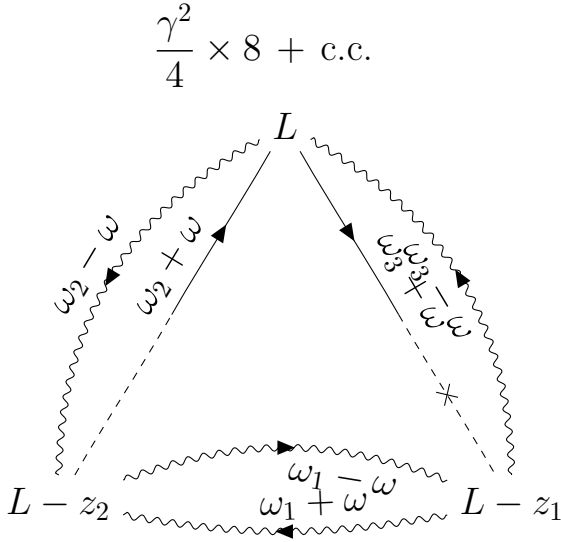


Рис. 4.5 — Диаграмма №121

Аналитическое выражение для диаграммы переписется в виде (опускаем знаки \sim):

$$-\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.40)$$

$$f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega)$$

$$f^2(\omega_1, \omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)}$$

Диаграмма №121

Диаграмма на Рис. 4.5 происходит из первого слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы.

$$\frac{\gamma^2 \cdot 8}{4} \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.41)$$

$$G_0(z_2, \omega_2 + \omega) \frac{F(\omega_2 - \omega)}{G_0(z_2, \omega_2 - \omega)}$$

$$G_0^*(z_1, \omega_3 + \omega) \frac{F(\omega_3 - \omega)}{G_0^*(z_1, \omega_3 - \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 - \omega)}{G_0^*(z_2, \omega_1 - \omega) G_0(z_1, \omega_1 - \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0(z_2, \omega_1 + \omega) G_0^*(z_1, \omega_1 + \omega)}$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\begin{aligned}
& \frac{4\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& \exp \left[-z_1 \left(2\epsilon + i \{ (\omega_3 + \omega)^2 - (\omega_3 - \omega)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& \exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \{ -(\omega_2 + \omega)^2 + (\omega_2 - \omega)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega_1 + \omega)^2 - (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 - \omega) f^2(\omega_1, \omega).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и добавим комплексно сопряжённый вклад:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 - \omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
& \frac{\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)}{(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2)(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_3)^2)}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Перейдём к переменным интегрирования

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ 2(\omega_1 - \omega_2) \\ 2(\omega_3 - \omega_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2/2 \\ \tilde{\omega}_3/2 + \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

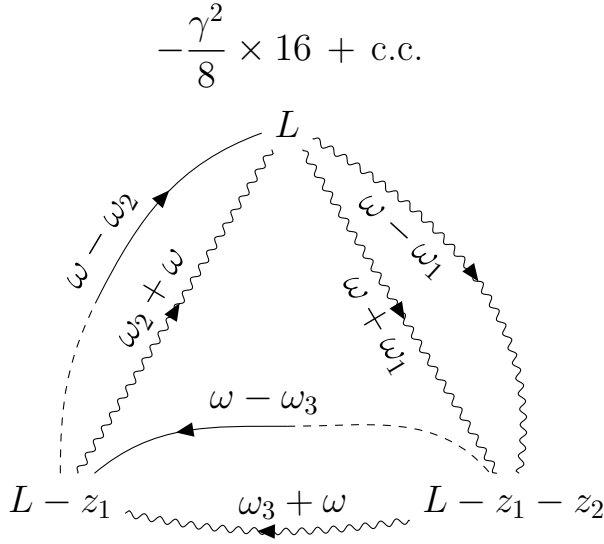


Рис. 4.6 — Диаграмма №212

Аналитическое выражение для диаграммы переписется в виде (опускаем знаки \sim):

$$\frac{\gamma^2 I^4}{2\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.45)$$

$$f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega)$$

$$f^2(\omega_1, \omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)}$$

Диаграмма №212

Диаграмма на Рис. 4.6 происходит из второго слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы (поначалу без добавления комплексно-сопряжённого вклада).

$$-\frac{\gamma^2 \cdot 16}{8} \int_0^L dz_1 \int_0^{L-z_1} dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.46)$$

$$G_0(z_1, \omega - \omega_2) \frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0^*(z_1, \omega_2 + \omega)}$$

$$G_0(z_2, \omega - \omega_3) \frac{F(\omega_3 + \omega)}{G_0(z_1, \omega_3 + \omega) G_0^*(z_1 + z_2, \omega_3 + \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 + \omega)}{G_0(z_1 + z_2, \omega_1 + \omega)} \frac{F(\omega - \omega_1)}{G_0(z_1 + z_2, \omega_1 - \omega)}$$

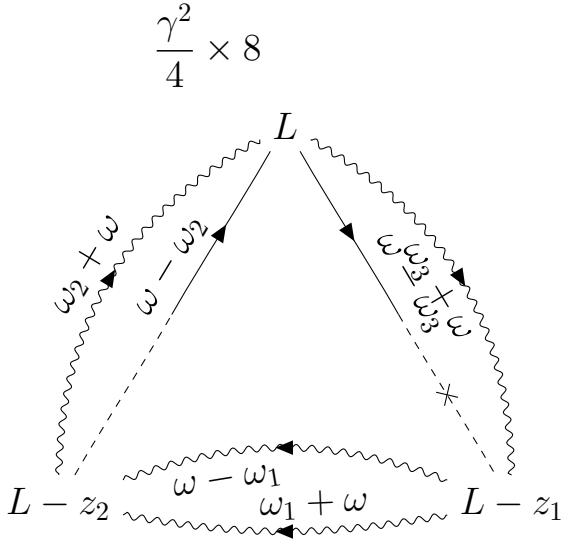


Рис. 4.7 — Диаграмма №122

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
 & \exp \left[-z_1 \left(4\epsilon + i \{ ((\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (\omega_2 + \omega)^2 - (\omega_2 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
 & \exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \{ (-(\omega_3 + \omega)^2 - (\omega_3 - \omega)^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
 & f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega).
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и добавим комплексно сопряжённый вклад:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
 & f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
 & \frac{2\epsilon^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_3^2)^2)}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Диаграмма №122

Диаграмма на Рис. 4.7 происходит из первого слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы.

$$\frac{\gamma^2 \cdot 8}{4} \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.49)$$

$$G_0(z_2, \omega_2 - \omega) \frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0^*(z_2, \omega_2 + \omega)}$$

$$G_0^*(z_1, \omega_3 - \omega) \frac{F(\omega_3 + \omega)}{G_0(z_1, \omega_3 + \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 - \omega)}{G_0(z_2, \omega_1 - \omega) G_0^*(z_1, \omega_1 - \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0(z_2, \omega_1 + \omega) G_0^*(z_1, \omega_1 + \omega)}$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\frac{4\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.50)$$

$$\exp \left[-z_1 \left(2\epsilon + i \{ (\omega_3 - \omega)^2 + (\omega_3 + \omega)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. - (\omega_1 + \omega)^2 - (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right]$$

$$\exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \{ -(\omega_2 + \omega)^2 - (\omega_2 - \omega)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right]$$

$$f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega).$$

Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и отбросим мнимую часть, поскольку она обращается в нуль вследствие симметрии подинтегрального выражения

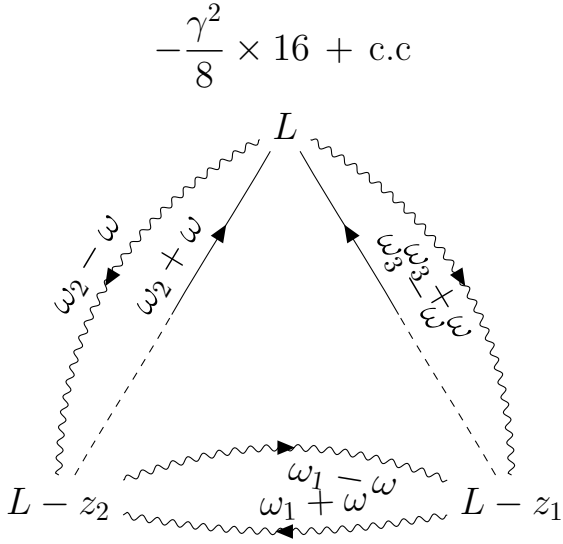


Рис. 4.8 — Диаграмма №221

$\omega_2 \leftrightarrow \omega_3$:

$$\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.51)$$

$$f(\omega_2 + \omega)f(\omega_3 + \omega)f^2(\omega_1, \omega)$$

$$\frac{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2)}$$

Диаграмма №221

Диаграмма №221 на Рис. 4.8 происходит из второго слагаемого (4.27). Выписываем и преобразуем аналитическое выражения для этой диаграммы.

$$-\frac{\gamma^2 \cdot 16}{8} \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2 \int 2(d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.52)$$

$$G_0(z_2, \omega_2 + \omega) \frac{F(\omega_2 - \omega)}{G_0(z_2, \omega_2 - \omega)}$$

$$G_0(z_1, \omega_3 - \omega) \frac{F(\omega_3 + \omega)}{G_0(z_1, \omega_3 + \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_1 - \omega)}{G_0^*(z_2, \omega_1 - \omega) G_0(z_1, \omega_1 - \omega)}$$

$$\frac{F(\omega_2 + \omega)}{G_0(z_2, \omega_1 + \omega) G_0^*(z_1, \omega_1 + \omega)}$$

Теперь распишем функции Грина согласно (4.13):

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& \exp \left[-z_1 \left(2\epsilon + i \{ (\omega_3 + \omega)^2 - (\omega_3 - \omega)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\omega_1 + \omega)^2 + (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& \exp \left[-z_2 \left(2\epsilon + i \{ -(\omega_2 + \omega)^2 + (\omega_2 - \omega)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega_1 + \omega)^2 - (\omega_1 - \omega)^2 \} \right) \right] \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Теперь произведём интегрирование по $z_{1,2}$ и добавим комплексно сопряжённый вклад:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\
& f(\omega_2 - \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
& \frac{\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)}{(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2)(\epsilon^2 + 4\omega^2(\omega_1 - \omega_3)^2)}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Перейдём к переменным интегрирования

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ 2(\omega_2 - \omega_1) \\ 2(\omega_3 - \omega_1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2/2 \\ \tilde{\omega}_3/2 + \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Аналитическое выражение для диаграммы переписется в виде (опускаем знаки \sim):

$$-\frac{\gamma^2 I^4}{2\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \quad (4.56)$$

$$f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega)$$

$$f^2(\omega_1, \omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)}$$

Диаграммы квадратичной поправки

Первый тип диаграмм Сумма диаграмм 212 4.6 и 122 4.7:

$$S_1 = \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \quad (4.57)$$

$$\left[\frac{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2)} - \frac{4\epsilon^2 - 2(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_3^2)^2)} \right]$$

Второй тип диаграмм. Сумма диаграмм 111 4.3, 211 4.4, 121 4.5 и 221 4.8:

$$S_2 = \frac{\gamma^2 I^4}{2\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)} \quad (4.58)$$

$$\left\{ 2(f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega)) + \right.$$

$$\left. + f\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{2} + \omega\right) - f\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{2} - \omega\right) \right\}$$

$$f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 + \omega\right) f^2(\omega_1, \omega)$$

Подинтегральное выражение в (4.58) формально имеет особенность при малом ω вследствие множителя в последней строчке. Однако эта особенность компенсируется тем, что в фигурной скобке стоят две разности, которые оказываются пропорциональными ω при $\omega \rightarrow 0$. Следует также учесть то, что общий множитель при фигурной скобке чётен по ω , поэтому при интегрировании по малым

ω в фигурной скобке надо удерживать следующий, квадратичный по ω , вклад. Это приведёт к полной компенсации особенности последнего множителя.

Стоит учитывать, что вычисления на данном этапе сделаны для уравнения, которое выписывалось ранее. Чтобы получить ответ в терминах актуального уравнения, необходимо заменить $\beta_2^2 \rightarrow \frac{1}{4}\beta_2^2$, $\gamma^2 \rightarrow 4\gamma^2$, $\epsilon^2 \rightarrow 4\epsilon^2$. С учетом изложенного имеем:

$$S_1 = 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \quad (4.59)$$

$$\left[\frac{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2)} - \frac{4\epsilon^2 - 2(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_3^2)^2)} \right]$$

$$S_2 = 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \frac{4\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)} \quad (4.60)$$

$$\left\{ (f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right\}$$

$$f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega) f^2(\omega_1, \omega)$$

Наконец, приведем выражение для поправки к куртозису $\delta K(\epsilon)$:

$$\delta K = 16 \frac{\gamma^2 \bar{I}^2}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d^4\omega) [Q_{2\epsilon}(\omega_2\omega) Q_{2\epsilon}(\omega_3\omega) + P_{2\epsilon}(\omega_2\omega) P_{2\epsilon}(\omega_3\omega)] \quad (4.61)$$

$$\left[\frac{1}{2} \delta f\left(\omega_1 - \frac{\omega_2}{2}, \omega\right) - \delta f(\omega_1 + \omega_2, \omega) \right] f\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2} - \omega\right) f^2(\omega_1, \omega) +$$

$$+ 16 \frac{\gamma^2 \bar{I}^2}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d^4\omega) f(\omega_1 - \omega_2) f(\omega_1 - \omega_3) f^2(\omega_1, \omega)$$

$$\left(Q_{2\epsilon}(\omega_2^2 - \omega^2) Q_{2\epsilon}(\omega_3^2 - \omega^2) + P_{2\epsilon}(\omega_2^2 - \omega^2) P_{2\epsilon}(\omega_3^2 - \omega^2) - \right.$$

$$\left. - 2[Q_{2\epsilon}(\omega_2^2 - \omega^2) Q_{4\epsilon}(\omega_3^2 - \omega^2) - P_{2\epsilon}(\omega_2^2 - \omega^2) P_{4\epsilon}(\omega_3^2 - \omega^2)] \right),$$

где используются следующие обозначения:

$$(d^4\omega) = \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega}{(2\pi)^4}, \quad Q_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}, \quad P_\epsilon(x) = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (4.62)$$

$$\delta f(\omega', \omega) = f(\omega + \omega') - f(\omega' - \omega), \quad f^2(\omega', \omega) = f(\omega' - \omega)f(\omega' + \omega).$$

Поправка к куртозису в пределе малого усиления

Преобразуем в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ выражение (4.59). Для этого в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ будем пользоваться следующими математическими фактами и обозначениями:

$$\int d^3\omega_{1,2,3} \left[\frac{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2)} - \right. \quad (4.63)$$

$$\left. - \frac{4\epsilon^2 - 2(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_1^2 - \omega_3^2)^2)} \right] = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + h^2} \rightarrow \pi\delta(h) \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \tilde{f}(\omega) = \int \frac{d\omega_1 f(\omega_1)}{\omega_1 - \omega} \quad (4.64)$$

Более подробные вычисления изложены в Приложении (В). Здесь приведены основные результаты.

$$S_1 = S_{1\delta} + S_{1h}, \quad (4.65)$$

$$S_{1\delta} = 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \int (d\omega_2)(d\omega_3) \pi^2 \delta(\omega_2^2 - \omega_1^2) \delta(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad (4.66)$$

$$\left(f(\omega_2 + \omega)f(\omega_3 + \omega)f^2(\omega, \omega_1) - f^4(\omega) \right),$$

$$S_{1h} = 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \int (d\omega_2)(d\omega_3) \quad (4.67)$$

$$\left(f(\omega_2 + \omega)f(\omega_3 + \omega)f^2(\omega, \omega_1) - f^4(\omega) \right)$$

$$\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)}{((2\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega_1^2)^2)} \left[\frac{1}{((2\epsilon)^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2)} + 2 \frac{1}{((4\epsilon)^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2)} \right]$$

Для того, чтобы преобразовать выражение для $S_{1\delta}$, заметим, что

$$\delta(\omega_2^2 - \omega_1^2) \delta(\omega_3^2 - \omega_1^2) = \frac{(\delta(\omega_2 - \omega_1) + \delta(\omega_2 + \omega_1)) (\delta(\omega_3 - \omega_1) + \delta(\omega_3 + \omega_1))}{4\omega_1^2} \quad (4.68)$$

что совпадает (В.33). Было вычтено $f^4(\omega)$ (дающее нулевой вклад вследствие (4.63)) для того, чтобы подинтегральное выражение при $\omega_1 \rightarrow 0$ оставалось конечным. Произведём интегрирование по (4.65) по $\omega_{2,3}$:

$$\begin{aligned} S_{1\delta} &= \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \frac{f^2(\omega, \omega_1)}{\omega_1^2} \left(f(\omega + \omega_1) f(\omega + \omega_1) + 2f(\omega + \omega_1) f(\omega - \omega_1) + \right. \\ &\quad \left. + f(\omega - \omega_1) f(\omega - \omega_1) - 4f^4(\omega) \right) = \\ &= \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \frac{f^2(\omega, \omega_1) \delta^2 f(\omega, \omega_1) (\delta^2 f(\omega, \omega_1) + 4f(\omega))}{\omega_1^2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Выражение для S_{1h} переписывается через интегралы в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} S_{1h} &= 3 \cdot 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \int \frac{(d\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{(d\omega_3)}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \\ &\quad (f(\omega_2 + \omega) f(\omega_3 + \omega) f^2(\omega, \omega_1) - f^4(\omega)). \end{aligned} \quad (4.70)$$

В этом выражении добавку $f^4(\omega)$ можно опустить, поскольку интеграл по $\omega_{2,3}$ от неё даёт нулевой вклад. Теперь воспользовавшись тем, что

$$\int \frac{(d\omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} f(\omega_2 + \omega) = \frac{\tilde{f}(\omega + \omega_1) - \tilde{f}(\omega - \omega_1)}{4\omega_1} \equiv \frac{\delta \tilde{f}(\omega, \omega_1)}{4\omega_1} \quad (4.71)$$

см. обозначения (4.64), получаем, что

$$S_{1h} = 3 \cdot \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega, \omega_1) \left(\frac{\delta \tilde{f}(\omega, \omega_1)}{\omega_1} \right)^2 \quad (4.72)$$

что совпадает с (В.25).

Теперь преобразуем в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ выражение (4.60). Пользуемся тем, что при интегрировании по ω даёт вклад только чётная часть по ω подинтегрального выражения, при этом выражение в фигурной скобке нечётно по ω .

Воспользуемся также тождествами:

$$2f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 + \omega\right) = \left(f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 + \omega\right) - f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 - \omega\right)\right) + \quad (4.73)$$

$$+ \left(f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 + \omega\right) + f\left(\frac{\omega_3}{2} + \omega_1 - \omega\right)\right);$$

$$\delta(\omega\omega_2)\delta(\omega\omega_3) = \frac{1}{\omega^2}\delta(\omega_2)\delta(\omega_3) \quad (4.74)$$

С учетом этого вклад от диаграмм второго типа будет иметь следующий вид:

$$S_2 = S_{2\delta} + S_{2h}, \quad (4.75)$$

$$S_{2\delta} = 16\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) \int (d\omega_2)(d\omega_3) \quad (4.76)$$

$$\left\{ (f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2}f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right\}$$

$$f^2(\omega_1, \omega) \pi^2 \delta(\omega\omega_2) \delta(\omega\omega_3) =$$

$$= -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \frac{(\delta f(\omega_1, \omega))^2}{\omega^2}.$$

Для преобразования $S_{2\delta}$ мы воспользовались (4.68), затем проинтегрировали по $\omega_{2,3}$. Теперь преобразуем второй кусок. Пользуемся тем, что при интегрировании по ω даёт вклад только чётная часть по ω подинтегрального выражения, при этом выражение в фигурной скобке нечётно по ω

$$S_{2h} = -8\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int \frac{(d\omega_1)(d\omega)}{\omega^2} \int \frac{(d\omega_2)(d\omega_3)}{\omega_2\omega_3} f^2(\omega_1, \omega) \quad (4.77)$$

$$\left\{ (f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2}f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right\} =$$

$$= \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \frac{\tilde{\delta} f(\omega_1, \omega) \delta f(\omega_1, \omega)}{\omega^2}$$

Итак, в пределе $\epsilon = 0$ выражение для вклада от диаграмм первого типа имеет вид:

$$\begin{aligned}
S_1 = & -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \\
& [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) + 2f(\omega_1)] f^2(\omega_1, \omega) - \\
& -4 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1) \cdot \frac{f^2(\omega_1, \omega) - f^2(\omega_1)}{\omega^2} + \\
& + \frac{3\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Выражение для вклада от диаграмм второго типа в этом пределе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
S_2 = & -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1 - \omega)}{\omega} \right]^2 + \\
& + \frac{3\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Выражение для коррелятора во втором порядке в пределе $\epsilon = 0$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 = & \frac{6\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2 - \\
& - \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1 - \omega)}{\omega} \right]^2 - \\
& - \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \cdot \\
& \cdot [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) + 2f(\omega_1)] f^2(\omega_1, \omega) - \\
& - \frac{4\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1) \cdot \frac{f^2(\omega_1, \omega) - f^2(\omega_1)}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Поправка к куртозису δK_0 будет иметь следующий вид в предельном случае $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \delta K_0 = & - (2\gamma l_D \bar{I})^2 \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} f^2(\omega') \frac{f^2(\omega', \omega) - f^2(\omega')}{\omega^2} + \\ & + (\gamma l_D \bar{I})^2 \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \frac{f^2(\omega, \omega')}{\omega^2} \cdot \\ & \cdot \left[6(\delta \tilde{f}(\omega', \omega))^2 - (\delta f(\omega', \omega))^2 - \delta^2 f(\omega', \omega) (\delta^2 f(\omega', \omega) + 4f(\omega')) \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

где используются обозначения $f^2(\omega', \omega) = f(\omega' + \omega)f(\omega' - \omega)$ и $\delta^2 f(\omega', \omega) = f(\omega' + \omega) + f(\omega' - \omega) - 2f(\omega')$ применительно к функции f , а также обозначение $\delta \tilde{f}(\omega', \omega) = \tilde{f}(\omega' + \omega) - \tilde{f}(\omega' - \omega)$ применительно к функциям f и \tilde{f} .

Таким образом, в данной главе определена функция распределения интенсивности выходного излучения, а также найдено аналитическое выражение для коэффициента эксцесса вплоть до второго порядка по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$.

Выводы по главе 4

1. Рассмотрена волновая кинетическая теория для активных систем с циклическим усилением, развитая в работе на примере случайного волоконного лазера [62], хорошо предсказывающая ширину спектра волнового пакета.

2. Для найденной ширины спектра определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер, которая имеет вид $\mathcal{F}(I) = (1 + K [(I/\bar{I})^2 - 4I/\bar{I} + 2] / 4) e^{-I/\bar{I}}$.

3. В первом и втором порядках по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ найдено выражение для коэффициента эксцесса как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности от релеевской.

Заключение

В ходе выполнения диссертационной работы с использованием статистического подхода решена важная научная задача, направленная на улучшение понимания особенностей когерентных вихревых и волновых турбулентных течений, присутствующих в ряде природных явлений (торнадо, циклоны, течения во внешнем ядре Земли) и технологических системах (случайный волоконный лазер, охлаждение ядерных реакторов), и получены следующие результаты:

1. получены соотношения для описания турбулентных пульсаций в присутствии сильного вращения и сдвигового течения при постоянной температуре, а также установлены свойства структурной функции турбулентных пульсаций внутри трехмерного когерентного геострофического вихря на малых масштабах;
2. посчитана структурная функция различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости на малых масштабах для трехмерного и двумерного когерентных вихревых течений при постоянной температуре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды; установлено, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный характер, чем в двумерном;
3. показано, что основной вклад в корреляционную и структурную функции скорость-скорость дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций;
4. аналитически исследован α -эффект в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости, вычислены элементы матрицы α -эффекта в течении с ненулевой спиральностью при различных числах Россби, Экмана и магнитного числа Прандтля в области их значений $E_k \ll Ro \lesssim 1$ и $Pr_m \lesssim 1$;
5. установлено, что величина α -эффекта в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости существенно зависит от соотношения между числом Россби и магнитным числом Прандтля; в частности, показано, что величина $\hat{\alpha}$ уменьшается с ростом угловой скорости Ω при $E_k \ll Pr_m$ и не зависит от угловой скорости при $E_k \gg Pr_m$, а так-

- же слабо зависит от коэффициента магнитной диффузии κ в пределе $Ro \ll Pr_m$ и убывает с ростом κ в случае $Ro \gg Pr_m$;
6. для кинематической стадии установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля, возникающего за счет течения спиральной проводящей жидкости трехмерного когерентного геострофического вихря, записанный в терминах безразмерных параметров течения Ro , Ek , Pr_m , а также отношения масштаба среднего магнитного поля к масштабу накачки k_b/k_f ;
 7. определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер, в виде $\mathcal{F}(I) = (1 + K [(I/\bar{I})^2 - 4I/\bar{I} + 2] / 4) e^{-I/\bar{I}}$, а также в первом и втором порядках по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ найдено выражение для коэффициента эксцесса \mathcal{K} как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеевской;
 8. полученные результаты могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

Список сокращений и условных обозначений

Re – число Рейнольдса

Ra – число Рэлея

Ro – число Россби

Ω – угловая скорость глобального вращения жидкости

\mathbf{u} – турбулентные пульсации поля скорости

U – среднее значение поля скорости

LSV (large-scale vortex) – крупномасштабный вихрь

$\hat{\alpha}$ – псевдотензор α -эффекта

МГД – магнитогидродинамический

Ek – число Экмана

Pr_m – магнитное число Прандтля

k_f – масштаб накачки

k_b – масштаб среднего магнитного поля

$\chi(k)$ – корреляционная функция сил накачки в импульсном представлении

\hat{N} – матрица средних скорость-завихренность

γ – коэффициент Керровской нелинейности

L_D – дисперсионная длина

\mathcal{K} – куртозис (коэффициент эксцесса)

ν – коэффициент кинематической вязкости

ϵ – мощность сил накачки

Σ – коэффициент сдвига

κ – коэффициент магнитной диффузии

НУШ – нелинейное уравнение Шредингера

β_2 – коэффициент дисперсии

\hat{g} – коэффициент усиления сигнала в оптоволокне

Δ – ширина спектра излучения случайного рамановского лазера

$S^{ij}(\delta\mathbf{r})$ – структурная функция пульсаций поля скорости

Le – число Ленерта

ϵ_h – мощность производства спиральности

Список литературы

1. *Ландау Л.Д. Л. Е.* Теоретическая физика, учебное пособие в 10 т., т. VI Гидродинамика, 3е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (736 с.), 1968.
2. *Rott N.* Note on the history of the Reynolds number // Annual review of fluid mechanics. — 1990. — т. 22, № 1. — с. 1—12.
3. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика, часть 1 // книга. — 1976.
4. *Hossain M., Matthaeus W. H., Montgomery D.* Long-time states of inverse cascades in the presence of a maximum length scale // Journal of plasma physics. — 1983. — т. 30, № 3. — с. 479—493.
5. *Kolokolov I., Lebedev V.* Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — т. 809.
6. *Kolokolov I., Ogorodnikov L., Vergeles S.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow // Physical Review Fluids. — 2020. — т. 5, № 3. — с. 034604.
7. *Staley D., Gall R.* Hydrodynamic instability of small eddies in a tornado vortex // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1984. — т. 41, № 3. — с. 422—429.
8. Force balance in rapidly rotating Rayleigh–Bénard convection / A. J. A. Guzmán [и др.] // Journal of fluid mechanics. — 2021. — т. 928. — A16.
9. Flow-and temperature-based statistics characterizing the regimes in rapidly rotating turbulent convection in simulations employing no-slip boundary conditions / A. J. A. Guzmán [и др.] // Physical Review Fluids. — 2022. — т. 7, № 1. — с. 013501.
10. *Schubert G.* Treatise on geophysics. — Elsevier, 2015.

11. *Митрофанова О. В., Подзоров Г. Д., Токарев Ю. Н.* Моделирование магнитогидродинамических эффектов при генерации крупномасштабных вихреобразований в жидкометаллическом теплоносителе // Теплофизика высоких температур. — 2015. — т. 53, № 3. — с. 430—440.
12. *Рачков В. И., Сорокин А. П., Жуков А. В.* Теплогидравлические исследования жидкометаллических теплоносителей в ядерных энергетических установках // Теплофизика высоких температур. — 2018. — т. 56, № 1. — с. 121—136.
13. *Колмогоров А.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады Академии Наук. — 1941. — т. 30, вып. 4. — с. 299—303.
14. *Boffetta G., Ecke R. E.* Two-dimensional turbulence // Annual review of fluid mechanics. — 2012. — т. 44. — с. 427—451.
15. *Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1967. — т. 10, № 7. — с. 1417—1423.
16. *Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // Journal of fluid mechanics. — 1986. — т. 170. — с. 139—168.
17. *Kolokolov I., Lebedev V.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box // Physical Review E. — 2016. — т. 93, № 3. — с. 033104.
18. *Mory M., Hopfinger E.* Structure functions in a rotationally dominated turbulent flow // The Physics of fluids. — 1986. — т. 29, № 7. — с. 2140—2146.
19. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence / M. Chertkov [и др.] // Physical review letters. — 2007. — т. 99, № 8. — с. 084501.
20. *Leith C. E.* Diffusion approximation for two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1968. — т. 11, № 3. — с. 671—672.
21. *Batchelor G. K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1969. — т. 12, № 12. — с. II—233.
22. *Seshasayanan K., Alexakis A.* Condensates in rotating turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — т. 841. — с. 434—462.

23. *Xia H., Shats M., Falkovich G.* Spectrally condensed turbulence in thin layers // *Physics of Fluids*. — 2009. — т. 21, № 12. — с. 125101.
24. *Orlov A. V., Brazhnikov M. Y., Levchenko A. A.* Large-scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence // *JETP Letters*. — 2018. — т. 107, № 3. — с. 157–162.
25. *Халатов А.* Теория и практика закрученных потоков./Халатов АА АН УССР, Институт технической теплофизики, Киев: Наук. — 1989.
26. *Должанский Ф. В., Крымов В., Манин Д. Ю.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // *Успехи физических наук*. — 1990. — т. 160, № 7. — с. 1–47.
27. *Proudman J.* On the motion of solids in a liquid possessing vorticity // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. — 1916. — т. 92, № 642. — с. 408–424.
28. *Cavallini F., Crisciani F.* Quasi-geostrophic theory of Oceans and atmosphere: topics in the dynamics and thermodynamics of the Fluid Earth. т. 45. — Springer Science & Business Media, 2012.
29. *Godefert F. S., Moisy F.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results // *Applied Mechanics Reviews*. — 2015. — т. 67, № 3.
30. *Starr V. P.* Physics of negative viscosity phenomena. — 1968.
31. Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment / А. Campagne [и др.] // *Physics of Fluids*. — 2014. — т. 26, № 12. — с. 125112.
32. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment / А. Campagne [и др.] // *Physical Review E*. — 2015. — т. 91, № 4. — с. 043016.
33. *Гандин Л. С.* Объективный анализ метеорологических полей. — Гидрометеоиздат Ленинград, 1963.
34. *Frehlich R., Sharman R.* Estimates of turbulence from numerical weather prediction model output with applications to turbulence diagnosis and data assimilation // *Monthly Weather Review*. — 2004. — т. 132, № 10. — с. 2308–2324.

35. *Frehlich R., Kelley N.* Measurements of wind and turbulence profiles with scanning Doppler lidar for wind energy applications // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. — 2008. — т. 1, № 1. — с. 42–47.
36. *Zeldovich I. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D.* Magnetic fields in astrophysics // New York. — 1983. — т. 3.
37. *Moffatt H. K.* Field generation in electrically conducting fluids // Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne. — 1978. — т. 2. — с. 5–1.
38. *Rincon F.* Dynamo theories // Journal of Plasma Physics. — 2019. — т. 85, № 4.
39. *Tobias S.* The turbulent dynamo // Journal of fluid mechanics. — 2021. — т. 912.
40. *Jones C. A.* Planetary magnetic fields and fluid dynamos // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — т. 43. — с. 583–614.
41. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth’s core / N. Schaeffer [и др.] // Geophysical Journal International. — 2017. — т. 211, № 1. — с. 1–29.
42. *Subramanian K.* From primordial seed magnetic fields to the galactic dynamo // Galaxies. — 2019. — т. 7, № 2. — с. 47.
43. *Rüdiger G., Hollerbach R.* The magnetic universe: geophysical and astrophysical dynamo theory. — John Wiley & Sons, 2006.
44. *Moffatt H., Tsinober A.* Helicity in laminar and turbulent flow // Annual review of fluid mechanics. — 1992. — т. 24, № 1. — с. 281–312.
45. *Parker E. N.* Hydromagnetic dynamo models. // The Astrophysical Journal. — 1955. — т. 122. — с. 293.
46. *Parker E. N.* The Formation of Sunspots from the Solar Toroidal Field. // The astrophysical journal. — 1955. — т. 121. — с. 491.
47. *Zeldovich Y. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D.* The almighty chance. — World Scientific, 1990.

48. Simulations of the small-scale turbulent dynamo / A. A. Schekochihin [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2004. — т. 612, № 1. — с. 276.
49. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment / P. Frick [и др.] // Magnetohydrodynamics. — 2002. — т. 38, № 1/2. — с. 143—162.
50. SPECIFIC FEATURES OF LIQUID METAL HEAT TRANSFER IN A ТОКАМАК РЕАКТОР. / I. Belyaev [и др.] // Magnetohydrodynamics (0024-998X). — 2013. — т. 49.
51. Пульсации температуры в МГД-потоке жидкого металла в горизонтальной неоднородно обогреваемой трубе / И. А. Беляев [и др.] // Теплофизика высоких температур. — 2015. — т. 53, № 5. — с. 773—781.
52. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1985. — т. 4, № 0. — с. 179—277.
53. *Zakharov V. E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1968. — т. 9, № 2. — с. 190—194.
54. *Sulem C., Sulem P.-L.* The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse. т. 139. — Springer Science & Business Media, 2007.
55. *Akhmediev N., Ankiewicz A.* Dissipative solitons in the complex Ginzburg-Landau and Swift-Hohenberg equations // Dissipative solitons. — Springer, 2005. — с. 1—17.
56. Optical wave turbulence: Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics / A. Picozzi [и др.] // Physics Reports. — 2014. — т. 542, № 1. — с. 1—132.
57. Random distributed feedback fibre lasers / S. K. Turitsyn [и др.] // Physics reports. — 2014. — т. 542, № 2. — с. 133—193.
58. *Boltzmann L.* Weitere studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen // Kinetische Theorie II. — Springer, 1970. — с. 115—225.
59. *Boltzmann L.* On certain questions of the theory of gases // Nature. — 1895. — т. 51, № 1322. — с. 413—415.

60. *Peierls R.* Zur kinetischen theorie der wärmeleitung in kristallen // Annalen der Physik. — 1929. — т. 395, № 8. — с. 1055—1101.
61. *Zakharov V. E.* Turbulence in integrable systems // Studies in Applied Mathematics. — 2009. — т. 122, № 3. — с. 219—234.
62. Wave kinetics of random fibre lasers / D. V. Churkin [и др.] // Nature communications. — 2015. — т. 6, № 1. — с. 1—6.
63. *Walczak P., Randoux S., Suret P.* Optical rogue waves in integrable turbulence // Physical review letters. — 2015. — т. 114, № 14. — с. 143903.
64. *Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation // Physics of Fluids. — 2022.
65. *Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Alpha-effect in three-dimensional coherent vortex of conducting liquid // arXiv preprint arXiv:2212.04230. — 2022.
66. *Ogorodnikov L., Vergeles S.* Intensity statistics in a long random fiber Raman laser // Optics letters. — 2018. — т. 43, № 4. — с. 651—654.
67. *Parfenyev V. M., Vergeles S. S.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow // Physics of Fluids. — 2021. — т. 33, № 11. — с. 115128.
68. *Owen P. R.* The Theory of Hydrodynamic Stability, by C. C. LIN. Cambridge University Press, 1955. 155 pp. 22s. 6d. or // Journal of Fluid Mechanics. — 1956. — т. 1, № 3. — с. 349—352. — DOI: 10.1017/S0022112056210202.
69. *IORDANSKTI S., KULIKOVSKTI A.* The Absolute Stability of Some Plane Parallel Flows at High Reynolds Numbers // SOVIET PHYSICS JETP. — 1966. — т. 22, № 4.
70. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов [и др.]. — Гостехиздат, 1951.
71. *Колмогоров А.* К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // ДАН СССР. — 1941. — т. 31, № 6. — с. 538—541.
72. *И. С. Л.* Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. — 1944. — т. 42, № 3. — с. 121—124.

73. *Обухов А.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Докл. ан сср. т. 32. — 1941. — с. 22—24.
74. *Забабалин Е.* Кумуляция и неустойчивость // Сборник научных статей, изд-во РФЯЦ ВНИИТФ, Снежинск. — 1998. — с. 110.
75. Гидравлическая модель цилиндрической имплозии / С. В. Бондаренко [и др.] // Физическое образование в ВУЗах. — 2016. — т. 22, № 2. — с. 85—94.
76. *Козырев А. С.* Газодинамический термоядерный синтез=. — 2005.
77. О термоядерном синтезе при взрыве сферического заряда (проблема газодинамического термоядерного синтеза) / Н. А. Попов [и др.] // Успехи физических наук. — 2008. — т. 178, № 10. — с. 1087—1094.
78. Техника и технологии нанесения покрытий / В. Фролов [и др.]. — 2008.
79. *Taylor G. I.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1950. — т. 201, № 1065. — с. 192—196.
80. *Masson A., Nykyri K.* Kelvin–Helmholtz instability: Lessons learned and ways forward // Space Science Reviews. — 2018. — т. 214, № 4. — с. 1—18.
81. *Климонтович Ю. Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. — УРСС, 2007.
82. *Chillà F., Schumacher J.* New perspectives in turbulent Rayleigh–Bénard convection // The European Physical Journal E. — 2012. — т. 35. — с. 1—25.
83. *Фрик П.* Турбулентность: методы и подходы: курс лекций // Пермский гос. техн. ун-т. — 1998. — с. 33—37.
84. *Ecke R. E., Shishkina O.* Turbulent rotating rayleigh–bénard convection // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2023. — т. 55. — с. 603—638.
85. *Greenspan H. P.* The theory of rotating fluids. — 1968.
86. *Frisch U., Kolmogorov A. N.* Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov. — Cambridge university press, 1995.
87. *Yule A.* Observations of late transitional and turbulent flow in round jets // Symposium on Turbulent Shear Flows, University Park, Pa. — 1977. — с. 11.

88. *Просвиряков Е. Ю.* Неоднородные крупномасштабные течения вертикально завихренной жидкости: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук: 01.02. 05 : дис. . . . канд. / Просвиряков Евгений Юрьевич. — б. и., 2016.
89. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
90. *Кибеля И., Кочин Н., Розе Н.* Теоретическая гидромеханика. — Рипол Классик, 2013.
91. *Монин А., Яглом А.* Статистическая гидромеханика: теория турбулентности Т. 1, 2 (СПб.: Гидрометеиздат, 1992)[Monin AS, Yaglom AM Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence (Mineola, NY. — 2007.
92. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика // М: Наука. — 1986.
93. *Brandenburg A., Subramanian K.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory // Physics Reports. — 2005. — т. 417, № 1–4. — с. 1–209.
94. *Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // Успехи физических наук. — 2014. — т. 184, № 3. — с. 313–335.
95. *Казанцев А.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // ЖЭТФ. — 1967. — т. 53, 5 (11). — с. 1806.
96. *Dortu E., Soward A. M.* Mathematical aspects of natural dynamos. — Chapman, Hall/CRC, 2007.
97. *Cowling T. G.* The magnetic field of sunspots // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1933. — т. 94. — с. 39–48.
98. *Braginsky S.* Some recent developments in geodynamo theory // Physics of Fluids B: Plasma Physics. — 1990. — т. 2, № 6. — с. 1446–1449.
99. *Gilbert A. D., Frisch U., Pouquet A.* Helicity is unnecessary for alpha effect dynamos, but it helps // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 1988. — т. 42, № 1/2. — с. 151–161.

100. *Moreau J. J.* Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. — 1961. — т. 252. — с. 2810—2812.
101. *Moffatt H. K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // Journal of Fluid Mechanics. — 1969. — т. 35, № 1. — с. 117—129.
102. Complete measurement of helicity and its dynamics in vortex tubes / M. W. Scheeler [и др.] // Science. — 2017. — т. 357, № 6350. — с. 487—491.
103. *Molinari J., Vollaro D.* Distribution of helicity, CAPE, and shear in tropical cyclones // Journal of the Atmospheric Sciences. — 2010. — т. 67, № 1. — с. 274—284.
104. A solar tornado observed by AIA/SDO: Rotational flow and evolution of magnetic helicity in a prominence and cavity / X. Li [и др.] // The Astrophysical Journal Letters. — 2012. — т. 752, № 2. — с. L22.
105. *Moiseev S., Chkhetiani O.* Helical scaling in turbulence // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1996. — т. 83, № 1. — с. 192—198.
106. *Davidson P.* The dynamics and scaling laws of planetary dynamos driven by inertial waves // Geophysical Journal International. — 2014. — т. 198, № 3. — с. 1832—1847.
107. Internally driven inertial waves in geodynamo simulations / A. Ranjan [и др.] // Geophysical Journal International. — 2018. — т. 213, № 2. — с. 1281—1295.
108. History and results of the Riga dynamo experiments / A. Gailitis [и др.] // Comptes Rendus Physique. — 2008. — т. 9, № 7. — с. 721—728.
109. On the mode of dynamo action in a global large-eddy simulation of solar convection / É. Racine [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2011. — т. 735, № 1. — с. 46.
110. *Batchelor G. K.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1950. — т. 201, № 1066. — с. 405—416.

111. Critical magnetic Prandtl number for small-scale dynamo / A. A. Schekochihin [и др.] // Physical review letters. — 2004. — т. 92, № 5. — с. 054502.
112. *Roberts P. H., Glatzmaier G. A.* Geodynamo theory and simulations // Reviews of modern physics. — 2000. — т. 72, № 4. — с. 1081.
113. Convective heat transfer in planetary dynamo models / E. M. King [и др.] // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. — 2010. — т. 11, № 6.
114. Colloquium: Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos / A. Gailitis [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2002. — т. 74, № 4. — с. 973.
115. In situ measurement of viscosity of liquids in the Fe-FeS system at high pressures and temperatures / D. P. Dobson [и др.] // American Mineralogist. — 2000. — т. 85, № 11/12. — с. 1838—1842.
116. Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment / M. Bourgoïn [и др.] // Physics of Fluids. — 2002. — т. 14, № 9. — с. 3046—3058.
117. *Kulsrud R. M.* A critical review of galactic dynamos // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1999. — т. 37, № 1. — с. 37—64.
118. *Chen F., Rempel M., Fan Y.* Emergence of magnetic flux generated in a solar convective dynamo. I. The formation of sunspots and active regions, and the origin of their asymmetries // The Astrophysical Journal. — 2017. — т. 846, № 2. — с. 149.
119. Experimental observation and characterization of the magnetorotational instability / D. R. Sisan [и др.] // Physical Review Letters. — 2004. — т. 93, № 11. — с. 114502.
120. Modes and instabilities in magnetized spherical Couette flow / A. Figueroa [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — т. 716. — с. 445—469.
121. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility / A. Gailitis [и др.] // Physical Review Letters. — 2000. — т. 84, № 19. — с. 4365.
122. *Stieglitz R., Müller U.* Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo // Physics of Fluids. — 2001. — т. 13, № 3. — с. 561—564.

123. *Moffatt H.* Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — т. 41, № 2. — с. 435—452.
124. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. — Elsevier, 2016.
125. *Molchanov S. A., Ruzmaikin A., Sokolov D. D.* Kinematic dynamo in random flow // Soviet Physics Uspekhi. — 1985. — т. 28, № 4. — с. 307.
126. *Moffatt H.* Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid // Journal of Fluid Mechanics. — 1970. — т. 44, № 4. — с. 705—719.
127. *Brandenburg A., Sokoloff D.* Local and nonlocal magnetic diffusion and alpha-effect tensors in shear flow turbulence // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 2002. — т. 96, № 4. — с. 319—344.
128. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung // Zeitschrift für Naturforschung A. — 1966. — т. 21, № 4. — с. 369—376.
129. *Brandenburg A., Donner K. J.* The dependence of the dynamo alpha on vorticity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1997. — т. 288, № 2. — с. L29—L33.
130. *Rasmussen J. J., Rypdal K.* Blow-up in nonlinear Schrödinger equations-I a general review // Physica Scripta. — 1986. — т. 33, № 6. — с. 481.
131. *Ландау Л. Д., Луфшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — Гос. Изд-Во Физ.-Мат. Лит., 1959.
132. *Garnier J., Lisak M., Picozzi A.* Toward a wave turbulence formulation of statistical nonlinear optics // JOSA B. — 2012. — т. 29, № 8. — с. 2229—2242.
133. Observation of the kinetic condensation of classical waves / C. Sun [и др.] // Nature Physics. — 2012. — т. 8, № 6. — с. 470—474.
134. *Siegman A. E.* Lasers. — University science books, 1986.
135. *Csele M.* Fundamentals of light sources and lasers. — John Wiley & Sons, 2011.

136. Laser action in strongly scattering media / N. M. Lawandy [и др.] // Nature. — 1994. — т. 368, № 6470. — с. 436—438.
137. Random laser action in semiconductor powder / H. Cao [и др.] // Physical Review Letters. — 1999. — т. 82, № 11. — с. 2278.
138. *Wiersma D. S.* The physics and applications of random lasers // Nature physics. — 2008. — т. 4, № 5. — с. 359—367.
139. *Leonetti M., Conti C., Lopez C.* Switching and amplification in disordered lasing resonators // Nature communications. — 2013. — т. 4, № 1. — с. 1—6.
140. Strong interactions in multimode random lasers / H. E. Tureci [и др.] // Science. — 2008. — т. 320, № 5876. — с. 643—646.
141. Co-existence of strongly and weakly localized random laser modes / J. Fallert [и др.] // Nature Photonics. — 2009. — т. 3, № 5. — с. 279—282.
142. Random distributed feedback fibre laser / S. K. Turitsyn [и др.] // Nature photonics. — 2010. — т. 4, № 4. — с. 231—235.
143. *Wyld Jr H.* Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid // Annals of Physics. — 1961. — т. 14. — с. 143—165.
144. *Жаринов В., Владимиров В.* Уравнения математической физики. — Litres, 2018.
145. *Ranz W. E.* Applications of a stretch model to mixing, diffusion, and reaction in laminar and turbulent flows // AIChE Journal. — 1979. — т. 25, № 1. — с. 41—47.
146. Pressure torque of torsional Alfvén modes acting on an ellipsoidal mantle / F. Gerick [и др.] // Geophysical Journal International. — 2020. — т. 222, № 1. — с. 338—351.
147. *Aubert J., Gastine T., Fournier A.* Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — т. 813. — с. 558—593.
148. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow / V. M. Parfenyev [и др.] // Physics of Fluids. — 2021. — т. 33, № 6. — с. 065117.

149. *Moffatt H.* The mean electromotive force generated by turbulence in the limit of perfect conductivity // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1974. — т. 65, № 1. — с. 1—10.
150. *Rädler K.-H.* Mean-field approach to spherical dynamo models // *Astronomische Nachrichten*. — 1980. — т. 301, № 3. — с. 101—129.
151. *Moffatt H. K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids // *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics*. — 1978.
152. *Seshasayanan K., Pétrélis F.* Growth rate distribution and intermittency in kinematic turbulent dynamos: Which moment predicts the dynamo onset? // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2018. — т. 122, № 6. — с. 64004.
153. *Mizerski K. A.* Renormalization group analysis of the magnetohydrodynamic turbulence and dynamo // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2021. — т. 926.
154. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей // *Теория вероятностей и ее приложения*. — 2003. — т. 48, № 2. — с. 211—248.
155. *Wick G.-C.* The evaluation of the collision matrix // *Physical review*. — 1950. — т. 80, № 2. — с. 268.

Список иллюстраций

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Примеры гидродинамических неустойчивостей | 24 |
| 1.2 | Схематическое изображение течения жидкости при конвекции Бенара | 25 |
| 1.3 | Результаты численного счета по исследованию вращающейся конвекции Релея-Бенара | 26 |
| 1.4 | Фотографии торнадо (а) и циклона (b) | 27 |
| 1.5 | Профиль скорости трехмерного когерентного вихря | 32 |
| 2.1 | Разность следа структурной функции и одноточечного коррелятора турбулентных пульсаций трехмерного когерентного геострофического вихря в проекции на горизонтальную плоскость. Синими стрелками показано направление сдвигового течения, оранжевым цветом изображена область, в которой функция $\langle \mathbf{u}^2 \rangle - S^{ii}/2$ наиболее существенна. | 77 |
| 2.2 | Сравнение соответствующих компонент структурных функций $S_{3D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$ и $S_{2D}^{ij}(\delta \mathbf{r}) - \eta\eta$ -компоненты (Рис. 2.2а), $\xi\eta$ -компоненты (Рис. 2.2б) и $\xi\xi$ -компоненты (Рис. 2.2в) – в зависимости от координат ξ и η в случае $\Sigma < 0$ ($\varsigma = -1$). Синим цветом изображены компоненты $S_{2D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$, оранжевым – компоненты $S_{3D}^{ij}(\delta \mathbf{r})$ | 81 |
| 4.1 | График функции распределения интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера при $ K = 0.2$. Слева приведен график для аномальной дисперсии ($\beta_2 < 0$), справа приведен график для нормальной дисперсии ($\beta_2 > 0$). | 108 |
| 4.2 | Диаграмма №1st1 | 111 |
| 4.3 | Диаграмма 111 | 115 |
| 4.4 | Диаграмма №211 | 117 |
| 4.5 | Диаграмма №121 | 119 |
| 4.6 | Диаграмма №212 | 121 |
| 4.7 | Диаграмма №122 | 122 |
| 4.8 | Диаграмма №221 | 124 |

Приложение А

Профиль средней скорости трехмерного когерентного геострфического вихря

Итак, с точностью до числовых коэффициентов коррелятор имеет вид:

$$\langle u^\xi u^\eta \rangle = -\langle u^\rho u^\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \quad (\text{A.1})$$

Тензор напряжений Рейнольдса $\Pi^{\varphi\rho} = \langle u^\rho u^\varphi \rangle - \nu\Sigma = 0$. Отсюда можно определить локальное значение коэффициента сдвига $\Sigma = \pm\Sigma_0 = \pm\sqrt{\epsilon/\nu}$. Знак коэффициента сдвига может определять тип некоторых течений в атмосфере. В частности, антициклону соответствует положительная величина коэффициента сдвига, циклону – отрицательная [148].

По величине сдвига восстанавливаем профиль скорости, вспоминая определение сдвига:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{\rho} &= \partial_\rho \left(\frac{U}{\rho} \right); \\ \frac{U}{\rho} - \frac{U(\rho_0)}{\rho_0} &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\Sigma}{\rho'} d\rho' \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

В качестве ρ_0 выберем масштаб R_u , на котором $U(R_u) = 0$.

$$U(\rho) = -\Sigma\rho \ln \left(\frac{R_u}{\rho} \right) = \mp\Sigma_0\rho \ln \left(\frac{R_u}{\rho} \right) \quad (\text{A.3})$$

Приложение Б

Подробное вычисление элементов $\hat{\alpha}$

Выпишем выражение для произвольного элемента безразмерной матрицы β_{ip} :

$$\beta_{ip} \approx \tau_{\Omega}^{-3} \int (d^3 k) k \chi(k) \int_0^{\infty} d\tau \frac{k'^2(\tau) k'_i(\tau) k'_p(\tau)}{k_z^2 + (k'^3(\tau)/\tau_{\Omega}^3)^2} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (\text{Б.1})$$

Отметим, что вязкая экспонента $\Gamma(\tau)$ в подынтегральном выражении (Б.1) определяется безразмерным временем τ_* , знаменатель – безразмерным временем τ_{Ω} . Поэтому выражение для элементов β_{ip} зависит от отношения порядка между τ_* и τ_{Ω} . Поскольку это отношение порядка зависит от значений безразмерных чисел Россби Ro и магнитного числа Прандтля Pr_m как $\tau_*/\tau_{\Omega} \sim (\text{Ro}/\text{Pr}_m)^{1/3}$, выражение для элементов β_{ip} существенно зависит от отношения порядка между Pr_m и Ro . Произведем интегрирование в импульсном пространстве. Для упрощения дальнейших вычислений отметим, что данная матрица симметрична: $\beta_{ip} = \beta_{pi}$. Кроме того, элементы $\beta_{z\xi} = \beta_{z\eta} = 0$ обращаются в ноль в силу нечетности подынтегрального выражения (Б.1) по k_z . Отметим, что диагональные и недиагональные элементы $\hat{\alpha}$ необходимо вычислять по-разному. Любой диагональный элемент вида ii будет знакоположительным, поскольку в числителе будет содержаться $k_i'^2(\tau)$. Единственный ненулевой недиагональный элемент, $\beta_{\xi\eta}$, содержит в числителе произведение $k_{\xi} k'_{\eta}(\tau)$, знак которого меняется в зависимости от τ . Поэтому ряд рассуждений, используемых для анализа знакопостоянных интегралов, неприменимы для $\beta_{\xi\eta}$.

Отметим, что для всех элементов матрицы (Б.1) интеграл по k_{η} набирается на масштабах $k_{\eta} \sim 1$ за счет вида функции $\chi(k)$. Однако вид интегралов по переменной k_z и характерный масштаб, на котором они набираются, существенно зависят от соответствующего индекса в выражении для β_{ip} . Так, интеграл по k_z , содержащийся в выражении для элемента β_{zz} , набирается на умеренных масштабах $k_z \sim 1$ для всех допустимых значений параметров задачи, но в плоскости $\xi\eta$ элементы β_{ip} могут определяться малыми k_z при некоторых значениях величин вязкости, магнитной диссипации, угловой скорости вращения и сдвига,

то есть при определенных соотношениях между числом Россби Ro и магнитным числом Прандтля Pr_m . Далее рассмотрим элемент β_{zz} и элементы $\beta_{\xi\xi}$ и $\beta_{\eta\eta}$ по отдельности.

Б.1 Предел относительно малой магнитной диффузии $\kappa k_f^2 \ll \Omega$

zz-элемент матрицы α -эффекта. zz-элемент нормированной матрицы α -эффекта β_{zz} будет иметь следующий вид:

$$\beta_{zz} \sim \tau_\Omega^{-3} \int_1^\infty d\tau \tau^2 \int (dq_\xi) q_\xi^2 \int_{\text{Ro}}^\infty \frac{(dq_z) q_z^2}{q_z^2 + (q_\xi \tau / \tau_\Omega)^6} \int (dq_\eta) q \chi(q) e^{-\Gamma(\tau)} \quad (\text{Б.2})$$

Интеграл по k_z набирается на масштабах $k_z \sim 1$ и оказывается порядка 1. Кроме того, после интегрирования возникает ограничение на область переменной $k_\xi \lesssim \tau_\Omega / \tau$, где набирается интеграл. За счет вязкой экспоненты есть также условие $k_\xi \lesssim (\tau_* / \tau)^{3/2}$. Вследствие этого интегрирование по переменным k_ξ и τ существенно зависит от отношения порядка между τ_* и τ_Ω .

В пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ (что соответствует случаю $\tau_* \ll \tau_\Omega$) интеграл набирается на $\tau \sim \tau_*$ и $q_\xi \sim (\tau_* / \tau)^{3/2}$. Подынтегральное выражение имеет вид $\sim \tau_\Omega^{-3} \tau^2 \cdot 1 \cdot 1 \sim \tau^2 / \tau_\Omega^3$ при $\tau \lesssim \tau_*$ после интегрирования по q_ξ , q_η и q_z . На временах $\tau \gtrsim \tau_*$ оно быстро убывает со временем как $\sim \sqrt{\tau_*^9 / (\tau^5 \tau_\Omega^6)}$. Поэтому zz-элемент в пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ имеет вид

$$\beta_{zz} \sim \frac{\tau_*^3}{\tau_\Omega^3} \sim \frac{\text{Ro}}{\text{Pr}_m} \quad (\text{Б.3})$$

В противоположном пределе $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$ интеграл набирается на $q_\xi \sim \tau_\Omega / \tau$ и $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3 / \tau_\Omega^2$. Подынтегральное выражение имеет вид $\sim \tau^2 / \tau_\Omega^3$ на временах $\tau \lesssim \tau_\Omega$, затем медленно убывает как $\sim 1/\tau$ при $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3 / \tau_\Omega^2$, после чего быстро падает как $\sim \sqrt{\tau_*^9 / (\tau^5 \tau_\Omega^6)}$ при $\tau \gtrsim \tau_*^3 / \tau_\Omega^2$ после интегрирования по всем компонентам волновых векторов. Поэтому основной вклад в интеграл

имеет логарифмическое поведение:

$$\beta_{zz} \sim \ln \left(\frac{\text{Ro}}{\text{Pr}_m} \right) \quad (\text{Б.4})$$

Таким образом, в данном подразделе посчитан zz -элемент матрицы α -эффекта при различных значениях числа Россби и магнитного числа Прандтля.

Диагональные элементы матрицы α -эффекта в плоскости $\xi\eta$ Вычислим диагональные элементы тензора в плоскости $\xi\eta$. Каждый такой элемент β_{ip} имеет следующий вид:

$$\beta_{ip} \sim \tau_\Omega^{-3} \int_1^\infty d\tau \tau^{2+n_{ip}} \int_{1/\tau}^\infty (dq_\xi) q_\xi^4 \int_{\Sigma/\Omega}^\infty \frac{(dq_z)}{q_z^2 + (q_\xi \tau / \tau_\Omega)^6} \int (dq_\eta) q \chi(q) e^{-\Gamma}, \quad (\text{Б.5})$$

где $n_{\eta\eta} = 2$, $n_{\xi\xi} = 0$. Интеграл по переменной k_z набирается на $q_z \sim (q_\xi \tau / \tau_\Omega)^3$, если $(q_\xi \tau / \tau_\Omega)^3 \gtrsim |\Sigma|/\Omega$, и на нижнем пределе $q_z \sim |\Sigma|/\Omega$, когда $(q_\xi \tau / \tau_\Omega)^3 \lesssim |\Sigma|/\Omega$. Введем также безразмерное отношение $\tau_\Sigma = (|\Sigma|/\kappa k_f^2)^{1/3} = (\text{RoPr}_m/\text{Ek})^{1/3}$, $\tau_\Sigma \ll \tau_*$, $\tau_\Sigma \ll \tau_\Omega$. Отметим, что на временах $\tau \ll \tau_\Sigma$ интеграл по q_z набирается на масштабах $q_z \sim (q_\xi \tau / \tau_\Omega)^3 \ll \text{Ro}$, что соответствует квазидвумерному сектору, где развитая ранее теория трехмерных геострофических когерентных вихрей неприменима. Можно убедиться, что формальный вклад в (Б.5) от времен $\tau \lesssim \tau_\Sigma$ остается пренебрежимо малым, что находится в согласии с нашими вычислениями.

Сначала вычислим $\beta_{\eta\eta}$. В пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ (т.е. $\tau_* \ll \tau_\Omega$). В этом пределе интеграл (Б.5) определяется волновыми векторами $q_\xi \sim 1$, $q_z \sim (\tau_*/\tau_\Omega)^3$ и временами $\tau \sim \tau_*$ соответственно. Отметим, что характерные $q_z \sim \text{Ro}/\text{Pr}_m \gg \text{Ro}$ таковы, что при них влияние инерционных волн остается существенным. Подынтегральное выражение меняется со временем как $\sim \tau^2$ при $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_*$ и $\sim \tau_*^3/\tau^2$ на временах $\tau \gtrsim \tau_*$ после интегрирования по всем компонентам волновых векторов. Таким образом, $\beta_{\eta\eta} \sim \tau_*^2$ в этом пределе.

В противоположном пределе, $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$, основной вклад в интеграл определяется масштабами $q_z \sim 1$, $q_\xi \sim \tau_\Omega/\tau$ и $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3/\tau_\Omega^2$. При этих волновых векторах и временах вязкая экспонента имеет вид $\Gamma \sim q_\xi^2 (\tau/\tau_*)^3 \sim \tau_\Omega^2 \tau / \tau_*^3$. Подынтегральное выражение зависит от времени как $\sim \tau$ на временах

$\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_\Omega$, как $\sim \tau_\Omega^2/\tau$ при $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3/\tau_\Omega^2$ и как $\sim \tau_*^3/\tau^2$ на больших временах после интегрирования по всем компонентам волновых векторов. Можно убедиться, что основной вклад определяется масштабами $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3/\tau_\Omega^2$, что приводит к появлению логарифмического множителя: $\beta_{\eta\eta} \sim \tau_\Omega^2 \ln(\tau_*^3/\tau_\Omega^3)$.

Далее вычислим $\beta_{\xi\xi}$. В обоих пределах интеграл определяется волновыми векторами $q_{\eta,\xi} \sim 1$, так что он может быть переписан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta_{\xi\xi} &\sim \tau_\Omega^{-3} \int_1^\infty d\tau \tau^2 \int_{\text{Ro}}^1 \frac{dq_z}{q_z^2 + (\tau/\tau_\Omega)^6} \mathcal{G}\left(\frac{\tau_*}{\tau}\right) = \\ &= \int_1^\infty \frac{d\tau \tau^2}{\tau^3} \left(\arctan\left(\frac{\tau_\Omega^3}{\tau^3}\right) - \arctan\left(\frac{\tau_\Sigma^3}{\tau^3}\right) \right) \mathcal{G}\left(\frac{\tau_*}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

где функция $\mathcal{G}\left(\frac{\tau_*}{\tau}\right) \sim 1$ при $\tau \lesssim \tau_*$ и ведет себя как степенная с положительным показателем при $\tau \gtrsim \tau_*$. Сначала рассмотрим предел $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ (т.е. $\tau_* \ll \tau_\Omega$). В этом пределе интеграл набирается на $q_\xi \sim 1$, $q_z \sim (\tau/\tau_\Omega)^3$ и $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_*$ соответственно. Подынтегральное выражение зависит от времени как $\sim 1/\tau$ при $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_*$ и убывает ещё быстрее за счет влияния вязкой экспоненты на временах $\tau \gtrsim \tau_*$ после интегрирования по всем компонентам волновых векторов. Отметим, что подынтегральное выражение для $\xi\xi$ -элемента зависит от времени как $\sim 1/\tau$, что приводит к логарифмическому поведению:

$$\beta_{\xi\xi} \sim \ln(\tau_*/\max\{1, \tau_\Sigma\}) \sim \frac{1}{3} \ln(\min\{\text{Ro}/\text{Ek}, \text{Pr}_m^{-1}\}) \quad (\text{Б.7})$$

В противоположном пределе, $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$, $\xi\xi$ -элемент определяется волновыми векторами $q_\xi \sim 1$, $q_z \sim (\tau/\tau_\Omega)^3$ и временами $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_\Omega$. После интегрирования по всем компонентам волновых векторов подынтегральное выражение в $\xi\xi$ -элементе меняется со временем как $\sim 1/\tau$ при $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_\Omega$, $\sim \tau_\Omega^3/\tau^4$ на временах $\tau_\Omega \lesssim \tau \lesssim \tau_*$ и затем убывает ещё быстрее на больших временах за счет влияния вязкой экспоненты. Поэтому в пределе $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$ (т.е. $\tau_* \gg \tau_\Omega$) $\xi\xi$ -элемент определяется временами $\max\{1, \tau_\Sigma\} \lesssim \tau \lesssim \tau_\Omega$ и имеет следующий вид:

$$\beta_{\xi\xi} \sim \ln(\tau_\Omega / \max\{1, \tau_\Sigma\}) \sim \frac{1}{3} \ln(\min\{\text{Pr}_m/\text{Ek}, \text{Ro}^{-1}\}) \quad (\text{Б.8})$$

Недиагональные элементы $\hat{\alpha}$. Отдельно вычислим недиагональный элемент $\xi\eta$ матрицы (Б.1), который содержит под интегралом знакопеременную функцию времени. Поэтому сначала необходимо взять интеграл по времени τ по частям. Рассмотрим часть выражения $\beta_{\xi\eta}$, зависящую от времени τ , и проведем интегрирование по нему:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau \frac{q_\xi q'_\eta q'^2}{(q'/\tau_\Omega)^6 + q_z^2} e^{-\Gamma} &= \frac{-\varsigma\tau_\Omega^4}{2q_z^{2/3}} \int_0^\infty dF(X') e^{-\Gamma} = \\ &= \frac{\varsigma\tau_\Omega^4}{2q_z^{2/3}} \left\{ F(X) - \int_0^\infty \frac{d\tau q'^2}{\tau_*^3} F(X') e^{-\Gamma} \right\}, \quad (\text{Б.9}) \end{aligned}$$

где $X' = q'^2/(\tau_\Omega^2 q_z^{2/3})$, $X = q^2/(\tau_\Omega^2 q_z^{2/3})$, производная $F'(X)$ равна дроби перед экспонентой в (Б.9), а сама функция $F(X)$ имеет вид

$$F(X) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{arctg} \left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{X^2 - X + 1}{(X+1)^2} \right) \quad (\text{Б.10})$$

Функция $F(X)$ стремится к $F(\infty) = \pi\sqrt{3}/6$ при $X \gg 1$. Отметим, что $F(\infty) = -3F(0)$. В силу того, что $q^2 \lesssim 1 \ll \tau_\Omega$ и что α -эффект определяется волновыми векторами из сектора быстрых осцилляций ($q_z/q \gtrsim \text{Ro}$), можно положить аргумент X в первом слагаемом равным нулю:

$$\frac{\varsigma\tau_\Omega^6}{2\tau_*^3} \int_0^\infty d\tau X' e^{-\Gamma} (F(0) - F(X')) \quad (\text{Б.11})$$

Поскольку функция $F(X')$ является монотонно возрастающей, подынтегральное выражение (Б.11) знакоопределено и отрицательно. Поэтому недиагональный элемент $\beta_{\xi\eta}$ также отрицателен в обоих случаях.

Зависящая от времени часть интеграла определяется вязкой экспонентой Γ , то есть набирается на временах $\tau \sim \tau_*$. Интегралы по компонентам волновых векторов $q_{\xi,\eta}$ определяются масштабами $q_{\xi,\eta} \sim 1$ за счет корреляционной

функции $\chi(q)$. Эта функция также накладывает ограничение на вертикальную компоненту волнового вектора $|q_z| \lesssim 1$. При интегрировании по последней переменной q_z удобно сделать замену переменной $X^* = \tau_*^2 / (\tau_\Omega^2 q_z^{2/3})$:

$$\beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma\tau_* \int_{(\text{Ro}/\text{Pr}_m)^{2/3}}^{\infty} \frac{dX^*}{X^{*3/2}} (F(X^*) - F(0)) \quad (\text{B.12})$$

Отметим, что выражение в скобках строго положительно. При $X^* \ll 1$ подынтегральное выражение имеет вид $\sim \sqrt{X^*}/2$, а при $X^* \gg 1$ оно ведет себя как $\sim (-4F(0))/X^{*3/2}$.

В пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ нижний предел интеграла (B.12) мал, так что сам интеграл набирается на $X^* \sim 1$ и оказывается порядка единицы. Поэтому недиагональный элемент оказывается порядка $\beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma\tau_*$.

В пределе $\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$ нижний предел большой, и именно он определяет интеграл (B.12), который порядка

$$\beta_{\xi\eta} \sim \frac{\varsigma\tau_*F(0)}{\sqrt{(\text{Ro}/\text{Pr}_m)^{2/3}}} \quad (\text{B.13})$$

Таким образом, в этом пределе недиагональный элемент $\xi\eta$ оказывается порядка $\beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma\tau_\Omega$.

Таким образом, в пределе $\tau_* \ll \tau_\Omega$ ($\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$) имеем

$$\beta_{zz} \sim \frac{\text{Ro}}{\text{Pr}_m}, \quad \beta_{\eta\eta} \sim \tau_*^2, \quad \beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma\tau_*, \quad \beta_{\xi\xi} \sim -\ln(\text{Pr}_m(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|)) \quad (\text{B.14})$$

В противоположном пределе $\tau_* \gg \tau_\Omega$ ($\text{Ro} \gg \text{Pr}_m$) получаем

$$\beta_{zz} \sim \ln\left(\frac{\text{Ro}}{\text{Pr}_m}\right), \quad \beta_{\eta\eta} \sim \tau_\Omega^2 \ln\left(\frac{\tau_*}{\tau_\Omega}\right), \quad \beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma\tau_\Omega, \\ \beta_{\xi\xi} \sim -\ln(\text{Ro}(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|)) \quad (\text{B.15})$$

Б.2 Предел относительно большой магнитной диффузии $\kappa k_f^2 \gg \Omega$

Рассмотрим случай $\Omega \ll \kappa k_f^2$ (что соответствует случаю $\tau_\Omega \ll 1$ или $\text{Ek} \gg \text{Pr}_m$).

$$\beta_{ip} \sim \tau_\Omega^{-3} \int_0^\infty d\tau \int (d^3q) q \chi(q) \frac{q'_i q'_p q'^2}{q_z^2 + (q'/\tau_\Omega)^6} e^{-\Gamma(\tau)} \quad (\text{Б.16})$$

Исследуем поведение подынтегрального выражения на больших временах $\tau \gg 1$. Поскольку $\tau_\Omega \ll 1$ и $q_z^2 \leq q'^2$, слагаемым q_z^2 в знаменателе можно пренебречь:

$$\beta_{ip} \sim \tau_\Omega^3 \int_0^\infty d\tau \int (d^3q) \frac{q \chi(q) q'_i q'_p}{q'^4} e^{-\Gamma} \quad (\text{Б.17})$$

Для всех диагональных элементов подынтегральная функция знакопостоянная, интеграл по переменным q_η и q_z набирается на масштабах $q_{\eta,z} \sim 1$. Сначала вычислим zz -элемент. Основной вклад в интеграл набирается при $q'(\tau) \sim 1$, что соответствует $q_\xi \sim 1/\tau$. Тогда зависящая от времени часть подынтегрального выражения имеет вид $\sim 1/\tau$ на временах $1 \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3$, что приводит к возникновению логарифмического множителя в выражении для β_{zz} . Отметим, что верхний предел написанного выше временного диапазона определяется показателем экспоненты Γ и соответствует “вязким временам” [64]. Похожие результаты могут быть получены для $\beta_{\eta\eta}$: он также набирается на $q_\xi \sim 1/\tau$ и $1 \lesssim \tau \lesssim \tau_*^3$ и равен величине того же порядка: $\beta_{\eta\eta} \sim \beta_{zz} \sim \tau_\Omega^3 \ln \tau_*$. Основной вклад в $\beta_{\xi\xi}$ определяется масштабами $q_\xi \sim 1$ и $\tau \sim 1$. Поэтому $\beta_{\xi\xi} \sim \tau_\Omega^3$.

Недиагональный элемент $\beta_{\xi\eta}$ будет иметь следующий вид:

$$\beta_{\xi\eta} \sim \tau_\Omega^3 \int (d^3q) q \chi(q) \int_0^\infty d\tau \frac{q_\xi q'_\eta}{q'^4} e^{-\Gamma} \quad (\text{Б.18})$$

Подынтегральная функция знакопеременная, поэтому сначала удобно произвести интегрирование по частям по переменной времени τ :

$$\int_0^{\infty} d\tau \frac{q_{\xi} q'_{\eta}}{q'^4} e^{-\Gamma} = -\frac{\varsigma}{2} \int \frac{dq'^2}{q'^4} e^{-\Gamma} = \frac{\varsigma}{2} \left\{ -\frac{1}{q^2} + \tau_*^{-3} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\Gamma} \right\} \quad (\text{Б.19})$$

Интеграл будет набираться на временах $\tau \sim 1$. Поэтому

$$\beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma \tau_{\Omega}^3 \int (d^3q) \frac{\chi(q)}{q} \sim -\varsigma \tau_{\Omega}^3 \quad (\text{Б.20})$$

Итак, в пределе $E_k \gg P_{r_m}$ получаем:

$$\beta_{zz} \sim \beta_{\eta\eta} \sim \tau_{\Omega}^3 \ln \tau_*, \quad \beta_{\xi\eta} \sim -\varsigma \tau_{\Omega}^3, \quad \beta_{\xi\xi} \sim \tau_{\Omega}^3 \quad (\text{Б.21})$$

Приложение В

Вычисление поправки к куртозису в пределе малого усиления

В.1 Анализ первого выражения

Рассмотрим выражение (4.59) более подробно и исследуем его в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Данное выражение не имеет особенностей, и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ оно стремится к конечному значению. Предстоит выяснить, на каких частотах это конечное значение набирается. Отметим, что операция взятия предела и интегрирования не коммутируют. В первом выражении есть два вклада, содержащие множители вида

$$\frac{\epsilon^2}{(\epsilon^2 + f_1^2)(\epsilon^2 + f_2^2)} \text{ и } \frac{f_1 f_2}{(\epsilon^2 + f_1^2)(\epsilon^2 + f_2^2)} \quad (\text{В.1})$$

соответственно. Каждый из этих вкладов набирается на различных диапазонах частот. Вычислим каждый из них отдельно.

0). Отдельно рассмотрим диапазон малых частот ($\omega_i \sim \sqrt{\epsilon}$, $i = 0, 2, 3$).

Отметим, что при малых частотах выражение (4.59) переписывается в виде:

$$16 (\gamma \bar{I} L_D)^2 \int (d\omega_1) f^4(\omega_1) \int (d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \left(\frac{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} - 2 \frac{8\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \right) \quad (\text{В.2})$$

Выражение (В.2) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{16}{\sqrt{\epsilon}} (\gamma \bar{I} L_D)^2 \int (d\omega_1) f^4(\omega_1) (F_1 + F_2 - F_3 + F_4), \quad (\text{В.3})$$

где

$$F_1 = \int (dx_2)(dx_3)(dx) \frac{2}{4 + (x_2^2 - x^2)^2} \frac{2}{4 + (x_3^2 - x^2)^2}; \quad (\text{B.4})$$

$$F_2 = \int (dx_2)(dx_3)(dx) \frac{x_2^2 - x^2}{4 + (x_2^2 - x^2)^2} \frac{x_3^2 - x^2}{4 + (x_3^2 - x^2)^2}; \quad (\text{B.5})$$

$$F_3 = 2 \int (dx_2)(dx_3)(dx) \frac{2}{4 + (x_2^2 - x^2)^2} \frac{4}{16 + (x_3^2 - x^2)^2}; \quad (\text{B.6})$$

$$F_4 = 2 \int (dx_2)(dx_3)(dx) \frac{x_2^2 - x^2}{4 + (x_2^2 - x^2)^2} \frac{x_3^2 - x^2}{16 + (x_3^2 - x^2)^2}. \quad (\text{B.7})$$

Удобно вычислить сумму $F_1 + F_2$ и разность $F_4 - F_3$ по отдельности:

$$F_1 + F_2 = \sqrt{2}\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right); \quad (\text{B.8})$$

$$F_4 - F_3 = -\frac{8\sqrt{2}\pi^{7/2}}{\Gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)}, \quad (\text{B.9})$$

где $\Gamma(\#)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда по свойству гамма-функции:

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right). \quad (\text{B.10})$$

Вычислим всё выражение целиком:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 - F_3 + F_4 &= \sqrt{2}\pi^{3/2} \left\{ \frac{1}{4}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{4\Gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right)} \left\{ \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^2\left(-\frac{1}{4}\right) - 32\pi^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Кроме того, справедливо следующее равенство:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \pi\sqrt{2} \quad (\text{B.12})$$

В силу соотношений (B.10) и (B.12) последняя скобка в (B.11) будет обращаться в ноль. То есть $F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0$.

Иными словами, установлено, что

$$16 (\gamma \bar{I} L_D)^2 \int (d\omega_1) f^4(\omega_1) \int (d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \left(\frac{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} - 2 \frac{8\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \right) = 0 \quad (\text{B.13})$$

Значит, можно вычесть (B.13) из (4.59) и получить выражение, совпадающее с (4.59). Справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{\omega}) &= f(\omega_1 - \omega_2)f(\omega_1 - \omega_3)f(\omega_1 + \omega)f(\omega_1 - \omega) - f^4(\omega_1) = \\ &= f^2(\omega_1, \omega) \cdot \left[(f(\omega_1 - \omega_2) - f(\omega_1))(f(\omega_1 - \omega_3) - f(\omega_1)) + \right. \\ &\quad \left. + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega_2) - f(\omega_1)) + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega_3) - f(\omega_1)) \right] + (\text{B.14}) \\ &\quad + f^2(\omega_1) \left[(f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1))(f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)) + \right. \\ &\quad \left. + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1)) + f(\omega_1)(f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)) \right] \end{aligned}$$

Представим выражение (B.14) в виде суммы двух слагаемых:

$$\Phi(\vec{\omega}) = f^2(\omega_1, \omega)\Phi_1(\vec{\omega}) + f^2(\omega_1)\Phi_2(\omega, \omega_1) \quad (\text{B.15})$$

Удобно переписать выражения в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{\omega}) &= (f(\omega_1 - \omega_2) - f(\omega_1))(f(\omega_1 - \omega_3) - f(\omega_1)) + \\ &\quad + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega_2) - f(\omega_1)) + \\ &\quad + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega_3) - f(\omega_1)) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\Phi_1(\vec{\omega}) = \Phi_{1a}(\vec{\omega}) + \Phi_{1b}(\vec{\omega}) + \Phi_{1c}(\vec{\omega}) \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega, \omega_1) &= (f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1))(f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)) + \\ &\quad + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Выражение (4.59) запишется в виде

$$\begin{aligned}
S_1 = & 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \Phi(\vec{\omega}) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{8\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \right) \quad (B.19)
\end{aligned}$$

Выражение в скобках можно разделить на два слагаемых, в одном из которых будет сумма дробей с ϵ в числителе, другая – с частотами в числителе.

1). Рассмотрим вклад первого слагаемого. Выделим его из выражения под скобкой:

$$\begin{aligned}
& \frac{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)} \frac{(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \quad (B.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \frac{8\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \rightarrow \\
& \rightarrow 2 \frac{(\omega_2^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)} \frac{(\omega_3^2 - \omega^2)}{((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \quad (B.21)
\end{aligned}$$

Нас интересует предел $\epsilon \rightarrow 0$. Мы применяем преобразование Гильберта здесь аналогично тому, как это было сделано для первого порядка. Можно отбросить ϵ в знаменателе и перейти к вычислению интеграла в смысле главного значения.

Т.о., суммарный вклад от слагаемого, в котором собраны только дроби без ϵ в числителе:

$$\begin{aligned}
S_{1h} = & 3 \cdot 16 \int \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{\Phi(\vec{\omega})}{(\omega_2 - \omega)(\omega_2 + \omega)(\omega_3 - \omega)(\omega_3 + \omega)} = \quad (B.22) \\
= & 3 \int (d\omega)(d\omega_1) f(\omega_1 + \omega) f(\omega_1 - \omega) \left[\int (d\omega_2) \frac{f(\omega_1 - \omega_2)}{(\omega_2 - \omega)(\omega_2 + \omega)} \right]^2
\end{aligned}$$

Единственным вкладом из $\Phi(\vec{\omega}) = f(\omega_1 - \omega)f(\omega_1 + \omega)f(\omega_1 - \omega_2)f(\omega_1 - \omega_3) - f^4(\omega_1)$, который не даст ноль на этапе применения преобразования Гильберта по двум переменным ω_2 и ω_3 будет множитель $f(\omega_1 - \omega)f(\omega_1 + \omega)f(\omega_1 - \omega_2)f(\omega_1 - \omega_3)$ (т.к. преобразование Гильберта от $f^4(\omega_1)$ по любой из переменных $\omega_2, \omega_3, \omega$, т.е. от константы, есть ноль), поэтому в данном подразделе опустим все слагаемые из $\Phi(\vec{\omega})$, кроме этого. Обозначим

$$A = \int (d\omega_2) \frac{f(\omega_1 - \omega_2)}{(\omega_2 - \omega)(\omega_2 + \omega)} \quad (\text{B.23})$$

Учтем, что

$$\frac{1}{(\omega_2 - \omega)(\omega_2 + \omega)} = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{\omega_2 - \omega} - \frac{1}{\omega_2 + \omega} \right]$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} A &= \int (d\omega_2) \frac{1}{2\omega} \left[\frac{f(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_2 - \omega} - \frac{f(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_2 + \omega} \right] = \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\int (d\omega_2) \frac{f(\omega_1 - \omega_2 - \omega)}{\omega_2} - \int (d\omega_2) \frac{f(\omega_1 - \omega_2 + \omega)}{\omega_2} \right] = \\ &= \frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{4\omega} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Тогда вклад от названных выше слагаемых в (4.59) составит

$$\begin{aligned} S_{1h} &= 16 \frac{3}{16} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2 = \\ &= 3 \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

где используется обозначение $f^2(\omega_1, \omega) = f(\omega_1 + \omega)f(\omega_1 - \omega)$. 2). Вычислим вклад от второго слагаемого.

$$\begin{aligned} &\frac{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2\epsilon}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)} \frac{2\epsilon}{(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{8\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \rightarrow \\
& \rightarrow -2 \frac{2\epsilon}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)} \frac{4\epsilon}{((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

Само выражение теперь:

$$\begin{aligned}
S_{1\delta} &= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \Phi(\vec{\omega}) \\
& \left(\frac{4\epsilon^2}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} - \right. \\
& \left. -2 \frac{8\epsilon^2}{(4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)((4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \right) = \\
&= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot \left(f^2(\omega_1, \omega) \int (d\omega_2) \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2} \cdot \right. \\
& \cdot \int (d\omega_3) \left[\frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2} - 2 \frac{4\epsilon}{(4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2} \right] \Phi_1(\vec{\omega}) + \\
& + f^2(\omega_1) \Phi_2(\omega, \omega_1) \int (d\omega_2) \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2} \int (d\omega_3) \cdot \\
& \cdot \left. \left[\frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2} - 2 \frac{4\epsilon}{(4\epsilon)^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2} \right] \right) = Z_1 + Z_2 \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

Вся задача сводится к тому, чтобы научиться считать конструкцию вида

$$W(\omega, \omega_1, \epsilon) = \int (d\omega_2) b(\omega_1, \omega_2, \omega) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2} \quad (\text{B.29})$$

где b - произвольная быстроубывающая функция.

Учтем, что в пределе $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + h(x)^2} = \pi \delta[h(x)] \quad (\text{B.30})$$

Применим соотношение (B.30) для вычисления W :

$$W(\omega, \omega_1, \epsilon) = \int (d\omega_2) b(\omega_1, \omega_2, \omega) \pi \delta(\omega_2^2 - \omega^2) \quad (\text{B.31})$$

$$\delta(\omega_2^2 - \omega^2) = \frac{1}{2|\omega|} [\delta(\omega_2 - \omega) + \delta(\omega_2 + \omega)] \quad (\text{B.32})$$

$$W(\omega, \omega_1, \epsilon) = \frac{1}{4|\omega|} [b(\omega_1, \omega, \omega) + b(\omega_1, -\omega, \omega)] \quad (\text{B.33})$$

$$W(\omega, \omega_1, \epsilon) = W(\omega, \omega_1, 2\epsilon) = W(\omega, \omega_1) \quad (\text{B.34})$$

Отметим, что в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + h(x)^2} - 2 \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + h(x)^2} = -\pi \delta[h(x)] \quad (\text{B.35})$$

Учитывая полученные соотношения, преобразуем сначала первое слагаемое из (B.28). По аналогии с представлением $\Phi_1 = \Phi_{1a} + \Phi_{1b} + \Phi_{1c}$ разобьем данный вклад на сумму трех слагаемых: $Z_1 = \gamma^2 \bar{I}^4 (Z_{1a} + Z_{1b} + Z_{1c}) / (\beta_2^2 \Delta^4)$.

$$\begin{aligned} Z_{1a} &= 16 \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot f^2(\omega_1, \omega) \\ &\quad \left(\frac{1}{4|\omega|} [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)] \right) \\ &\quad \left(-\frac{1}{4|\omega|} [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)] \right) = \quad (\text{B.36}) \\ &= - \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot f^2(\omega_1, \omega) \\ &\quad \left[\frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega} \right]^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{1b} &= 16 \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) f(\omega_1) \left(-\frac{1}{4|\omega|} (1 + 1) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{4|\omega|} [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)] \right) = \quad (\text{B.37}) \\ &= -2 \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) f(\omega_1) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$Z_{1c} = -2 \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) f(\omega_1) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \quad (\text{B.38})$$

После сложения вкладов (B.36-B.38) получим:

$$Z_1 = -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot f^2(\omega_1, \omega) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) + 2f(\omega_1)] \quad (\text{B.39})$$

Найдем также вклад Z_2 :

$$\begin{aligned} Z_2 &= -16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot f^2(\omega_1) \Phi_2(\omega, \omega_1) \frac{-4}{16|\omega|^2} = \\ &= -4 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \frac{f^2(\omega_1)}{\omega^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[(f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1))(f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)) + \right. \\ &\quad \left. + f(\omega_1)(f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)) \right] = \quad (\text{B.40}) \\ &= -4 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1)}{\omega} \frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)}{\omega} + \right. \\ &\quad \left. + f(\omega_1) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \right] \end{aligned}$$

Итак, выражение (В.28) в главном порядке в данном диапазоне частот имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{1\delta} &= -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \cdot f^2(\omega_1, \omega) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \cdot \\
&\quad \cdot [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) + 2f(\omega_1)] - \\
&\quad - 4 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1) \cdot \left[\frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1)}{\omega} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)}{\omega} + f(\omega_1) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \right] = \\
&= -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) \frac{f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) - 2f(\omega_1)}{\omega^2} \cdot \\
&\quad \cdot f^2(\omega_1, \omega) [f(\omega_1 - \omega) + f(\omega_1 + \omega) + 2f(\omega_1)] - \\
&\quad - 4 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega)(d\omega_1) f^2(\omega_1) \cdot \frac{f(\omega_1 - \omega)f(\omega_1 + \omega) - f^2(\omega_1)}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Полученное выражение регулярно и не имеет особенностей.

В.2 Анализ второго выражения

Рассмотрим выражение (4.60) более подробно и исследуем его в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Данное выражение не имеет особенностей, и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ оно стремится к конечному значению. Предстоит выяснить, на каких частотах это конечное значение набирается. Отметим, что операция взятия предела и интегрирования не коммутируют. В первом выражении есть два вклада, содержащие множители вида

$$\frac{\epsilon^2}{(\epsilon^2 + f_1^2)(\epsilon^2 + f_2^2)} \quad \text{и} \quad \frac{f_1 f_2}{(\epsilon^2 + f_1^2)(\epsilon^2 + f_2^2)} \tag{B.42}$$

соответственно. Каждый из этих вкладов набирается на различных диапазонах частот. Вычислим каждый из них отдельно.

0). Отдельно рассмотрим диапазон малых частот ($\omega_i \sim \sqrt{\epsilon}$, $i = 0, 2, 3$).

Данное выражение (4.60) не имеет особенностей, и в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ оно стремится

ся к конечному значению. Предстоит выяснить, на каких частотах это конечное значение набирается.

1). Вычислим сначала только вклад от слагаемых, содержащих множители (B.42) второго типа, то есть дроби без ϵ в числителе. Выражение для этого вклада имеет следующий вид в пределе $\epsilon \rightarrow 0$:

$$S_{2h} = -16 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \frac{f^2(\omega_1, \omega) f(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega)}{\omega^2 \omega_2 \omega_3}. \quad (\text{B.43})$$

$$\cdot \left[f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega)}{2} \right],$$

где используется обозначение $f^2(\omega_1, \omega) = f(\omega_1 + \omega) f(\omega_1 - \omega)$. Вычислим отдельно конструкцию

$$\begin{aligned} & -16 \int (d\omega_2) \frac{1}{\omega_2} \left[f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right] = \\ & = -16 \int (d\omega_2) \left[\frac{f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1)}{\omega_2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) - f(\omega_2 + \omega_1)}{\omega_2} \right] - \\ & -8 \int (d\omega_2) \left[\frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - f(\omega_1 - \omega_2/2)}{\omega_2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) - f(\omega_1 - \omega_2/2)}{\omega_2} \right] = \\ & = -8 \left[\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega) + \tilde{f}(\omega_1) \right] - \\ & -4 \left[-\tilde{f}(\omega_1 + \omega) + \tilde{f}(\omega_1) + \tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1) \right] = \\ & = 12 \left[\tilde{f}(\omega_1 + \omega) - \tilde{f}(\omega_1 - \omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Учитывая (В.44), можно явно показать, что в ноль обращается следующее выражение, похожее на (В.43):

$$\begin{aligned}
& - 16 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \frac{f^2(\omega_1, \omega) f(\omega_1 + \omega_3/2)}{\omega^2 \omega_2 \omega_3} \\
& \left[f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right] = \tag{B.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -12 \int (d\omega_1)(d\omega) \frac{f^2(\omega_1, \omega)}{\omega^2} \int (d\omega_3) \frac{f(\omega_1 + \omega_3/2)}{\omega_3} \cdot \\
& \cdot \left[\tilde{f}(\omega_1 + \omega) - \tilde{f}(\omega_1 - \omega) \right] = 0 \tag{B.46}
\end{aligned}$$

т.к. его подынтегральная функция нечетна по ω . Тогда выражение (В.43) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
S_{2h} & = -16 \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \\
& \frac{f(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega) - f(\omega_1 + \omega_3/2)}{\omega^2 \omega_2 \omega_3} \\
& \left[f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right] \tag{B.47}
\end{aligned}$$

По аналогии с (В.44) находим

$$\int (d\omega_3) \frac{1}{\omega_3} [f(\omega_3/2 + \omega_1 + \omega) - f(\omega_3/2 + \omega_1)] = \tilde{f}(\omega_1 + \omega) - \tilde{f}(\omega_1) \tag{B.48}$$

Таким образом, величина вклада от диаграмм второго типа составляет

$$12 \int (d\omega_1)(d\omega_1) f^2(\omega_1, \omega) \frac{\tilde{f}(\omega_1 + \omega) - \tilde{f}(\omega_1 - \omega)}{\omega} \frac{\tilde{f}(\omega_1 + \omega) - \tilde{f}(\omega_1)}{\omega} \tag{B.49}$$

После симметризации выражения по подынтегральной переменной ω (т.е. после замены $\omega \rightarrow (-\omega)$ и вычисления полусуммы) получаем

$$S_{2h} = 6 \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \cdot \left[\frac{\tilde{f}(\omega_1 - \omega) - \tilde{f}(\omega_1 + \omega)}{\omega} \right]^2 \quad (\text{B.50})$$

2). Вычислим вклад от оставшихся слагаемых. Это слагаемые, содержащие множители (B.42) первого типа, то есть дроби с ϵ в числителе. Само выражение:

$$\begin{aligned} S_{2\delta} = & 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega_2)(d\omega_3)(d\omega) \\ & \left[f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right] \\ & f(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega) f^2(\omega_1, \omega) \frac{4\epsilon^2}{(4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Сделаем сразу же следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega)}{2} = \\ = & [f(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - f(\omega_2 + \omega_1)] - [f(\omega_2 + \omega_1 + \omega) - f(\omega_2 + \omega_1)] + \quad (\text{B.52}) \\ + & \frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - f(\omega_1 - \omega_2/2)}{2} - \frac{f(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) - f(\omega_1 - \omega_2/2)}{2} \end{aligned}$$

Преобразование (B.52) нужно для того, чтобы каждая скобка из (B.52) при взятии интеграла по ω_2 не давала особенностей. Сделаем также преобразование

$$f(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega) = [f(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega) - f(\omega_1 + \omega_3/2)] + f(\omega_1 + \omega_3/2) \quad (\text{B.53})$$

Вся задача сводится к тому, чтобы научиться считать конструкции вида

$$\begin{aligned} A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) &= \int (d\omega_2) b(\omega_2, \omega, \omega_1) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \omega_2^2 \omega^2}, \\ b(\omega_2, \omega_1, \omega) &= f(\omega_1 + \omega_2 + \omega) - f(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Можно показать, что эти конструкции обладают следующим свойством:

$$\int (d\omega_2) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \omega_2^2 \omega^2} b(\alpha\omega_2, \omega_1, \omega) = A_0(\omega, \omega_1, \alpha\epsilon) \quad (\text{B.55})$$

Тогда выражение (B.51) имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{2\delta} &= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \\ &\quad \left[A_0(-\omega, \omega_1, 2\epsilon) - A_0(\omega, \omega_1, 2\epsilon) + \frac{1}{2} A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) - \frac{1}{2} A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) + \int (d\omega_3) \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2} f(\omega_1 + \omega_3/2) \right] = \\ &= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \cdot \\ &\quad \left(\left[A_0(-\omega, \omega_1, 2\epsilon) - A_0(\omega, \omega_1, 2\epsilon) + \frac{1}{2} A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) - \frac{1}{2} A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) \right] \cdot \right. \\ &\quad \cdot A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) + \int (d\omega_3) \frac{2\epsilon}{4\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2} f(\omega_1 + \omega_3/2) \cdot \\ &\quad \left. \cdot \left[A_0(-\omega, \omega_1, 2\epsilon) - A_0(\omega, \omega_1, 2\epsilon) + \frac{1}{2} A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) - \frac{1}{2} A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Проинтегрируем выражение сначала по ω_2 .

Применим соотношение (B.30) для вычисления A_0 :

$$A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) = A_0(\omega, \omega_1, 2\epsilon) = \int (d\omega_2) b(\omega_2, \omega, \omega_1) \pi \delta(\omega_2 \omega) \quad (\text{B.57})$$

$$\delta(\omega_2 \omega) = \frac{1}{|\omega|} \delta(\omega_2) + \frac{1}{|\omega_2|} \delta(\omega) \quad (\text{B.58})$$

$$A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) = \frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)}{2|\omega|} \quad (\text{B.59})$$

$$A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) = \frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1)}{2|\omega|} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) - A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) + \frac{1}{2} (A_0(\omega, \omega_1, \epsilon/2) - A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon/2)) &= \\ = \frac{1}{2} (A_0(-\omega, \omega_1, \epsilon) - A_0(\omega, \omega_1, \epsilon)) &= \frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1 + \omega)}{4|\omega|} \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Таким образом, большая скобка в выражении (В.56) является нечетной функцией ω , значит второе слагаемое в (В.56) равно нулю.

Исходя из полученных результатов, данный вклад в главном порядке по ϵ имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{2\delta} &= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) A_0(\omega, \omega_1, \epsilon) \frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1 + \omega)}{4|\omega|} = (\text{В.62}) \\ &= 16 \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1)(d\omega) f^2(\omega_1, \omega) \frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1)}{2|\omega|} \frac{f(\omega_1 - \omega) - f(\omega_1 + \omega)}{4|\omega|} \end{aligned}$$

После симметризации данного выражения по ω окончательное выражение для данного вклада в пределе $\epsilon \rightarrow 0$:

$$S_{2\delta} = -\frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \int (d\omega_1) \int (d\omega) \left(\frac{f(\omega_1 + \omega) - f(\omega_1 - \omega)}{\omega} \right)^2 f^2(\omega_1, \omega) \quad (\text{В.63})$$