Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

На правах рукописи

Куликов Юрий Матвеевич

Устойчивость и турбулентность течений термовязкой жидкости

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, академик Российской академии наук
Сон Эдуард Евгеньевич

Москва — 2019

Оглавление

Стр.

Введение

Теории устойчивости и турбулентности течений жидкости и газа являются крупными направления классической механики [1; 2]. Их развитие — плод упорного труда десятков исследователей, а также результат применения самых современных экспериментальных техник, математических (аналитических и численных) методов. Теория гидродинамической устойчивости является важной частью гидродинамики и призвана ответить на вопрос о реализуемости того или иного течения в природе или лабораторных условиях. Под воздействием различного рода возмущений может развиться неустойчивость, приводящая к смене «регулярного» [3] режима течения (например, от ламинарного к периодическому или квазипериодическому — [4]) или же к турбулентности, характеризующейся развитым полем завихренности и широким диапазоном пространственных и временных масштабов [1]. В силу своей чрезвычайной распространённости турбулентные течения стали объектом изучения во множестве статей и монографий. Несмотря на количество предложенных концепций (вихревая вязкость [5], длина пути перемешивания [6], модели однородной изотропной турбулентности [7; 8], турбулентного пограничного слоя [9], модель на основе шпильковидных вихревых структур [10; 11], сценарии турбулентного перехода Ландау– Хопфа и Рюэля– Такенса [12], аналогии с динамическими системами и др. [4]), самостоятельной замкнутой теории этого явления построить так и не удалось.

Помимо изучения исключительно гидродинамических эффектов, существенный пласт занимают задачи, связанные с учётом зависимости некоторых материальных коэффициентов среды от температуры, приводящих к взаимодействию течения и температурного поля. В частности, учёт зависимости плотности от температуры позволяет изучить свободную конвекцию в поле объёмных сил [13]. Анализ устойчивости и тепломассопереноса в этой задаче привел к многочисленным плодотворным результатам. Аналогичным образом в задачах высокотемпературной газодинамики крайне важным является учёт температурной зависимости других материальных коэффициентов — теплоемкости и теплопроводности (показателя адиабаты [14]), проявляющих немонотонные свойства в случае развития различных теплофизических процессов — возбуждения внутренних степеней свободы, диссоциации и ионизации.

В этой связи естественным является рассмотрение уединённого влияния вариаций вязкости (вязкой стратификации), возникающих, например, вследствие неоднородности распределения некоторой примеси в течении («активного скаляра» [15]) или температурной зависимости. Очевидно, что зависимость вязкости от температуры свойственна всем жидкостям и газам, тем не менее, можно выделить класс веществ, для которых она оказывается особенно выраженной, — так называемые термовязкие жидкости (ТВЖ) [16]. Определяющим признаком данной группы является существование резкой (зачастую немонотонной) зависимости вязкости жидкости от температуры, проявляющейся в неоднородных температурных полях. Так как вязкость является коэффициентом переноса (импульса), то указанное явление должно проявляться в динамических процессах, таких как сдвиговые течения, течения с развитым конвективным переносом.

К рассматриваемым жидкостям относятся продукты переработки нефти, органические и минеральные масла, жидкая сера [17] и фосфор, растворы полимеров, расплавы силикатов (магматические породы) [18]. Примерами процессов, в которых термовязкие свойства жидкости играют существенную роль являются: движение серы в каналах теплообменников и других технических устройств, движение расплавов горных пород как в приповерхностных слоях мантии [19], так и при извержениях вулканов, течения в маслонаполненном высоковольтном и нагревательном оборудовании, истечение холодной пресной речной воды в теплое озеро или соленый океан, перегретой воды под высоким давлением в подводных гейзерах [20].

Таким образом, термовязкие свойства жидкости могут играть существенную роль как в разнообразных геофизических задачах, так и в технических приложениях. Кроме того, она представляет интерес с точки зрения распространения общей турбулентной теории на стратифицированные течения, приводя к разнообразным эффектам, — в частности, к «очаговой» турбулентности [21].

Теория гидродинамической устойчивости [1], как и теория турбулентности [2; 4], содержат большое число хорошо разработанных подходов к изучению течений жидкости. Анализ гидродинамических неустойчивостей, приводящих к смене характера режима течения и возникновению турбулентности, тесно сопряжён с экспериментальной практикой и математическим моделированием. Исследованию реологических особенностей термовязких жидкостей, многие из которых являются неньютоновскими, посвящено значительное число работ, направленных, в основном, на непосредственное измерение динамической вязкости при различных воздействиях, в том числе тепловых. Обращаясь к истории исследования устойчивости следует отметить одну из наиболее ранних — [22] , в которой, однако, рассматривался общий случай вязкой стратификации без указания связи динамической вязкости с температурой. После существенного перерыва анализ устойчивости ТВЖ был продолжен в серии работ [23—25] для различных аппроксимаций вязкости.

В России исследования в этом направлении связаны с работами С.Ф. Урманчеева и его коллег [16; 26], исследовавших общие свойства, а также устойчивость течений ТВЖ, в том числе аномально термовязких.

Математическое моделирование течений ТВЖ в основном сосредоточено на задачах свободных сдвиговых течений или однородной изотропной турбулентности, в которых проводится анализ временного развития слоя смешения, влияния вариаций вязкости на скорость диссипации и крупномасштабную структуру течения.

Объектом исследования выступают сдвиговые течения ньютоновской термовязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры.

Целью данной работы является теоретическое исследование характеристик устойчивости, а также процессов турбулентного смешения в сдвиговых течениях термовязкой жидкости.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. определить характеристики скоростного профиля в установившемся течении модельной ТВЖ, а также длину его установления;
2. определить области устойчивости найденного профиля по отношению к малым возмущениям на основе уравнения Орра–Зоммерфельда, обобщённого на рассматриваемый класс термовязких жидкостей;
3. создать программную реализацию численного метода КАБАРЕ для моделирования плоских и трёхмерных течений в приближении слабой сжимаемости;
4. выполнить валидацию метода КАБАРЕ на основе расчёта двойного сдвигового слоя и течения Тейлора–Грина;
5. провести численное моделирование развития неустойчивости в напорном течении ТВЖ в канале, а также в слоистом течении ТВЖ;
6. выполнить численное моделирование режимов течения ТВЖ в трёхмерной постановке, провести анализ характеристик тепломассообмена в реализующихся течениях.

Научная новизна:

1. впервые показана возможность изменения выпуклости стационарного профиля скорости в ТВЖ при изменении перепада температур;
2. предложено дополнительное ветвление алгоритма численного метода КАБАРЕ на этапе расчёта значений локальных инвариантов Римана на новом временном слое;
3. для турбулентного течения Тейлора–Грина получены взаимные корреляционные функции давления и квадрата завихренности, а также взаимные корреляции их пульсационных компонент;
4. показано, что при эволюции двойного вихревого слоя слабосжимаемой жидкости вклад дилатационной компоненты диссипации в энергетические характеристики течения сопоставим с общей диссипацией;

5. впервые проведено численное моделирование эволюции плоского течения ТВЖ под воздействием гармонических возмущений малой амплитуды в канале, показано, что процесс смешения наиболее интенсивным образом развивается в окрестности точки перегиба профиля скорости;
6. расчётом по схеме КАБАРЕ плоского слоистого течения ТВЖ показано, что возможность и интенсивность процесса смешения находятся в функциональной зависимости от безразмерного комплекса, в состав которого входят число Рейнольдса Re и отношение динамических вязкостей жидкостей в различных слоях;
7. впервые проведено моделирование эволюции течения термовязкой жидкости в трёхмерном слое под воздействием хаотических возмущений.

Практическая значимость предлагаемого исследования связана с выявлением решающего влияния температурной зависимости вязкости жидкости не только на распределение скорости в некотором установившемся течении, но также также и на его устойчивость, что может привести к смене режима течения и изменению характера тепломассообмена. Результаты указывают на необходимость учёта температурной зависимости вязкости при проведении моделирования течений жидкости и газа.

Расширен опыт применения схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости, в двумерной и трёхмерной постановках, что позволяет судить о результативности данного метода для расчёта сдвиговых неустойчивостей, вихревых течений, турбулентности и связанных с ними процессов тепломассообмена.

Теоретическая значимость. Результаты изучения характеристик крупномасштабного вовлечения и последующего перемешивания слоёв жидкости с различной температурой призваны расширить представления о турбулентности, возникающей в течениях со стратификацией материальных параметров, в частности, с вязкой стратификацией в неоднородном температурном поле.

Методология и методы исследования. Основными теоретическими методами, использованными в настоящей работе, являются: линейная теория гидродинамической устойчивости, численные методы решения задач на собственные значения, метод КАБАРЕ интегрирования уравнений переноса, развитый в работах В.М. Головизнина и его колллег [27; 28], спектральные и статистическое подходы турбулентной теории, на основе которых была реализована фильтрация полученных массивов данных.

Численные методы были реализованы на языке программирования Fortran F90 с использованием технологий параллельного программирования MPI, OpenMP, библиотек Intel MKL, LAPACK.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. для термовязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры показано, что существует безразмерный параметр α, определяющий форму профиля скорости в установившемся течении, возможность изменения его выпуклости, связанную с появлением точки перегиба, длину установления этого профиля и область его устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям. В области значений α, соответствующих диапазону существования точки перегиба, происходит расширение зоны неустойчивости в сторону физически малых чисел Рейнольдса Re и коротковолновых возмущений;
2. развитие процесса смешения в слоистом течении термовязкой жидкости определяется безразмерным параметром $k_t = \mathrm{Re}/R_\nu$, где R_ν — отношение вязкостей слоёв; если k_t превышает некоторое критическое значение, то процесс смешения полностью подавляется. Основные асимтотики данного процесса согласуются с результатами теории пограничного слоя;
3. крупномасштабное смешение в течении ТВЖ в плоском канале под воздействием гармонических возмущений развивается наиболее интенсивно в окрестности точки перегиба профиля скорости невозмущённого течения и пространственно отделено от других областей течения;
4. эволюция течения слабосжимаемой ТВЖ в трёхмерном слое зависит от интенсивности налагаемых хаотических возмущений и среднемассового числа Re — при малых Re происходит

перестройка течения с исчезновением точки перегиба и увеличением расходных характеристик; в случае больших Re происходит резкая турбулизация течения с возникновением сильной очаговой турбулентности, сохраняющейся на длительных временах эволюции течения;
5. программная реализация численного метода КАБАРЕ на основе приближения слабой сжимаемости для расчёта течений в двумерной и трёхмерной постановках.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: обоснованностью использованных методов теории устойчивости и вычислительной гидродинамики; совпадением результатов моделирования ряда задач классической гидродинамики с имеющимися решениями; соответствием наблюдаемых характеристик тепломассобмена общим закономерностям течений с развитой завихренностью.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных и российских конференциях:

1. Eighth International Topical Team Workshop on Two-Phase Systems for Ground and Space Applications, Center of Applied Space Technology and Microgravity, Universität Bremen, Germany, 16–19 September 2013;
2. 2-ая Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем», Москва, ИПРИМ РАН, 17–19 декабря 2013 г.;
3. 57-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 24–29 ноября 2014 г.;
4. 58-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 23–28 ноября 2015 г.;
5. XXXI International conference on Equations of state for Matter, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, March 1–6, 2016;
6. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15–17 декабря 2015 года
7. 59-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва – Долгопрудный – Жуковский, 21–26 ноября 2016 г.;
8. 7-ая Международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах», Москва, 30 ноября — 2 декабря 2016 г.;
9. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 16–18 ноября 2016 г.;
10. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, Россия, 20–24 августа 2015 г.;
11. XXXII International Conference on interaction of Intense Energy Fluxes with Matter Elbrus, Russia, March 1–6, 2017;
12. Международный Симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» в рамках Пермского Естественнонаучного Форума, ПГНИУ, Пермь, Россия, 15–17 мая 2017 г.;
13. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ– ИТПМ СО РАН– СПбПУ– НИИМ МГУ, 27 июня 2017 г.;
14. VI Всероссийская Конференция с Международным Участием «Тепломассообмен и Гидродинамика в Закрученных Потоках», Новосибирск, Россия, 21–23 ноября 2017 г.;
15. 60-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 20–28 ноября 2017 г.;
16. XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турблентность», Звенигород, Россия, 25 февраля — 4 марта 2018 г.;

17. 61-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 19–25 ноября 2018 г.

Личный вклад. Разработка программного кода, его верификация и валидация проведены автором. Постановка задач, а также анализ результатов, представленных в настоящем диссертационном исследовании, проведены коллективом соавторов при определяющем участии автора.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 25 печатных изданиях, 9 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в системах цитирования *Web of Science* и *Scopus*, 16 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 227 страниц, включая 118 рисунков и 19 таблиц. Список литературы содержит 245 наименований.

Список сокращений и условных обозначений

ТВЖ	термовязкая жидкость
ТКЭ	турбулентная кинетическая энергия
ДУ в ЧП	дифференциальные уравнения в частных производных
ОДУ	обыкновенные дифференциальные уравнения
НУ	начальные условия
УНС	уравнения Навье–Стокса
УРС	уравнение состояния
ГУ	граничные условия
ЭВМ	электронно-вычислительная машина
СК	система координат
точка i	точка перегиба профиля скорости
LHDA	Lagrangian History Direct Approximation
LES	Large Eddy Simulation, семейство методов крупных вихрей
ILES	Implicit Large Eddy Simulation, семейство методов крупных вихрей без использования подсеточных моделей
RANS	Reynolds-averaged Navier–Stokes (equations), уравнения Навье–Стокса, усреднённые по Рейнольдсу
EDQNM	модель Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian approximation
LIF	laser induced fluorescence (лазерноиндуцированная флуоресценция)
PIV	particle image velocimetry (анемометрия по изображениям частиц)
DRP	dispersion relation preserving (scheme), схема, сохраняющая дисперсионное соотношение (конечно-разностные схемы, которые имеют те же дисперсионные соотношения, что и исходные уравнения в частных производных)
TVD	total variation diminishing, класс методов, уменьшающих полное суммарное отклонение
Eu	число Эйлера
Re_0	число Рейнольдса, определяемое по реперной вязкости (или по вязкости у холодной стенки в случае их совпадения)
Re^*	число Рейнольдса, вводимое по вязкости у холодной стенки
Re_3	локальное число Рейнольдса, определяемое по переменным вязкости и скорости
Re_Λ	число Рейнольдса, построенное на основе интегрального масштаба Λ
$\mathrm{Re}_{\lambda_\tau}$	число Рейнольдса, построенное по тейлоровскому микромасштабу
$\mathrm{Re}_{\delta_{\theta,0}}$	число Рейнольсда, определяемое по начальной толщине потери импульса $\delta_{\theta,0}$
Re_1–Re_5	числа Рейнольдса, определяемое по локальным или среднемассовым значениям входящих в него величин
Re_c	критическое число Рейнольдса
$\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}}$	число Рейнольдса, определяемое по начальной толщине завихренности $\delta_{\omega,0}$
$\mathrm{Re}_1^{i^*}$, $Re_2^{i^*}$	значение числа Рейнольдса в окрестности точки перегиба профиля скорости
M	число Маха
CFL	число Куранта(–Фридрихса–Леви)
Pr	число Прандтля
Pe	число Пекле

$\langle\ldots\rangle$	усреднение по ансамблю реализаций
$\langle\ldots\rangle_S$	усреднение в направлениях периодичности
$\mathfrak{F}[\ldots]$	прямое преобразование Фурье
$[\ldots]_f$, $[\ldots]_c$	сеточные функции, полученные на более мелкой и грубой сетках
A, B	переменные в интегро-интерполяционном методе
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$	некоторые матрицы
$\mathcal{A}_t$	адвекция ТКЭ
a_i, a_n	константы интегрирования | параметры аппроксимации | коэффициенты разложения по полиномам Чебышева | амплитуда возмущения
b_i	коэффициенты цифрового фильтра
c	фазовая скорость распространения возмущений | скорость звука
C	сеточное множество потоковых переменных
$\mathbb{C}$	некоторая константа, значение которой может меняться в различных формулах | вычислительная сложность алгоритма
c_p	удельная теплоёмкость жидкости при постоянном давлении
D	знак дифференциала | некоторая константа
D/Dt	конвективная производная
$\mathcal{D}_p$	диффузия ТКЭ, обусловленная корреляцией пульсаций давления и скорости
$\bar{e}_{\mathrm{turb}}$	турбулентная кинетическая энергия
E	кинетическая энергия
E_1, E_2	энергетические спектры продольных и поперечных пульсаций в изотропной турбулентности
$\mathbf{E}$	некоторая матрица
ΔE_{dil}	изменение энергии системы вследствие дилатации
F_{X}	сеточное множество потоковых переменных, отвечающих за перенос в направлении X | сила сопротивления
F_{Y}	сеточное множество потоковых переменных, отвечающих за перенос в направлении Y
$\vec{\mathfrak{Q}}_T$	вектор теплового потока
h	весовая функция
i	мнимая единица
$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$,	единичные орты
I	интенсивность турбулентности
I_k^i	инварианты Римана
i, j	индекс точки сеточного множества в направлениях X и Y
n	номер временного слоя
n_{X}, n_{Y}, n_{Z}	число ячеек расчётной сетки в направлениях X, Y, Z
N	число членов разложения Орра–Зоммерфельда
n_c^{X}, n_c^{Y}, n_c^{Y}	корреляционная длина, задаваемая цифровым фильтром в направлениях X, Y, Z, соответственно
m	свободный индекс | номер гармоники возмущения
k	показатель в амплитудном множителе спектрального признака устойчивости | волновое число
k_t	безразмерный параметр слоистого течения, построенный по Re и R_ν
$k_{\mathrm{X,Y}}^{\min}$	минимальное волновое число в направлениях X и Y
$k_{\mathrm{X,Y}}^{\max}$	максимальное волновое число в направлениях X и Y
$k(y)$	сеточная функция, вводимая при описании интегро-интерполяционного метода

δk	приращение волнового вектора
Δk	толщина сферической оболочки в пространстве волновых чисел
$K(r)$	продольная корреляционная функция тройных корреляций в однородной изотропной турбулентности
L	протяженность расчётной области
L_{X}, L_{Y}, L_{Z}	протяженность расчётной области в направлениях X, Y, Z
Λ	интегральный масштаб, соответствующий наиболее крупным вихрям инерционного интервала
l'	длина пути перемешивания
l_c^{X}, l_c^{Y}, l_c^{Z}	длины корреляции цифрового фильтра в направлениях X, Y, Z
l_{mix}	толщина слоя вовлечения (крупномасштабного смешения)
p	давление | возмущение давления
p', $\hat{p}$	пульсации давления | безразмерное давление
Δp	перепад давления (по длине канала)
$\mathcal{P}$	производство ТКЭ
P_0	характерное давление
P	интеграл палинстрофии
P_{ij}, P_{ijm}	проективные тензоры различного ранга
q_{2n}	базис симметричных функций, построенный по полиномам Чебышева
q_x^T, q_y^T	тепловой поток в направлениях X и Y
Q	расход жидкости через сечение
$\mathbb{Q}$	собственный ортогональный тензор
(Q)	тепловой поток
$\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^T$, $\mathcal{Q}_{\mathrm{Y}}^T$, $\mathcal{Q}_{\mathrm{Z}}^T$	компоненты турбулентного теплового потока
r	характерная ширина сдвигового слоя | расстояние | размер вихря
R_ν	отношение вязкостей жидкостей в слоистом течении
R_S	амплитудный коэффициент цифрового фильтра
$\mathbb{R}$	плотность, относящаяся к массивам консервативных переменных
R_{pe}	корреляционная функция давления и квадрата завихренности (локальной энстрофии)
$R_{ii}(r)$	продольная автокорреляционная функция
$R_{p'e'}$	корреляционная функция пульсаций давления и квадрата завихренности (локальной энстрофии)
$R_{\varphi_i\varphi_j}$	эйлеров коэффициент корреляции между случайными функциями φ_i и φ_j в одной плоскости
$R^{\mathrm{Z}}_{\varphi_i\varphi_j}$	эйлеров коэффициент корреляции между случайными функциями φ_i и φ_j в различных плоскостях
$\mathcal{R}(u',u')$	тензор напряжений Рейнольдса
R_{ijL_1}, R_{ijL_2}	лагранжевы коэффициенты корреляции
$S_n(r)$	структурная функция n-го порядка
$S_{iii}(r)$	продольный двухточечный момент третьего порядка
S_{11}, S_{12}	компоненты тензора скоростей деформации в двумерном случае
$\mathbf{S}$	тензор скоростей деформации
t	время
t_0	характерное время
t_i, $i = 1$–6	некоторые характерные моменты времени
Δt	шаг по времени
t_{final}	время окончания расчёта | точка останова
T	температура в общем смысле | температура, соответствующая потоковым переменным численной схемы

T_0	реперное значение температуры
T_1	температура у нижней (холодной) границы расчётной области | температура покоящейся жидкости
T_∞	асимптотическое значение температуры
ΔT	перепад температур (в сечении канала)
$T_n(y)$	многочлен Чебышева порядка n
$T(k,t)$	спектральный перенос турбулентной кинетической энергии
$\mathcal{T}_t$	турбулентный транспорт ТКЭ
$\mathcal{T}_\nu$	молекулярный вязкий транспорт ТКЭ
$\mathfrak{T}$	период усреднения | период колебаний
u	скорость в общем смысле | скорость в направлении X | характерная скорость вихрей инерционного интервала
u', v', w'	пульсационные составляющие скоростей u, v, w
$\vec{u}$, $\hat{\vec{u}}$	вектор скорости
$\vec{u}$	вектор возмущений скорости
U	скорость в направлении X, относящаяся к консервативным переменным
U_0	характерная скорость
$\vec{U}(y)$	вектор скорости основного течения
$\hat{u}$	безразмерная переменная скорости в общем смысле
U_c	конвективная скорость переноса турбулентных пульсаций
U_{prof}	аналитический профиль скорости в напорном течении термовязкой жидкости
U_∞	скорость на бесконечном удалении от тела
U^+, z^+, k^+, ω^+	скорость U, координата z, длина волны k, частота ω, масштабированные в единицах стенки
$\hat{U}_{\tau^*}$, U_{τ^*}	скорость трения (динамическая скорость) | безразмерная скорость трения
$\langle u'\rangle_S$, $\langle v'\rangle_S$, $\langle w'\rangle_S$	пульсации скорости, усреднённые в направлениях периодичности X и Y
$\langle u'^2\rangle_S$, $\langle v'^2\rangle_S$, $\langle w'^2\rangle_S$	квадраты пульсаций скорости, усреднённые в направлениях периодичности X и Y
v	величина поперечных возмущений скорости
$\vec{v} = (u,v)$	вектор скорости в общем смысле | скорости, относящиеся к потоковым переменным численной схемы
$\langle U\rangle_S$, $\langle V\rangle_S$, $\langle W\rangle_S$, $\langle T\rangle_S$	компоненты скорости в направлениях X, Y, Z, а также температура T, усреднённые в направлениях периодичности Y и Z
V_{sw}	sweeping velocity, крупномасштабная скорость | характерная скорость вихрей, принадлежащих энергетическому интервалу
v_i, $k = 1$–3	компонента скорости в индексных обозначениях
W	сеточная функция, вводимая при описании интегро-интерполяционного метода
W_f^{X}, W_f^{Y}, W_f^{Y}	размер носителя цифрового фильтра в направлениях X, Y, Z, соответственно
x_k	переменная координата в индексных обозначениях
$\hat{x}$	безразмерная координата x
y, z	переменные координаты
y_i	значение координаты точки перегиба в поперечном сечении канала
$\hat{y}$	безразмерная координата y
y^*	расстояние от стенки
Δy_{med}	величина смещения среднего значения изолинии
Δx, Δy, Δz	пространственный шаг расчётной сетки в направлениях X, Y, Z

α	безразмерный комплекс
β	константа аппроксимации для экспоненциальной зависимости вязкости от температуры
β	коэффициент прямого (-1) или обратного (1) преобразования Фурье
γ	инкремент неустойчивости
δ^+	вязкий масштаб длины в турбулентном пограничном слое
δ_θ	толщина потери импульса
$\delta_{\theta,0}$	начальная толщина потери импульса
$\delta_{\omega,0}$	толщина начальной завихренности
δ_{nm}	символ тензора Кронекера
Δ_i, Δ_j	приращения i-ой и j-ой компонент скорости
ε	погрешность расчёта | скорость диссипации кинетической энергии, рассчитанная непосредственным дифференцированием
$\varepsilon_{\mathrm{mean}}$	средняя относительная ошибка по норме L_1 для определения процесса сеточной сходимости
ε_1	скорость диссипации кинетической энергии, рассчитанная по интегралу энстрофии ζ
ε_2	скорость диссипации кинетической энергии, рассчитанная по тензору вязких напряжений $\mathbf{S}$
ε_3	скорость диссипации вследствие дилатации
ε_k	диссипация ТКЭ
ε_{ijk}	символ тензора Леви–Чивиты
ζ	интегральная энстрофия
ζ_0	начальное значение энстрофии
ζ_{max}	максимальное значение интегральной энстрофии
$\hat{\zeta}$	интегральная энстрофия, нормированная на начальное значение
$\hat{\zeta}_{\mathrm{X,Y,Z}}$	компоненты интегральной энстрофии, полученные интегрированием вектора завихренности в направлениях X, Y, Z
η	безразмерная переменная | колмогоровский микромасштаб
Θ	переменная температуры, относящаяся к консервативным переменным
$\Lambda_{u'u'}$	длина корреляции пульсаций u', интегральный масштаб
$\Lambda_{v'v'}$, $\Lambda_{w'w'}$	длина корреляции пульсаций v', а также w', «поперечный» интегральный масштаб
Λ_{n_X}, Λ_{n_Y}, Λ_{n_Z}	матрицы собственных значений сеточных дифференциальных операторов
λ	теплопроводность | амплитуда в спектральном признаке устойчивости | характеристическая скорость | расстояние между ножками Λ-вихря
λ_τ	тейлоровский микромасштаб турбулентности
λ^2_{OW}	квадрат показателя экспоненты в критерии Окубо–Вейса
μ	динамическая вязкость
μ_{min}, μ_{max}	минимальная и максимальная вязкости в некотором диапазоне
μ_∞	асимптотическое значение динамической вязкости
ν	кинематическая вязкость | частота колебаний
ν_0	реперное значение кинематической вязкости, константа аппроксимации
ν_{high}	кинематическая вязкость более вязкой жидкости в слоистом течении
ν_t	турбулентная (вихревая) вязкость
$\Pi_E(k)$	спектральный поток турбулентной кинетической энергии
ρ	плотность жидкости в общем смысле, плотность жидкости, относящаяся потоковым переменным численной схемы
ρ_0	реперная плотность

$\Delta\rho$	приращение плотности
σ	настроечный параметр интегро-интерполяционного метода | коэффициент масштабирования дискретного преобразования Фурье
$\boldsymbol{\sigma}$	тензор вязких напряжений
τ	характерное время жизни вихрей интегрального масштаба | временной сдвиг
τ^*	напряжение трения на стенке
Φ	система дифференциальных уравнений первого порядка в методе Рунге–Кутты
φ	фаза в спектральном признаке устойчивости
φ_i, φ_j	некоторые функции, дифференцируемые требуемое число раз | случайные функции
ψ	функция тока
$\vec{\omega}$	вектор завихренности
ω_X, ω_Y, ω_Z	компоненты завихренности в направлениях X, Y, Z
$\boldsymbol{\Omega}$	тензор завихренности
ρ_init, u_init, p_init	начальные значения плотности, скорости и давления
ρ_inlet, u_inlet, p_inlet	значения плотности, скорости и давления, задаваемые на входе в расчётную область

Глава 1. Общие свойства турбулентных течений, проблемы моделирования. Определение и классы термовязких жидкостей

Данная глава содержит обзор работ, связанных с развитием представлений о турбулентности, обсуждаются вопросы численного моделирования задач, использовавшихся для тестирования собственной реализации численного метода КАБАРЕ. В заключительной части главы описываются характеристики течений термовязкой жидкости, а также наиболее интересные работы в этой области.

1.1 Развитие представлений о турбулентности в исторической ретроспективе

1.1.1 Вступительные замечания

Проблема турбулентности является одной из ключевых не только для механики жидкости и газа, но и для всей физики, так как турбулентное движение встречается в природе почти повсеместно. Настоящий прорыв в понимании этого явления произошёл только середине XX века и неразрывно связан с развитием теории вероятности, экспериментальных методов исследования, а также масштабным внедрением численного моделирования. Развитие теории турбулентности тесно связано с общим техническим прогрессом и, прежде всего, с развитием авиации, космонавтики и работами по созданию атомной бомбы. Проблема турбулентности остаётся актуальной и в настоящее время, и, несмотря на колоссальный объём проведённых за последние 100 лет исследований, существенного прогресса в её решении достигнуть так и не удалось. Получено всего лишь несколько соотношений, связывающих её количественные характеристики и подтверждённых экспериментально.

В данном разделе освещаются лишь некоторые аспекты турбулентной теории, в основном связанные с классической гидродинамикой. Такие интересные темы, как связь турбулентности с теорией хаоса и странными аттракторами, проблема турбулентного перехода, свойства когерентных структур и магнитогидродинамическая турбулентность, останутся за рамками изложения.

1.1.2 Определение турбулентности. Опыты Рейнольдса

Все имеющиеся течения вязкой жидкости можно разделить на два основных класса — ламинарные и турбулентные. В ламинарных течениях траектории частиц, линии тока, а также поля скоростей и давлений носят «регулярный» характер [3]. В силу регулярности ламинарного течения общая картина наблюдающихся движений хорошо описывается уравнениями Навье–Стокса при соответствующих «регулярных» начальных и граничных условиях. Наличие в реальных условиях различных, чаще всего малых по величине, случайных возмущений может либо слабо изменить рассматриваемое движение, если оно устойчиво, или полностью его исказить, что имеет место в случае неустойчивости движения.

Теория гидродинамической устойчивости является важной частью гидродинамики, в силу того обстоятельства, что неустойчивое течение не наблюдаемо и в реальности быстро разрушается различными малыми возмущениями. С другой стороны, именно неустойчивые течения часто трансформируются в важное состояние движения, называемое турбулентностью, с хаотическими трёхмерными полями завихренности, которые обладают широким спектром временных и пространственных масштабов.

Турбулентность чрезвычайно широко распространена в природе и в технических устройствах, в частности, турбулентным является истечение воздуха из лёгких человека, естественная конвекция в помещениях, движение ветра. Именно турбулентностью определяется сопротивление автомобилей [29; 30], самолетов [31—33], мостов, а также движение крупных атмосферных и океанических течений. Жидкое ядро Земли также является турбулентным [34; 35], вследствие чего, вероятно, и происходит генерация магнитного поля. Даже вспышки на Солнце, управляемые движениями на поверхности звезды, являются следствием турбулентности [36].

Исторически первыми научными наблюдениями турбулентного движения стали опыты О. Рейнольдса (Reynolds) [37], проведённые в 1883 году, и теперь считающиеся классическими.

В этих опытах было обнаружено, что турбулентный переход в трубе обусловливается достижением критического значения некоторого безразмерного параметра, теперь называемого числом Рейнольдса Re. Критическое число оказалось равным $\mathrm{Re}_c = U_0 L/\nu$, где U_0 — среднемассовая скорость, L — диаметр трубы, ν — кинематическая вязкость. Впоследствии им же было открыто существование нижнего критического значения числа Рейнольдса, приблизительно равного 2300 (4400 — [38] — по затуханию турбулентной «пробки»), так что при этом движение в трубе оставалось ламинарным, каковы бы ни были введённые в течение возмущения. Вместе с тем, было замечено, что путём удаления возмущений на входе в трубу или уменьшения их начальной амплитуды можно искусственно затянуть ламинарное движение в область значительно больших Re. Так, значение 1.3×10^4, полученное в экспериментах Рейнольдса, объяснялось наличием плавного перехода в трубе. Однако не удалось получить определённое значение для верхней границы критического числа; эта граница многократно отодвигалась по мере совершенствования техники эксперимента и была доведена до 6×10^4 [39]. Такое затянутое ламинарное течение является неустойчивым по отношению даже к очень небольшим возмущениям и сразу же переходит в турбулентное.

Тейлор, один из пионеров теории турбулентности, дал следующее определение этому явлению [40] в одной из своих работ: *«Турбулентность есть нерегулярное движение, наблюдаемое в жидкостях и газах, когда они текут вдоль твёрдых поверхностей, или когда два слоя текут один по другому... Действительное движение обычно столь нерегулярно, что детали его мало известны.»*

Со времени исследований Рейнольдса в работах Тейлора [41—44], Колмогорова [7; 8], Обухова [45], Ландау [46], Миллионщикова [47; 48] были предприняты значительные попытки дать статистическое описание турбулентности, что привело к «математизации» этого явления, под которым в подробном обзоре А.С. Монина [49] подразумеваются *случайные флуктуации термогидродинамических характеристик завихренных течений.* Как и в предыдущих работах подчеркивается, что турбулентность наблюдается в завихренных течениях жидкостей и газов, и её характеристики испытывают хаотические флуктуации, создаваемые наличием многочисленных вихрей различных размеров. Вследствие этого указанные характеристики изменяются в пространстве и во времени нерегулярно. Важной особенностью является существование широких интервалов частот пространственных распределений характеристик по компонентам Фурье с фиксированными волновыми векторами, а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик в фиксированных точках пространства хаотически изменяются с частотой таких колебаний.

Следует отметить, что, несмотря на статистический характер распределения поля завихренности, эволюция течения происходит в соответствии с уравнением завихренности, которое по своим свойствам [4] создаёт возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными и, как следствие, переноса кинетической энергии по спектру масштабов движений в сторону мелких вихрей.

В конце данного раздела приведем одно из наиболее современных определений [4] турбулентности, под которой *в математическом смысле подразумевается любое хаотическое решение трёхмерных уравнений Навье–Стокса, оказывающееся чувствительным к начальным данным, и которое является результатом последовательности неустойчивостей ламинарного течения, возникающей в том случае, когда бифуркационный параметр последовательно принимает значения из монотонно возрастающей последовательности.*

Чувствительность к начальным данным является одним из основных свойств турбулентности, что с физической точки зрения означает, например, что погоду нельзя предсказать более, чем на несколько дней.

Это определение, на взгляд автора, является развитием соображений, данных в [49].

Кроме того, из него неявно следует, что количественные характеристики турбулентности определяются условиями её возникновения, в частности, характеристиками начальных возмущений и ламинарно-турбулентного перехода, а использование упрощений зачастую приводит к нереалистическим результатам.

1.1.3 Развитие теории турбулентности от Буссинеска до Прандтля. Модели с турбулентной вязкостью

Теперь обратимся развитию теоретического описания проблемы турбулентности и исторической ретроспективе. В начальный период основными задачами стали создание элементарных теорий турбулентности и установление характеристик сдвиговых турбулентных течений [3].

Под сдвиговыми течениями понимаются такие, в которых основное течение можно считать одномерным или квазиодномерным (следы за телами, пограничные слои, затопленные струи и течения в трубах).

Одна из первых попыток описания турбулентности была предложена тем же Рейнольсом [50], который использовал прием разделения действительно существующих в потоке мгновенных проекций скорости и давления на усреднённые по времени ($\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$) и пульсационные (u', v', w') значения:

$$u = \overline{U} + u', \quad v = \overline{V} + v', \quad w = \overline{W} + w'.$$

Если в результате усреднения, проведённого в данной точке в различные моменты времени t, будут получаться одни и те же усреднённые значения компонент, то такое движение называется стационарным, само же турбулентное движение является квазистационарным. Одним их важнейших предположений при таком усреднении является рассмотрение статистически стационарных течений, в которых усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по времени.

В дальнейшем также предполагается, что несмотря на всю нерегулярность движения, реальное (или действительное — по терминологии [3]) движение описывается уравнениями Навье–Стокса. Существование в них одновременно диссипативных и нелинейных членов, определяет многообразие свойств турбулентного течения [4], таких как неорганизованное хаотическое поведение, кажущееся случайным, широкий диапазон пространственных и временных масштабов, наличие развитой завихренности, перемежаемость во времени и пространстве.

Полученные на основании этого предположения уравнения Рейнольдса (RANS — Reynolds-averaged Navier–Stokes) можно рассматривать как первые в общей системе уравнений переноса турбулентных характеристик потока, а именно, как уравнения переноса импульса на основе моментов первого порядка. Однако уравнения RANS содержат в своем составе моменты второго порядка, которые делают полученную систему незамкнутой.

Появление второго момента в виде так называемых напряжений Рейнольдса является следствием того, что уравнения Навье–Стокса содержат нелинейный член.

Следующим шагом стала попытка замкнуть полученные уравнения, составив дополнительные уравнения переноса рейнольдсовых напряжений. Однако полученная новая система уравнений обладает тем же недостатком — появлением слагаемых тройных корреляций пульсационных компонент скоростей и давлений.

Получаемая цепочка уравнений носит название цепочки Фридмана–Келлера [51]. Таким образом оказывается, что уравнений всегда меньше, чем неизвестных, и для замыкания этой системы необходимо на каком-то шаге оборвать эту цепочку и предложить дополнительные гипотезы связи различных моментов. Одна из возможных гипотез о связи вторых и четвертых моментов для замыкания уравнений турбулентности была выдвинута М.Д. Миллионщиковым.

Наряду с усреднением Рейнольдса, ещё одной первой концепцией в теории турбулентности стало введение понятия турбулентной вязкости. Развитие этой идеи началось в трудах Сен-Венана и Буссинеска в середине XIX века [2] и привело к созданию теории пути смешения Прандтля в 1925 г. [6].

Гипотеза о турбулентной вязкости базируется на аналогии между молекулярным переносом компонент импульса, приводящим к появлению тензора вязких напряжений в ламинарном течении, и турбулентным. Подобно тому, как динамический коэффициент вязкости представляет собой физическую константу жидкости или газа в определённом термодинамическом состоянии, турбулентная вязкость ν_t также в начале считалась постоянной и совпадающей по размерности с молекулярной. Расчёты турбулентных течений, проводившиеся при простейшем предположении о постоянстве турбулентной вязкости, показали, что для согласования результатов расчётов с опытом должна на много порядков превосходить ν. Впервые объяснение этому парадоксу было дано Г.А. Лоренцем [3], который указал, что в турбулентных движениях трение — турбулентная вязкость, в отличие от обычной вязкости, обусловливается переносом сквозь слои движущейся жидкости количеств движения не микроскопических частиц, а примешивающихся конечных объёмов среды.

Эта идея Лоренца получила свое оформление в работах Тейлора и Ричардсона, создавших до появления работы Прандтля модель турбулентного перемешивания и указавших роль понятия пути перемешивания [3].

Результатом стала так называемая формула Буссинеска, выведенная для простейшего прямолинейного сдвигового движения:

$$\begin{gathered}\overline{u} = \langle u\rangle, \mathcal{R}_{12} = A\frac{\langle u\rangle}{dy},\\ \mathcal{R}_{12} = -\rho\langle u'v'\rangle = \rho\langle v'l'\rangle\frac{d\langle u\rangle}{dy}.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Формула Буссинеска исторически явилась крупным шагом по пути замыкания уравнения переноса импульса, позволив выразить шесть неизвестных рейнольдсовых напряжений через одну неизвестную ν_t, но все же не дала полного решения проблемы замыкания.

Дальнейшее её усовершенствование связано с теорией пути смешения, выдвинутой Прандтлем, который также исходил из аналогии между переносом конечных по объёму вихревых масс в турбулентном движении и переносом молекул в ламинарном.

Идея состояла в следующем: вихревая масса из «начального слоя» выделятся в индивидуальный объём и перемещается в процессе обмена в нормальном направлении до тех пор, пока не смешается с соседним слоем и не потеряет свою индивидуальность — отличие в продольной усреднённой компоненте скорости. Вихревая масса во всё время перемещения из начального слоя в конечный сохраняет свою индивидуальность, вызывая тем самым в конечном слое возмущение усреднённой скорости. Данное возмущение принимается пропорциональным расстоянию l' между начальным и конечным слоями и величине разности между усреднёнными скоростями в этих слоях $\Delta\langle u\rangle \approx l'\frac{d\langle u\rangle}{dy}$.

$$u' \propto l'\frac{d\langle u\rangle}{dy}, \quad v' \propto l'\frac{d\langle u\rangle}{dy}.$$

Единственная величина, оставшаяся неопределённой, получила наименование пути смешения l'.

Теория Прандтля является локальной теорией турбулентных движений, основанных на предположении, что турбулентное смешение в данной точке потока полностью определяется физическими константами (вязкость и плотность) и усреднённым движением в непосредственной близости к этой точке. Аналитически [3] это выражается в зависимости коэффициентов переноса от совокупности производных $d\langle u\rangle/dy$, $d^2\langle u\rangle/dy^2$.

Считая, что турбулентная вязкость уже на небольшом удалении от стенки значительно превышает молекулярную, можно представить величину A в виде степенной зависимости от плотности и производных скорости различного порядка, и получить следующую формулу для пути смешения.

$$l' = \frac{\kappa\,(d\langle u\rangle/dy)}{(d^2\langle u\rangle/dy^2)},$$

где $\kappa \approx 0.41$ — константа Кармана.

Ещё одним результатом работ Прандтля и Кармана [3] стало получение формулы для логарифмического профиля скоростей в турбулентном погранслое. В основе вывода лежит предположение Прандтля о выделении двух основных областей — внутренней, где турбулентные пульсации пренебрежимо малы, т.е. имеется вязкий подслой с некоторым напряжением на стенке; и внешней, где член с вязким (молекулярным) трением может быть опущен. Замечая, что расстояние y данной точки от твёрдой стенки представляется собой единственную характерную для этой точки в безграничном потоке длину, и, пользуясь формулой для связи напряжения с длиной смешения, в этом простейшем случае путь смешения можно положить пропорциональным y. Таким образом, получается логарифмический закон для профиля скорости в турбулентном пограничном слое:

$$u = 1/\kappa\sqrt{\frac{\tau^*}{\rho}}\ln y + C,$$

где τ^* — где напряжение на стенке.

Как отметил фон Карман [40], важной особенностью полученного закона является его универсальность, т.е. он справедлив для любой жидкости, обтекающей твёрдую стенку в турбулентном режиме. Однако, некоторые специалисты [52] решили подвергнуть сомнению универсальность логарифмического закона, предложив использовать неуниверсальные зависимости в форме показательных функций, имеющих зависимость от Re, руководствуясь последними измерениями в аэродинамических трубах.

Иногда считается, что логарифмический профиль скоростей строго выполняется при $Re \to \infty$, что является неверным [2]. В действительности, для выполнения логарифмического закона требуется, чтобы в пристеночной области существовали достаточно крупные вихри, неподверженные влиянию удалённых вихрей из основного течения и молекулярной вязкости. Хотя это и кажется интуитивно понятным, нельзя дать точное обоснование на основе уравнений гидродинамики, так как даже удалённые вихри «чувствуют» друг друга вследствие пульсаций давления. Таким образом, логарифмический закон справедлив только в случае слабого влияния вихрей друг на друга.

1.1.4 Теория однородной изотропной турбулентности А.Н. Колмогорова

В конце 30-х годов стало ясно, что основным математическим аппаратом исследований призвана стать теория вероятности для случайных функций многих переменных. Вместе с тем следование этому пути обозначило серьёзные трудности, стоящие на пути создания замкнутой чистой теории турбулентности. Таким образом, на первый план вышли полуэмпирические гипотезы, получаемые из обработки экспериментальных данных.

Результатом работ А.Н. Колмогорова стало создание теории К41 для однородной изотропной турбулентности, её ключевые положения основываются на двух основных гипотезах [53].

1-я гипотеза Колмогорова. Статистические свойства в инерционном и диссипативном интервале не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации ε, кинематической вязкостью ν и самим масштабом l.

2-я гипотеза Колмогорова. Статистические свойства турбулентности в инерционном интервале универсальны и зависят только от скорости диссипации ε и масштаба l.

Перейдем теперь к основному содержанию [54] статей, посвященных формулировке общих законов, определяющих статистический режим мелкомасштабных пульсаций любой развитой турбулентности с достаточно большим числом Рейнольдса Re. Существенно, что еще в 1920-х гг. английским учёным Ричардсоном (Richardson) была предложена [55] качественная схема развитого турбулентного течения как иерархии вихрей (т.е. возмущений или неоднородностей) различных порядков, в которой наиболее крупные «вихри первого порядка» заимствуют свою энергию из усреднённого течения и затем передают её «вихрям второго порядка», те — «вихрям третьего порядка» и т.д. вплоть до мельчайших вихрей, энергия которых рассеивается под воздействием молекулярной вязкости.

Из числа конкретных результатов, содержащихся в работах [7; 8], наиболее широкую известность приобрёл так называемый «закон двух третей». В работе [8] Колмогоров сопоставил найденный им закон с имевшимися на тот момент экспериментальными данными по измерению двухточечных коэффициентов корреляции продольных и поперечных пульсаций за решёткой, помещённой в аэродинамическую трубу, которые были выполнены Драйденом (Dryden) и др. [56].

Позже аналогичную проверку закона выполнил Таунсенд (Townsend) [44], который, так же как и Колмогоров, нашёл, что результаты измерений удовлетворительно согласуются с предсказаниями теории. Ещё позже было установлено [54], что некоторые выводы Таунсенда не являются верными, а значения чисел Рейнольдса, при которых производилось большинство измерений в аэродинамических трубах, слишком малы для существования заметного интервала масштабов вихрей, при которых выполняется «закон двух третей». Обе гипотезы Колмогорова могут быть приложены к спектральной плотности кинетической энергии турбулентности (спектру турбулентности) $E(k,t)$, где k — волновое число, и к соответствующим продольному и поперечному одномерным спектрам $E_1(k,t)$ и $E_2(k,t)$. Спектр $E(k,t)$ определяется из разложения случайного поля скорости в трёхмерный интеграл Фурье, обобщающий аналогичное разложение случайных функций одного переменного, одномерные спектры и отвечают разложению одной из компонент трёхмерной скорости по соответствующей координате. В силу первой гипотезы подобия спектры E, E_1, E_2 при волновом числе $k \gg 1/\Lambda$ не зависят от времени и задаются формулами:

$$E(k) = \left(\nu^5\right)^{1/4} \varphi(\eta k), \quad E_1(k) = \left(\nu^5\right)^{1/4} \varphi_1(\eta k), \quad E_2(k) = \left(\nu^5\right)^{1/4} \varphi_1(\eta k) \tag{1.2}$$

где φ, φ_1, φ_2 — универсальные функции одного переменного, любые две из которых просто выражаются через третью из этих функций. Аналогично вторая гипотеза приводит к следующим соотношениям:

$$E(k) = A\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad E_1(k) = A_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad E_2(k) = A_2\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{1.3}$$

справедливые при $1/\eta \gg k \gg 1/L$; здесь A, A_2, A_2 — универсальные постоянные. Результаты (1.2) и (1.3) были получены Обуховым [45] с помощью исследования построенного им спектрального уравнения баланса турбулентной энергии. Спектральная формулировка (1.2) и (1.3) фундаментальных законов мелкомасштабной турбулентности, впервые указанных А.Н. Колмогоровым, очень удобна для экспериментальной проверки.

Гипотеза Миллионщикова касается основных свойств изотропной турбулентности [57] и формулируется следующим образом: *«Корреляционные функции четвёртого порядка поля скорости приблизительно связаны со вторыми моментами соотношениями, справедливыми в случае нормального распределения вероятностей.»* Сформулированная гипотеза касается общих свойств однородной изотропной турбулентности и не является модельной, методологически находится в полном согласии с принципами теоретической физики и допускает строгое обоснование в предельном случае заключительной стадии вырождения турбулентности. Являясь предположением общего характера, она имеет многочисленные применения и позволяет исследовать их разнообразные следствия.

Следует обратить внимание, что однородная изотропная турбулентность представляет собой идеализацию, никогда не встречаемую в природе, будучи связанной с несколькими свойствами симметрии [58]. Данная модель в современном сообществе [4] исследователей турбулентности рассматривается в трактовке Фриша (Frisch) [59]. В частности, однородность предполагает, что $\overline{u'^2}(\vec{x}) = \overline{u'^2}(\vec{x}+\vec{r})$. Условие изотропности является более жёстким: $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ (повороты на 90 градусов), $\partial\overline{u'^2}/\partial x = \partial\overline{v'^2}/\partial y = \partial\overline{w'^2}/\partial z$ (произвольные повороты), где u', v', w' — пульсации компонент скорости. Таким образом, часто употребляемый термин «однородная изотропная турбулентность» следует воспринимать как избыточный, в силу того, что любую трансляцию можно свести к совокупности двух поворотов.

В случае возбуждения однородной изотропной турбулентности, основные масштабы течения — интегральный Λ, тейлоровский λ_τ, колмогоровский масштабы η связаны следующими соотношениями [2]:

$$\frac{\Lambda}{\eta} \sim \mathrm{Re}_\Lambda^{3/4}, \quad \frac{\Lambda}{\lambda_\tau} \sim \mathrm{Re}_\Lambda^{1/2}, \quad \frac{\lambda}{\eta} \sim \mathrm{Re}_\Lambda^{1/4}, \tag{1.4}$$

Где число Рейнольдса Re_Λ определяется по интегральному масштабу турбулентности.

1.1.5 k–ε-модель турбулентности

k–ε-модель относится к моделям переноса турбулентных характеристик, содержащим в качестве неизвестных моменты второго порядка, но имеющим в своем составе моменты третьего порядка, содержащие пульсации скорости и пульсации давления. Для приведения этих уравнений к замкнутой форме необходимым становится использование для отдельных членов определяющих соотношений, упрощающих постановку задачи. В силу принятых в работе обозначений турбулентная кинетическая энергия (ТКЭ) e_{turb} тождественна k.

Ключевым моментом здесь является связь турбулентной вязкости и кинетической энергии турбулентных пульсаций. Идея состоит в том, что чем более интенсивна турбулентность, тем больше обмен импульсом и, следовательно, больше турбулентная вязкость. Турбулентная кинетическая энергия в общем случае определяется как $e_{\mathrm{turb}} = 1/2\left(\left\langle u'^2\right\rangle + \left\langle v'^2\right\rangle + \left\langle w'^2\right\rangle\right)$.

Вторым параметром модели является скорость диссипации ТКЭ $\varepsilon \propto \langle 2/3 e_{\mathrm{turb}}\rangle^{3/2}/\Lambda$, которая связывается с турбулентной вязкостью следующим соотношением:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad c_\mu \approx 0.09. \tag{1.5}$$

Транспортное уравнение для ТКЭ основывается на точном уравнении для энергии

$$\frac{\partial e_{\mathrm{turb}}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla(k) = -\nabla[\mathbf{T}] + \frac{\mathcal{R}_{ij}}{\rho}\overline{S}_{ij} - \varepsilon, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{T}$ включает в себя неизвестные корреляции, такие как тройные корреляции пульсаций скорости и пульсации скорости и давления. Важным шагом в создании модели является предположение о том, что процесс распространения ТКЭ из области высокой интенсивности в область низкой носит диффузионный характер. Точнее, k–ε-модель предполагает $\mathbf{T} = -\alpha_t \nabla k$; α_t — некоторый неизвестный коэффициент диффузии, полагаемый равным ν_t.

И, несмотря на то, что это предположение является весьма необоснованным, оно даёт преимущество, превращая уравнение для e_{turb} в уравнение адвекции с источником $\frac{\mathcal{R}_{ij}}{\rho}\overline{S}_{ij}$ и стоком ε

$$\frac{\partial e_{\text{turb}}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(k) = \nabla \cdot (\nu_t \nabla k) + \frac{\mathcal{R}_{ij}}{\rho}\overline{S}_{ij} - \varepsilon. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7), гарантирует корректный расчёт e_{turb} по усреднённым характеристикам, причём, в случае однородной турбулентности дивергенция в правой части исчезает, и первое модельное уравнение становится точно определённым.

Уравнение для скорости диссипации является феноменологическим (эмпирическим) и может объяснено в терминах эволюции характерной завихренности ω вихрей некоторого масштаба [2]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\varepsilon) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + c_1 \frac{\mathcal{R}_{ij}}{\rho}\overline{S}_{ij}\frac{\varepsilon}{k} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) содержит три произвольных коэффициента, которые подлежат дополнительному определению так, чтобы расчёт адекватно воспроизводил уже хорошо известные потоки. Как правило, они принимают значения $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_1 = 1.44$, $c_2 = 1.92$.

В действительности, интерполяция k–ε-модели между различными наборами данных является очень сложной задачей. В настоящее время k–ε-модель широко применяется в различных инженерных расчётах. О недостатках данной модели в контексте подхода RANS будет упомянуто в дальнейшем.

1.1.6 Численное моделирование турбулентных течений. RANS, LES и DNS подходы

Численное интегрирование уравнений Навье–Стокса на ЭВМ или так называемые численные эксперименты, получили широкое распространение за последние 30 лет, что стало результатом повышения производительности компьютеров.

Очевидно, что численные эксперименты имеют ряд преимуществ по сравнению с натурными: можно, например, точно контролировать начальные условия. Обратной стороной является колоссальный объём данных, который получается при расчётах (до 700 ТБ), так как в действительности можно отследить всю историю эволюции полей физических величин.

В 1972 году Орзаг (Orszag) и Паттерсон (Patterson) [60] продемонстрировали возможность компьютерного расчёта полностью турбулизованного потока, однако в отличие от всех предыдущих, в этих вычислениях не проводилась какая-либо параметризация турбулентной модели и взаимодействия вихревых структур; использованное число Рейнольдса, основанное тейлоровском микромасштабе было ограничено $\mathrm{Re}_{\lambda_\tau} \approx 35$. Характерно, что согласно соотношениям масштабов в изотропной турбулентности ($\mathrm{Re}_{\lambda_\tau} = \sqrt{15}\mathrm{Re}^{1/2}$) для удвоения $\mathrm{Re}_{\lambda_\tau}$ необходимо увеличить число точек по одному направлению в 20 раз [2].

Несмотря на развитие параллельных процессоров число Рейнольдса на тейлоровском масштабе увеличивается вдвое за 10 лет. В середине 1990-х оно составляло 160, однако, сейчас оно все ещё находится далеко за пределами области инженерных приложений прямого численного моделирования.

Оценки разрешаемых масштабов развитого турбулентного течения показывают, что использование прямого численного моделирования для «лобового» решения инженерных задач невозможно. Наоборот, это инструмент чисто научных исследований. Как и лабораторный эксперимент, численное моделирование может быть использовано для изучения эволюции турбулентных потоков в самых простых геометриях. Возможно, самым крупным успехом пока стало наблюдение структур, порождающих турбулентность [11].

Для того чтобы увеличить доступное значение $\mathrm{Re}_{\lambda_\tau}$ многие исследователи специально моделируют самые простые геометрии. Например, при исследовании однородной изотропной турбулентности используется кубическая расчётная область, на границе которой используются периодические граничные условия. При использовании подобных граничных условий появляется возможность использования эффективных алгоритмов численного решения уравнения Навье–Стокса (так называемые псевдоспектральные методы).

Метод крупных вихрей (LES — Large Eddy Simulation) [61—66] (с фильтрацией масштабов и дополнительным сеточным замыканием) в иерархии численных подходов находится между прямым численным моделированием [67—79] и турбулентными моделями с замыканием [80; 81].

Данные подходы имеют различные достоинства и недостатки, а также различную вычислительную сложность $\mathbb{C}(\mathrm{Re})$.

В отсутствие специальных моделей турбулентности прямое численное моделирование (DNS — direct numerical simulation) требует разрешения от больших масштабов до, по крайней мере, начала диссипативного интервала. Основываясь на соотношении характерных размеров и частот пульсаций в инерционном интервале однородной изотропной турбулентности, можно предложить такую оценку:

$$\mathbb{C}(\mathrm{Re}) \gtrsim \mathrm{Re}^{11/4}. \tag{1.9}$$

Более жёстким является условие, предполагающее, что шаг по времени для явного метода связан с колмогоровским масштабом соотношением Куранта [59], что приводит к

$$\mathbb{C}(\mathrm{Re}) \gtrsim \mathrm{Re}^{3}. \tag{1.10}$$

Вычислительная сложность расчёта течений в каналах оценивается [82] как

$$\mathbb{C}(\mathrm{Re}) \gtrsim L_{\mathrm{X}}^{2} L_{\mathrm{Z}} \mathrm{Re}_{\tau^*}, \tag{1.11}$$

где число Рейнольдса Re_{τ^*} определяется по скорости трения U_{τ^*}, а L_{X} и L_{Y} — обозначают длину канала и расстояние между стенками. Число операций для LES-метода определяется требуемым разрешением части инерционного интервала и, возможно, начала диссипативного, но для изотропных течений может быть оценено [4] как

$$\mathbb{C}(\mathrm{Re}) \gtrsim \mathrm{Re}^{2}. \tag{1.12}$$

Знак «$\gtrsim$» следует воспринимать как «приблизительно или еще хуже».

RANS требует моделирования всех масштабов — однако, в этом случае рассчитываются только средние значения. Как следствие полное число арифметических операций является слабой функцией числа Рейнольдса.

О семействах методов RANS, в явном или неявном виде использующих гипотезу Буссинеска, можно сделать несколько замечаний [4] касательно их недостатков:

— отсутствие корректного учёта мелкомасштабных пульсаций, которые могут взаимодействовать с химической кинетикой, приводит к существенным изменениям в скоростях химических реакций;
— неоднозначность операции усреднения: существует множество течений с одной и той же статистикой, и наоборот, на основе одной и той же статистики может быть сгенерировано множество физических течений;

— основным критерием правильности операции усреднения УНС по Ренойльдсу является демонстрация совпадения результатов модели RANS с усреднением полученных решений исходных УНС. Можно показать, что желаемое равенство достигается лишь в том случае, если в уравнениях RANS используются только точные значения напряжений Рейнольдса, в противном случае норма ошибки скорости (в Гильбертовом пространстве) пропорциональна корню квадратному из нормы ошибки для напряжений Рейнольдса. Как следствие, решения RANS не могут сойтись к усреднённым решениям УНС, независимо от используемой модели, если ошибка по напряжениям Рейнольдса не равна нулю;

— в силу особенностей разложения Рейнольдса пульсационные скорости нельзя считать малыми;

— аппроксимация Буссинеска, связанная с введением вихревой турбулентной вязкости, не является экспериментально подтверждённым результатом; она устанавливает отношение между статистическими, а не физическими свойствами потока. И, таким образом, оказывается несостоятельной в следующих случаях [83]: — течения с резким изменением средних скоростей деформации; — течения (над) вблизи искривленных поверхностей; — течения, в которых существуют возвратные движения, приводящие к отрыву пограничного слоя; — закрученные потоки и стратифицированные жидкости; — трёхмерные течения. Скрытое использование гипотезы Буссинеска приводит к замещению членов адвекции — нелинейных — на диффузионные, таким образом, решаемые уравнения становятся более диссипативными. Последнее помогает вычислениям на компьютере, однако, затрагивает процесс ламинарно-турбулентного перехода;

— использование модели Прандтля еще дальше отдаляет исследователя от действительности [4], так как поведение турбулентного моля (fluid parcel) или вихря отличается от молекул в газе, таким образом, попытка применения кинетической теории является достаточно сомнительной (турбулентное течение не является газом в состоянии локального термодинамического равновесия, а турбулентные моли постоянно (видо)изменяются). Модель оставляет открытым вопрос о выборе пути перемешивания, так как число течений с одним пространственным масштабом не велико, в частности, к ним можно отнести свободные сдвиговые течения, дальний след, слой смешения, затопленные струи (плоский и осесимметричный случай);

— уравнения k–ε-модели, применяемой для совместного расчёта с уравнениями RANS, не могут быть интегрированы до стенки в силу появления сингулярности (неопределённость вида «0/0») в уравнениях модели. Данная проблема решается заданием специальных граничных условий (ГУ) (скорости и т.д.), каким-то образом определяемых на некотором расстоянии от стенки. Кроме того, уравнения оказываются сильно сопряжёнными (strongly coupled) и имеют различные нелинейности, обычно не встречаемые в уравнениях переноса, что поднимает вопросы о существовании и единственности получаемых решений;

— в отличие от методов RANS, можно показать, что метод LES сходится к DNS (таким образом, их решения сходятся к решениям УНС), если пространственный шаг — шаг дискретизации — измельчается. Это обеспечивается, в частности, тем, что с математическое точки зрения основной (единственной) причиной фильтрации является необходимость устранения искажений (aliasing), возникающих вследствие недостаточного сеточного разрешения на грубых сетках.

Основная идея LES состоит в точном расчёте усреднённого течения и больших вихрей энергетического интервала. Мелкомасштабные структуры непосредственно не моделируются, но их влияние на расчётные компоненты параметризуется с помощью некоторой приближённой модели. Успешность применения этого метода основана на том, что поток энергии и информации направлен вниз по спектру в область мелких масштабов, а не в обратном направлении. Мелкомасштабные структуры считаются пассивными, в них лишь происходит диссипация независимо от того, откуда приходит энергия «на съедение».

Таким образом, если отсечь спектр в некоторой промежуточной точке и в ней сделать «сток энергии», то крупномасштабные структуры «не заметят» отсутствия мелких вихрей. Впрочем, некоторые исследователи обращают внимание на то, что случайные флуктуации на малых масштабах приводят к флуктуациям и на больших, вдобавок к уже имеющимся крупномасштабным пульсациям. Метод крупных вихрей оказывается неспособным использовать информацию, идущую от малых масштабов, так как она подавляется. Тем не менее, можно ожидать, что он способен отследить статистические характеристики и типичные когерентные структуры в энергетическом интервале. LES оптимален для использования в тех задачах, где крупные вихри являются особенно важными, они отвечают за основной перенос импульса, тепла, химических загрязнений. В прямом численном моделировании, наоборот, особое внимание уделяется диссипативному и инерционному интервалу. Можно показать [2], что в моделировании крупномасштабных вихрей участвуют только 0.01% спектральных мод, остальные 99.99% приходятся на диссипативный и инерционный интервалы.

По мнению некоторых исследователей [4], метод крупных вихрей является будущим вычислительной гидродинамики. Он позволяет избежать использования зачастую необоснованных моделей параметризации крупных вихрей, хотя и остаётся связанным с оценками машинного времени.

В настоящее время метод крупных вихрей применяется и для решения различных инженерных задач, однако, хотя LES и менее требователен к вычислительным ресурсам, реализовать его гораздо сложнее, чем стандартную k–ε-модель. В ближайшей перспективе метод крупных вихрей не сможет вытеснить схемы с турбулентной вязкостью. Ещё одной преградой на пути реализации метода крупных вихрей является существование граничных поверхностей, вблизи которых основные вихри являются очень маленькими. Для того чтобы встроить погранслой в LES, можно сделать очень мелкую сетку в пристеночной области и приблизится к DNS. Вторым вариантом является использование сопряжённой модели турбулентного пограничного слоя с последующей сшивка с основным алгоритмом.

В заключение перечислим наиболее интересные результаты, полученные прямым численным моделированием и методом крупных вихрей [2]. Большинство подобных исследований посвящено свободному распаду турбулентности и статистически стационарной турбулентности. Основные результаты работ в основном совпадают с феноменологическими представлениями, основанными на экспериментальных данных, в частности показано, что:

(1) пик завихренности в основном приходится на разреженную «сетку» тонких и длинных трубок диаметром порядка колмогоровского и тейлоровского масштабов турбулентности и длинной порядка интегрального масштаба турбулентности;

(2) существование каскада энергии и выполнение «закона пяти третьих» инерционном интервале вихрей;

(3) установлено значение константы Колмогорова $C \approx 2$;

(4) завихренность в среднем совпадает с главной компонентой скорости деформации;

(5) закон распределения вероятности, на который опирается гипотеза М.Д. Миллионщикова, не является гауссовым.

1.2 Классические задачи вычислительной гидродинамики, рассматривающиеся в данном исследовании

С целью проверки созданной реализации схемы КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости были рассмотрены задачи об эволюции двойного вихревого слоя, а также о распаде вихря

Тейлора–Грина. В последующих разделах даётся ряд дополнительных замечаний касательно моделирования неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и трёхмерных вихревых течений.

1.2.1 Численное моделирование неустойчивостей в сдвиговых течениях

Моделирование сдвиговых течений, часто встречающихся в инженерных приложениях (сверхзвуковое смешение в камерах сгорания, затопленные струи), является хорошим способом проверки используемого численного метода на разрешение мелкомасштабных вихревых структур, образующихся, в частности, вследствие развития неустойчивости Кельвина– Гельмгольца. Данная неустойчивость возникает в параллельных сдвиговых слоях, в которых возможна передача энергии [84] от основного течения в энергию возмущений, и может моделироваться в различных постановках. Значительный пласт задач в этой тематике представляет расчёт неустойчивости в потоке, подвергающемся одновременному дестабилизирующему воздействию разрыва скорости в сдвиговом течении и стабилизирующему эффекту стратификации плотности [85—87].

На практике математическое моделирование гидродинамической неустойчивости связано с решением задачи Коши или краевой задачи. В первом случае предполагается, что существует некоторое начальное состояние (каким–то образом приготовленное), которое затем подвергается воздействию неустойчивости и переходит в новое устойчивое состояние. Во втором случае состояние устойчивой стратификации поддерживается на верхней границе потока, и неустойчивость развивается в пространстве. Примерами таких задач являются истечение теплой пресной речной воды в холодное озеро или соленый океан. Во втором случае постановка позволяет исследовать уже готовое состояние течения, не вдаваясь в вопросы его появления в процессе естественной эволюции. Таким образом, отпадает необходимость многократного рутинного решения задачи установления потока при наложении возмущений с различными параметрами.

Исследование неустойчивости свободного сдвигового течения гораздо проще проводить в двумерной постановке, в добавок, такой подход является еще и естественным, так как согласно теореме Сквайра, все гидродинамические неустойчивости имеют двумерную природу (по крайней мере на линейной стадии). Эволюция такой неустойчивости в конечном итоге приводит к генерации двумерной турбулентности, обладающей рядом специфических свойств.

Разработка теорий этого явления начала активно вестись в 60 гг. XX века, результатом чего стало появление известных работ Бэтчелора [88] и Крейчнана [89]. В первой из них изложены основные черты двумерной турбулентности, обладающей [2] прямым каскадом завихренности от больших масштабов к малым, автомодельным энергетическим спектром и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим. Именно Бэтчелор и Крейчнан определили основной круг вопросов теории двумерной турбулентности, остающихся актуальными и поныне.

1.2.2 О моделировании течения Тейлора–Грина

Распад вихря Тейлора–Грина используется в качестве теста для проверки работы численных алгоритмов моделирования турбулентных течений и является классической задачей вычислительной гидродинамики, с помощью которой изучается эволюция завихренности, турбулентный переход и последующий распад турбулентности. В общем случае эволюция течения сопровождается усложнением вихревого поля с образованием разномасштабных вихревых структур и их нелинейным взаимодействием. В исходной постановке [42] течение анализировалось с помощью асимптотических методов, однако, разложение в ряды по времени и числу Рейнольдса [90] не позволяет описать течения при больших временах эволюции t или Re. В настоящее время задача Тейлора–Грина является объектом приложения самых различных численных методов и моделей турбулентности, отличающихся степенью универсальности, порядком точности, дисперсионными и диссипативными характеристиками. Для рассматриваемого течения наиболее конкурентноспособными оказываются спектральные методы: использование специализированного базиса, учитывающего свойства симметрии течения, позволяет повысить точность результатов и эффективность алгоритмов. Действительно, с помощью такого кода [91], использующего разложение по базису тригонометрических функций и метод Галеркина впервые было выполнено моделирование инерционного интервала свободной турбулентности. Быстрая сходимость результатов позволяет точнее моделировать эволюцию мелких масштабов. Если ошибка составляет порядка 5-10%, спектральные методам требуется как минимум в 2 раза меньшее спектральное разрешение [92] по одному направлению или в 8 раз меньше степеней свободы в трёхмерных расчётах в сравнении с методами конечных разностей. Для спектральных методов самой «дорогой» процедурой является оценка правой части уравнений Навье–Стокса, записанной в виде суммы попарных произведений коэффициентов спектрального разложения. Прямое вычисление этой свертки оказывается невозможным в следствие сильной нелокальности обращения к данным, что требует дополнительных приемов для успешного применения этих методов на параллельных ЭВМ с распределённой памятью [61].

Альтернативой могут служить конечно-разностные RANS- и LES-методы: первые из них успешно работают на ансамбле подобных течений [93], для которых имеются хорошо откалиброванные модели, такие как присоединённые пограничные слои и течения без сильных неоднородностей. LES-методы [94], использующие идею разделения скорости на гладкую усреднённую компоненту (которая и является предметом расчёта) и сильно осциллирующую компоненту [61], непосредственно моделируют крупномасштабные структуры, содержащие основную долю турбулентной кинетической энергии. Для передачи эффектов подсеточных масштабов применяются дополнительные алгоритмы, минимизирующие при этом недостатки самой модели. При средних и больших числах Рейнольдса проявляется основной недостаток LES-методов: сеточная сходимость достигается на очень больших и трудоёмких сетках [93].

1.3 Определение и классы термовязких жидкостей (ТВЖ)

Во многих классических задачах гидромеханики физические (материальные) параметры жидкостей часто полагаются постоянными. Характерной особенностью термовязких сред является то, что их поведение определяется взаимодействием полей скорости и температуры. Существование зависимости вязкости от температуры, свойственный реальным жидкостям, становится особенно важным в случае органических и неорганических масел, жидких металлов, полимеров и природной лавы. Отличительным свойством термовязких жидкостей является наличие резкой зависимости вязкости от температуры, а также существование её немонотонного поведения в области химических реакций. Так, в частности, кинематическая вязкость меда в диапазоне 298–372 K изменяется в 125 раз, а вязкость ртути — в 146 раз — [95]. Таким образом, вязкость может меняться на несколько порядков в относительно узком температурном диапазоне.

Проведённые исследования [96] для полистирена, протеинов, яблочного сока и также растительных масел, показывают, что температурная зависимость вязкости для этих веществ может быть описана двух- и трехпараметрическими зависимостями типа Аррениуса:

$$\mu = Ae^{-a_1/RT}, \quad \ln\mu = a_1 + \ln T, \quad \ln\mu = a_1 + a_2/T, \tag{1.13}$$

$$\ln \mu = a_1 + \frac{a_2}{T + a_3}, \quad \ln \mu = a_1 + \frac{a_2}{T} + \frac{a_3}{T^2}, \quad \ln \mu = a_1 + \frac{a_2}{T} + a_3 T, \tag{1.14}$$

кроме того, может использоваться аппроксимация полиномами второго порядка или функция типа больцмановской:

$$\mu = a_1 + a_2 T + a_3 T^2, \quad \mu = a_1 \frac{a_2 - a_1}{1 + e^{(T - a_3)/a_4}}, \tag{1.15}$$

где T —температура, a_1–a_4 — константы, определяемые экспериментально. Первая из серии формул (1.14) хорошо описывает поведение неорганических жидкостей, способных к стеклованию [97], и называется формулой Фогеля–Таммана–Фулчера. Аналогичное соотношение (уравнение Вильямса–Ландела–Ферри) было установлено в [98] для вязкости аморфных полимеров.

Вязкость и реологические свойства [99] являются важнейшими характеристиками тяжёлых топлив, нефтяных остатков и минеральных масел, так как они оказывают влияние на сложность и продолжительность нефтеналивных операций, условия транспортировки, в том числе на гидравлические характеристики при прокачке по трубопроводам.

Одним распространённых методов модификации реологических свойств тяжёлых сырых нефтей и продуктов их переработки является тепловой нагрев. В серии экспериментов авторы [99] показали существование различных температурных эффектов, возникающих при протекании химических реакций вследствие присутствия резино-асфальтеновых веществ, к числу которых следует отнести обнаружение «отрицательной» аномалии вязкости. После термообработки происходит резкое изменение реологических характеристик, связанное с существенным увеличением вязкости — таким образом, в противовес общепринятым суждениям, тепловая обработка не всегда приводит к улучшению реологических свойств. В [100] были продолжены исследования конечной вязкости углеводородов для двух образцов, имеющих различный состав механических примесей, асфальтенов, парафинов, а также смол, однако, помимо термостатического нагрева применялся нагрев в радиочастотном и микроволновом диапазонах. Тепловой и микроволновый нагрев привел к значительному росту вязкости (более чем в четыре раза) в диапазоне 40–60°C, что связано в фазовым переходом, который испытывают пространственные структуры молекул составляющих веществ (парафинов). Как только температура превышает некоторое критическое значение, структурно изменённые частицы асфальтенов не могут быть полностью сольватированы смолистыми веществами. В результате усиливается поглощение других коллоидных частиц, в частности, микрокристаллов парафинов. Таким образом, при адсорбции молекул асфальтенов на поверхности парафиновых кристаллов появляются прочные пространственные структуры. При большей температуре обработки происходит расплавление кристаллов парафинов и адсорбция асфальтенов становится невозможной. Новые микрокристаллы парафинов появляются при температуре ниже температуры плавления.

Сера находит применение в таких отраслях промышленности как энергетика, космическая техника, радиоэлектроника, химическая технология. В частности, она может использоваться как теплоноситель в тепловых трубах, а также характеризуется как относительно малотоксичный материал с малой чувствительностью к ионизирующим излучениям. В работе [17] проводились высокоточные измерения её динамической вязкости в зоне резкого изменения $T = 350$–1000 K. Вязкость жидкой серы убывает от точки плавления до температуры $T = 428$ K, а в интервале температур $T = 432$–469 K возрастает на 4 порядка. Дальнейшее снижение T приводит к постепенному уменьшению вязкости, однако, даже в области высоких температур вязкость расплава остаётся аномальной. Полимеризация расплава жидкой серы не имеет аналогий среди простых жидкостей и классифицируются как фазовый переход закритического типа.

По форме кривой теплоемкости в окрестности температуры 423 K фазовый переход также называется λ-переходом.

В работе [101] рассматривается процесс стекания жидкой пленки со следующим аппроксимациями вязкости:

$$\mu = a_1(T - a_2) + a_3, \quad \mu = a_1 e^{-a_2 \frac{T - a_3}{a_3}}, \quad \mu = e^{\frac{a_1 a_2^2}{a_3}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{a_2}\right)} \tag{1.16}$$

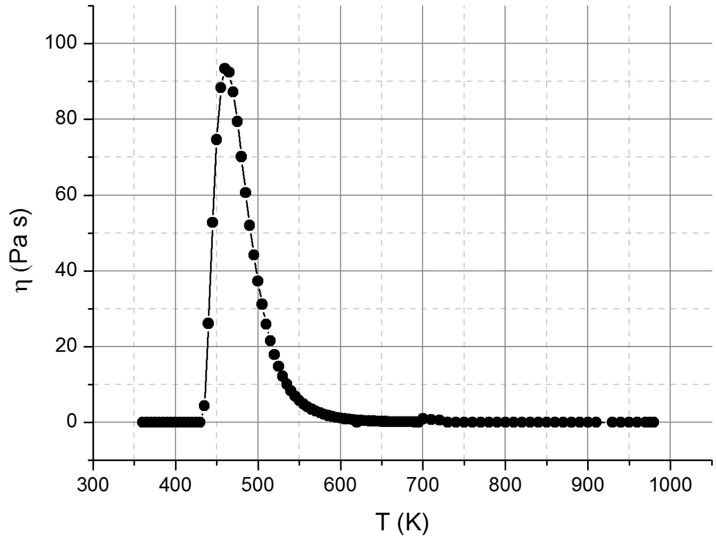


Рисунок 1.1: Температурная зависимость динамической вязкости жидкой серы по результатам измерений [17].

В статье [102] авторы рассмотрели стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности полубесконечной пластины с учётом химических реакций, используя соотношения для обратной вязкости:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_\infty}\left(1 + a_1(T - T_\infty)\right), \tag{1.17}$$

где $a_1 > 0$ для жидкостей и $a_1 < 0$ для газов.

В работе [103] исследуются водные растворы поваренной соли, на основе удобной аппроксимации вязкости воды в широком диапазоне температур (0–325°C) и давлений (0.1–40) МПа:

$$\mu = \mu_0(\tau + 1)^2 e^{\sum\limits_{i=0}^{10} c_i \tau^i} + \pi \sum_{i=0}^{10} d_i \tau^i, \tag{1.18}$$

где $\tau = (\frac{T}{T_0} - 1)$, $T_0 = 293.15$, $\pi = p - p_0$, p_0 — давление насыщенного водяного пара, c_i, d_i — табличные константы, подлежащие определению.

Работа [104] посвящена устойчивости неизотермического течения в канале между двумя параллельными теплопроводными пластинами с использованием экспоненциальной зависимости вязкости $\mu = e^{b(T-T_0)}$, где b, T_0 — эмпирические константы.

В работе [105] проведены измерения вязкости различных расплавов стекол в соответствующих координатах — $\left(T - T_0, \frac{T-T_0}{\ln(\mu(T)/\mu(T_0))}\right)$, результаты которых показывают, что у некоторых сортов боросиликатных стекол при $\Delta[T - T_0] = 12\ K$ изменение ординаты составляет $\Delta\left[T - T_g/\ln(\mu(T)/\mu(T_0))\right] = 250$ K. Таким образом, $\ln(\mu(T)/\mu(T_g)) \approxeq 21$.

Подробный ретроспективный обзор аппроксимаций вязкости, начиная с О. Рейнольдса, можно найти в статье Ситона (Seeton) [106], кроме того, им была предложена новая широкодиапазонная функциональная зависимость.

Работа [107] освещает некоторые особенности установившегося движения жидкости в плоском канале бесконечной длины с вязкостью, зависящей от температуры по обратному степенному закону $\mu = \mu_0 T_0/T^m$. В предположении постоянной температуропроводности и малости тепловыделения из-за вязкой диссипации уравнения движения и энергии сводятся к системе ОДУ. Авторы указывают на возможность существования автомодельных решений. С использованием метода конечных разностей при различной интенсивности теплообмена на стенке было установлено, что зависимость

Таблица 1: Вязкость расплава силиката калия при атмосферном давлении.

T, ° C	1000	1100	1200	1300
η, пуаз	21652	5012	1778	661

числа Пекле не является однозначной функцией безразмерной вариации давления. Особого внимания заслуживает факт появления точки перегиба в профиле скорости при достаточно интенсивном теплообмене.

Кинематическая вязкость воды в диапазоне температур 10–90°C может быть представлена в виде обратной линейной функции [108]. С учётом этого обстоятельства на основе приближения Буссинеска авторами аналитически решена задач о свободной и вынужденной конвекции жидкости в двумерной постановке.

В работе [109] представлены измерения кинематическое вязкости расплавов $\mathrm{Cu}_{100-x}\mathrm{Al}_x$, $x = 0 - 100\%$ в диапазоне от температуры плавления до 1100–1450°. Кривая зависимости вязкости от температур имеет простую экспоненциальную форму, предсказываемую активационными теориями вязких течений. Сходным образом [110] описывается и зависимость вязкости расплавленного чугуна и низкоуглеродистой стали, расплавов Fe–Si [111].

Вязкость магматических расплавов С точки зрения существования резкой зависимости вязкости от температуры особый интерес представляют собой магматические расплавы. Детальный анализ концентрационной, температурной и барической зависимости таких гранитно-флюидных систем дан в [18]. С относительно высокой точностью (±10%) в интервале температур $T =$ 800–1450°C и давлений жидкости до 400 МПа изучалась вязкость модельных расплавов ($\mathrm{K_2O \cdot 4SiO_2}$; $\mathrm{K_2O \cdot 4SiO_2 + Ar + H_2O}$; $\mathrm{Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 6SiO_2}$; $\mathrm{Na_2O + Al_2O_3 \cdot 6SiO_2 + H_2O}$; $\mathrm{Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 6SiO_2 + Ar}$), а также расплавов горных пород (гранит + H_2O; гранит + H_2O + HCl; гранит + H_2O + HF; гранит + H_2O +NaCl). Одним из образцов, проявляющим сильные термовязкие свойства, является расплав силиката калия, для него зависимость динамической вязкости от температуры описывается законом Аррениуса (первая из формул (1.13)). В таблице 1 представлены экспериментальные результаты по вязкости расплава силиката калия при атмосферном давлении, показывающие, что в относительно узком интервале температур $\Delta T = 300$ K она падает в 32.8 раза. Геологические наблюдения дают основания полагать, что смешение базальтовых магм является достаточно быстрым процессом [112], в то время как риолиты (магматическая горная порода кислого состава, вулканический аналог гранита) и базальты могут проходить через вулканические трубки, практически не смешиваясь. Разница вязкости базальтовых магм редко превышает один порядок, это же отношение в случае кислых магм и основных (базальтовых) может достигать 5–7 порядков. Объяснение слабого смешения даётся в Разделе 5.2 в контексте обсуждения результатов работы [112].

Минеральные масла Для экспериментального изучения термовязких жидкостей, рассмотренных ранее (расплавы стекол, сера, расплавы силикатов), необходим нагрев большого количества рабочей среды до достаточно высоких температур ($T = 900$–1500 K), что вызывает дополнительные трудности при создании экспериментальных стендов. В связи с этим представляется целесообразным использовать жидкости, у которых «вязкий переход» (зона резкого изменения вязкости) приходится на диапазон умеренных температур ($T = 243$–393 K), достижимый обычными промышленными холодильниками и нагревателями, — минеральные индустриальные и моторные масла.

Кинематическая вязкость трансформаторных масел различных марок (ТК ОКП, Т-750 ОКП, Т-1500 ОКП, ПТ, ГК, ТСО) для характерных температур — 50°C, -30°C изменяется в одном и том же диапазоне — 1600–8 сСт.

Более предпочтительными с точки зрения экспериментальных исследований являются высоковязкие индустриальные и вакуумные масла. Паспортные данные индустриального масла И-50 указывают на более высокое значение кинематической вязкости по сравнению с трансформаторными при температуре 40°C — 90–110 сСт. Вакуумные масла ВМ-5 и ВМ-6 имеют наивысшие показатели по вязкости среди вакуумных масел при 20°C — 70 сСт и 220 сСт соответственно. Важным преимуществом вакуумных масел является высокая температура застывания (не выше −12°C). Также в экспериментальных исследованиях возможно применение широко распространённых трансмиссионных масел ТЭП-15 ($\mu_{T=100°C} = 157$ сСт, $\mu_{T=-15°C} = 2105$ сСт) и ТСП-10 ($\mu_{T=100°C} = 109$ сСт). Характерной особенностью рассмотренных жидкостей является то, что наиболее подходящие из них являются непрозрачными в видимом диапазоне, — для их изучения требуется применение специальной диагностики, в частности, ультразвуковых методов [113].

Очевидно, что как для лабораторных, так и вычислительных экспериментов паспортных данных рабочих сред оказывается недостаточно, таким образом, необходимы дополнительные измерения вязкости с применением термостатирования.

Вакуумное масло ВМ-6 используется для механических вакуумных насосов, работающих при остаточном давлении до 1.0–3.0 $\times 10^{-1}$ Па, и вырабатывается из малосернистых беспарафинистых нефтей путём глубокой очистки из их узких фракций и применением 1–2 ступеней тонкой вакуумной дистилляции [114]. Следует отметить, что при низких температурах ($T < 2°C$) масло ВМ-6 по внешнему виду и вязкостным свойствам представляет собой пластичную смазку, при этом в области −2–0°C наблюдается переход к «жидкости». На рисунке 1.2 в безразмерном виде представлены зависимости трансформаторного масла марки ГК, вакуумного масла марки ВМ-6, а также медицинского вазелина от температуры.

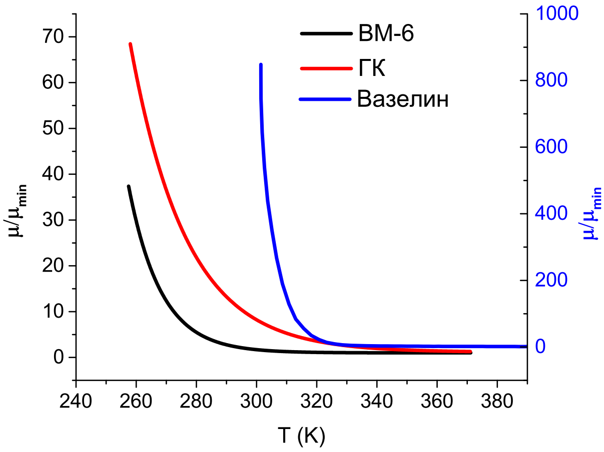


Рисунок 1.2

Рисунок 1.3: Зависимость динамической вязкости от температуры для трансформаторного масла марки ГК и для вакуумного масла ВМ-6, а также медицинского вазелина.

1.4 Исследование особенностей течений термовязкой жидкости

За последнее время в России наиболее интересные результаты по динамике термовязких жидкостей были получены С.Ф. Урманчеевым [16] и его коллегами. В частности, в работе [115] представлены результаты численного исследования плоского течения жидкостей с модельной немонотонной зависимостью кинематической вязкости от температуры в форме гауссиана

$$\nu(T) = \nu_{\min}\left(1 + A\exp\left(-B(T - T_*)^2\right)\right), \quad A = \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} - 1, \quad T_* = \frac{T_0 + T_w}{2}, \tag{1.19}$$

где $\nu_{\max}$ и $\nu_{\min}$ — максимальная и минимальная кинематические вязкости в температурном диапазоне $[T_0, T_w]$. Рассмотрена задача о втекании нагретой жидкости в канал с охлаждаемыми стенками без учёта саморазогрева жидкости (объёмного тепловыделения) от сдвиговых напряжений.

Установлено, что по мере охлаждения жидкости в канале для любого плоскопараллельного слоя достигается такой диапазон температур, что вязкость в нём принимает значения, близкие к максимальным, таким образом, по сечению канала возникает «вязкий барьер» — «пробка» из вязкой жидкости, которая перекрывает всё поперечное сечение канала. Существование вязкого барьера приводит к вытеснению массы жидкости из пристеночных слоёв к оси канала и соответствующему увеличению продольной скорости в центральной зоне. Следует отметить очевидную связь рассматриваемого течения с задачами вулканологии [116].

В статье [117] рассматривается тепловая конвекция термовязкой жидкости в квадратной области с горизонтальными изотермическими и вертикальными адиабатическими стенками. Квадратичная зависимость динамической вязкости от температуры вида

$$\mu = 4\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} - 1\right) T^2 + 1 \qquad (1.20)$$

имитирует реологические свойства водных растворов метилцеллюлозы, использующиеся для повышения нефтеотдачи пластов. С ростом температуры до точки начала гелеобразования раствор метилцеллюлозы ведет себя как обычная жидкость, вязкость её убывает, однако, за пределами критической точки — резко возрастает. Авторы исследовали теплообмен на изотермических стенках, а также глобальную структуру течения в зависимости от числа Релея. Показано, что для квадратичной зависимости вязкости от температуры минимальное критическое число Релея почти в три раза превосходит теоретическое значение, полученное в для случая постоянной вязкости. Установлено существование трёх стационарных режимов тепловой конвекции: одновихревого, симметричного двухвихревого и асимметричного двухвихревого. Эти режимы последовательно сменяются периодическими, квазипериодическими и хаотическими режимами конвекции, а немонотонная зависимость вязкости от температуры ухудшает теплообмен на изотермических стенках.

При втекании в канал с охлаждаемыми стенками нагретой жидкости с монотонно убывающей зависимостью вязкости [118] от температуры экспоненциального типа может происходить скачкообразное увеличение расхода жидкости с ростом перепада давления. Причина этого явления состоит в том, что рост перепада давления приводит к уменьшению влияния теплообмена и, соответственно, степени прогрева сечения канала. При этом происходит размыкание изолиний вязкости, и высоковязкая область потока разделяется на две зоны, примыкающие к стенкам канала, а осевая область канала по всей его длине оказывается занятой жидкостью с температурой, близкой к исходной, и с малой вязкостью. При втекании аномально термовязкой жидкости, нагретой выше температурной аномалии вязкости, в канал, содержащий ту же жидкость, при температуре стенок канала ниже температурной аномалии вязкости, обнаружена зависимость режима установления течения жидкости от интенсивности теплообмена (числа Нуссельта Nu) на стенках канала: поршневой режим (1), при котором в силу малости теплообмена ($\mathrm{Nu} < 0.15$) нагретая жидкость вытесняет холодную, «вязкий барьер» перемещается по длине канала до выхода за его пределы, что приводит к резкому росту расхода жидкости с температурой, равной температуре втекания; режим стабилизации (2) — $0.15 < \mathrm{Nu} < 0.3$ движение «вязкого барьера» прекращается, а расход жидкости оказывается на минимальном уровне. При $0.3 < \mathrm{Nu} < 5.0$ имеет место колебательный (3) режим изменения расхода жидкости по времени. При больших значениях числа Нуссельта течение устанавливается с величиной расхода (4), соответствующей случаю граничных условий первого рода.

Численное моделирование [119] свободной конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке позволило изучить влияние параметров аномалии вязкости на режимы конвективных течений и интегральные коэффициенты теплоотдачи в плоской ячейке, подогреваемой снизу, с вертикальными теплоизолированными границами. Обнаружены области параметров, при которых существует «вязкий барьер», оказывающий влияние на тепломассоперенос. Выявлены зоны параметров задачи, при которых аномалия вязкости не влияет на картину течений. Кроме того, существуют режимы, при которых «вязкий барьер» является либо стационарным, либо динамически изменяется и взаимодействует с течением, имея при этом периодический характер.

Температурная зависимость вязкости жидкости может оказать влияние на устойчивость ламинарного режима течения [26; 120] в плоском канале с неоднородным распределением температуры. Авторами были получены аналитические выражения, описывающие профили скорости в невозмущённом состоянии для линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры, а также система уравнений для амплитуд возмущений скорости и температуры, которая в случае изотермического течения может быть сведена к классическому уравнению Орра–Зоммерфельда. Исследование спектров собственных значений для ламинарных течений с различными зависимостями вязкости жидкости от температуры обнаружило значительные различия между спектрами собственных значений для течения термовязкой жидкости и жидкости с постоянной вязкостью. Кроме того, было показано, что учёт температурной зависимости вязкости жидкости оказывает существенное влияние на устойчивость ламинарного течения жидкости.

Касательно формы профилей, полученных для двух зависимостей вязкости, можно заметить, что при слабом влиянии экспоненты профиль скорости должен совпадать со случаем линейной зависимости вязкости от температуры, так как экспоненциальная зависимость на начальной стадии может разложена в ряд Тейлора по степеням «термовязкого» параметра.

Несмотря на то, что исследования [26; 120] представляют интерес, они, к сожалению, не являются пионерскими в вопросах влияния резкой температурной зависимости динамической вязкости жидкости на устойчивость течений, — исторический приоритет здесь имеют работы [22—25]. Более подробный разбор указанных работ приводится в Разделе 2.3, посвящённом решению задачи устойчивости для течения ТВЖ.

1.4.1 Изучение процессов смешения в ТВЖ

Некоторые исследования показали [121; 122], что гидродинамика мелких масштабов в значительной степени подвержена крупномасштабным движениям. Эта связь оказывается особенно сильной в течениях с вязкой стратификацией, где в зависимости от условий реализации течения переменная вязкость может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее воздействие на развитие возмущений. Вместе с тем, согласно базовым предположениям [123] широко применяемой теории K41 Колмогорова при больших числах Рейнольдса статистические свойства турбулентности в инерционном и диссипативном интервале не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации ε, кинематической вязкостью ν и самим масштабом l (гипотеза №1), в инерционном интервале число определяющих параметров уменьшается до двух – скорости диссипации и масштаба (гипотеза №2). Из этих положений вытекает неявное следствие, заключающееся в том, что вязкость оказывается существенной лишь на малых масштабах, и, следовательно, не должна иметь определяющего влияния на процесс крупномасштабного смешения. В результате в подавляющем большинстве работ рассматриваются потоки однородной жидкости или течения со стратифицированной плотностью.

Вместе с тем оказывается, что в спутном [124] течении двух жидкостей с разными кинематическими вязкостями процесс смешения отличается многомасштабностью, тогда как в течениях с постоянной вязкостью происходит генерация обычных вихрей Кельвина–Гельмгольца. Авторами [124] было предложено феноменологическое описание процесса смешения, при котором моли окружающей жидкости вследствие различных неустойчивостей увлекаются в затопленную струю, создают дополнительное сопротивление потоку жидкости, замедляя основное течение и приводя к пульсациям радиальной скорости (неустойчивость в следе).

Греа (Grea) и др. [21] исследовали распад несжимаемой однородной изотропной турбулентности в жидкости, обладающей переменной вязкостью, которая полагалась линейно зависящей от скаляра, в качестве которого может выступать температура или концентрация, подчиняющиеся уравнению адвекции-диффузии.

При высоких числах Рейнольдса прямое численное моделирование позволило подтвердить справедливость постулата Тейлора [125] о том, что диссипация не зависит от вязкости и её флуктуаций.

При низких числах Рейнольдса авторы показали существование дополнительной кинетической энергии, что является следствием эффектов переменной вязкости. Таким образом, подразумевается, что турбулентная кинетическая энергия в жидкостях с переменной вязкостью спадает медленнее со временем.

Кроме того, установлено, что второй дополнительный член в уравнении для диссипации ТКЭ является знакопостоянным и снижает скорость диссипации в потоке, а влияние переменной вязкости приводят к существенному сокращению её «эффективного» значения, оказывающегося пропорциональной дисперсии флуктуаций вязкости.

Объяснение данному явлению даётся с точки зрения статистического подхода, указывающего на существование «эффективного» числа Рейнольдса, которое оказывается большим, чем для потока со средней, но постоянной вязкостью. Этот факт согласуется с общей феноменологией, наблюдаемой при больших числах Re, так как дополнительная энергия содержится в малых масштабах, что находит свое отображение спектрах кинетической энергии. Также наблюдается, что участки с интенсивной кинетической энергией могут выживать в областях, соответствующих малой вязкости. Таким образом, турбулентные вихри являются ограниченными и вращаются только в областях малой или почти однородной вязкости. В этом контексте, развитие «хвостов» в спектре может быть интерпретировано как возвращение (восстановление) роли членов, отвечающих за турбулентный перенос, по сравнению с вязкими членами.

На некоторых режимах течения турбулентность может поддерживать себя дольше, то есть участки с большой вязкостью являются ламинарными, а турбулентная кинетическая энергия выживает и может переноситься к малым масштабам. Такую турбулентность, сочетающую в себе ламинарную и турбулентную «фазы» можно назвать очаговой («lumpy»).

В работе [112] исследовалось влияние вязкости на процесс смешения в том случае, если маловязкая турбулентная струя впрыскивается в более вязкую жидкость. В зависимости от выбранного соотношения вязкостей $R_\nu = 1$–400 наблюдались существенные различия в процессе смешения: если вязкости двух жидкостей приблизительно равны, турбулентность в затопленной струе приводит к интенсивному перемешиванию, в результате чего образуется слой смешения со стратифицированной вязкостью, если же отношение вязкостей превышает $R_\nu = 400$, то сколь-нибудь заметного макроскопического смешения жидкостей не происходит. В последнем случае выходит так, что большой импульс инжектируемой жидкости не передаётся более вязкой окружающей среде (host fluid), так как величины напряжений от возмущения на межфазной границе оказываются не достаточно велики для преодоления вязких напряжений, его подавляющих. В продолжение исследования Кэмпбелла (Campbell) и Тёрнера (Turner) с применением методов LIF и PIV были измерены характеристики [20] (дисперсия скаляра и моменты скорости в осевой плоскости) турбулентной затопленной маловязкой струи в более вязкую при $Re = 2000$ в диапазоне отношения вязкости $R_\nu = 1$–55. В целом, авторы подтвердили результаты [112], связанные с существенным уменьшением растекания (и смешения) струи при наличии сильного разрыва вязкости $R_\nu \geqslant 20$. Обнаружено, что при $R_\nu = 45$ в струе наблюдается последовательность вложенных структур, напоминающих наконечник стрелы. Причём, чем дальше проникает струя, тем плотнее «упаковка» когерентных структур, что приводит к очень существенному подавлению мелкомасштабного течения на больших дистанциях, а также к выдавливанию включений высоковязкой жидкости из осевой зоны, которые были захвачены ранее.

В работе [126] представлено феноменологическое и статистическое описание самых ранних стадий временной эволюции слоя смешения, в которой медленно движущаяся (покоящаяся) жидкость в $R_\nu = \nu_{\mathrm{low}}/\nu_{\mathrm{high}}$ раз является более вязкой, чем быстродвижущаяся. Прямое численное моделирование было выполнено для двух отношений вязкости $R_\nu = 1$ и $R_\nu = 9$, без стратификации по плотности. В качестве безразмерного критерия выступает число Рейнольдса, определяемое по начальной толщине потери импульса $\delta_{\theta,0}$ и средней вязкости ν_{ref}, т.е. $Re_{\delta_{\theta,0}} = U_0\delta_{\theta,0}/\nu_{ref} = 160$, $\nu_{ref} = \nu_{low} + \nu_{high}$ для потока с постоянной вязкостью и $Re_{\delta_{\theta,0}} = 16, 32$ для переменной вязкости. Показано, что в последнем случае влиянию вариации вязкости подвержены не только малые масштабы турбулентного движения, но и усреднённый профиль скорости, деформация которого происходит вследствие одновременного воздействия градиентов средней скорости и вязкости. В случае потоков с переменной вязкостью наблюдается ускоренный переход у турбулентности со слабовыраженными когерентными периодическими движениями. Кроме того, подтверждается то предположение, что временная эволюция толщины потери импульса описывается двумя параметрами — числом Рейнольдса и отношением вязкостей. течении термовязкой жидкости в канале может наблюдаться появление дополнительной точки перегиба. В процессе смешения наблюдается большое количество мелких вихревых трубок, вытянутых по потоку, соединяющих крупные поперечные свертки завихренности (rollers).

1.4.2 Постановка задачи об исследовании устойчивости и турбулентности в ТВЖ

Проведённый обзор показывает, что изучение особенностей течения ТВЖ затрагивает вопросы реологии, теории гидродинамической устойчивости, тепломассообмена в течениях с развитой завихренностью, а также турбулентной теории. Несмотря на существование подробных работ [16; 23—25], исследования в данной тематике трудно считать завершенными.

В частности, большинством исследователей не уделено внимание факту возникновения точки перегиба в профиле скорости, которая может наблюдаться в некотором диапазоне определяющих параметров, что делает целесообразным рассмотрение данного течения с позиции теоремы Релея (хотя и в присутствии вязкости) и теории гидродинамической устойчивости, в особенности в случае больших градиентов вязкости в установившемся течении. Попытка связать математические особенности термовязкого профиля с классом невязких неустойчивостей (inviscid instabilities), а также свойствами линейной устойчивости течения, явилось отправной точкой предлагаемого исследования. Установленная связь характеристик установившегося профиля ТВЖ и областей нейтральной устойчивости сделала актуальным изучение задач смешения с помощью непосредственного моделирования эволюции течений ТВЖ на основе современных методов вычислительной гидродинамики, призванных дать ответ на вопрос о связи формы профиля скорости с областями наиболее интенсивного развития возмущений, крупномасштабного смешения и характеристиками турбулентности.

Рассмотренные результаты моделирования влияния резкой температурной зависимости динамической вязкости жидкости на характеристики течений [21; 126] в основном связаны со случаем развитой турбулентности и свободных сдвиговых течений и не рассматривают процесс «разрушения» основного течения и крупномасштабного смешения, — данное обстоятельство также во многом определило характер решаемых задач.

Отдельным направлением является исследование характеристик, созданных программных реализаций схемы КАБАРЕ, использующих приближение слабой сжимаемости, так как, очевидно, что собственные (в т.ч. диссипативные и дисперсионные) характеристики численного метода оказывают непосредственное влияние на результаты численных исследований.

Глава 2. Свойства напорных течений термовязкой жидкости. Устойчивость течений термовязкой жидкости

2.1 Одномерное установившееся движение термовязкой жидкости

Рассмотрим течение ТВЖ в бесконечном плоском канале, стенки которого поддерживаются при постоянной, но различной температуре (T_1) и ($T_1 + \Delta T$), на основе уравнений неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{2.1}$$

Навье–Стокса

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma, \tag{2.2}$$

и энергии

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \vec{\mathcal{Q}} + \sigma : \nabla \vec{v}, \tag{2.3}$$

где $\vec{\mathcal{Q}} = -\lambda \nabla T$ — вектор теплового потока, σ — девиаторная часть тензора вязких напряжений, в предположении несжимаемости, одномерности (в направлении X) и стационарности течения, постоянства градиента давления $\partial p / \partial x = \Delta p / L_{\mathrm{X}}$, отсутствия тепловыделения вследствие работы сдвиговых напряжений и зависимости других материальных коэффициентов от температуры. При изложенных выше предположениях уравнение энергии даёт линейное распределение температуры между стенками канала. Таким образом, необходимо решить лишь одно уравнение второго порядка в полных производных по y для компоненты скорости u:

$$\frac{d^2 u}{d^2 y} + \frac{1}{\nu(T)} \frac{du}{dy} \frac{dT}{dy} \frac{d\nu(T)}{dT} - \frac{1}{\rho \nu(T)} \frac{\Delta p}{\Delta L} = 0. \tag{2.4}$$

Вязкость некоторых термовязких сред может быть представлена в виде следующей функции температуры ([118; 127]): $\nu(T) = \nu_0 e^{-\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$. При условии $|T - T_0| < T_0$ показатель экспоненты можно линеаризовать: $\nu(T) = \nu_0 e^{\beta \frac{T - T_0}{T_0}}$ (данный прием носит название преобразования Франк–Каменецкого — [19]).

$$\frac{d\nu(T)}{dT} = \nu_0 \frac{\beta}{T_0} e^{\beta \frac{T - T_0}{T_0}} \tag{2.5}$$

Проведём обезразмеривание уравнения для профиля скорости, используя характерную скорость U_0, высоту канала L_{Y}:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{y}^2} \frac{U_0}{L_{\mathrm{Y}}^2} + \frac{\Delta T \beta U_0}{T_0 L_{\mathrm{Y}}^2} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{y}} - \frac{\Delta p}{\rho L_{\mathrm{Y}} \nu_0} e^{-\beta \frac{T - T_0}{T_0}} = 0, \tag{2.6}$$

знак «тильда» над безразмерными переменными в дальнейшем можно отбросить.

С учётом того, что температура — линейная функция высоты канала

$$T = \frac{\Delta T}{L_{\mathrm{Y}}} y + T_1, \tag{2.7}$$

получим:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} + \alpha \frac{du}{dy} - C e^{-\alpha \eta} = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где введены следующие обозначения $\alpha = \frac{\Delta T\ \beta}{T_0}$, $C = \frac{H_0^2}{\rho\ \nu_0\ u_0}\frac{\Delta p}{\Delta L}e^{\frac{-\beta(T_1-T_0)}{T_0}}$ $(C < 0)$. Интегрирование удобно производить в следующем виде:

$$\frac{d}{dy}\left(e^{\alpha y}\frac{dU}{dy}\right) = C \tag{2.9}$$

Решением уравнения является функция:

$$U(y) = -\frac{Ce^{-\alpha y}}{\alpha(-1+e^{\alpha})}(1 - e^{\alpha y} - y + ye^{\alpha}) \tag{2.10}$$

Следующая замена

$$\alpha = -K_1, \quad y = \frac{1}{2}\left(\hat{y}+1\right), \quad C = -2,$$

с учётом граничных условий сводит полученное решение к формуле (3.6) из работы [128].

Локальное число Рейнольдса, рассматриваемое по переменным вязкости и скорости будет иметь вид:

$$Re_3 = -\frac{Ce^{-2\alpha y}(1 - e^{-\alpha y} - y + ye^{\alpha})}{\alpha(-1+e^{-\alpha})e^{\beta\frac{(T_1-T_0)}{T_0}}} \cdot \frac{L_Y U_0}{\nu_0}. \tag{2.11}$$

Рассматривая форму профиля на рисунок 2.1, можно обратить внимание на то, что на участке, прилегающем к холодной стенке $(y = 0)$ наблюдается изменение выпуклости профиля скорости. Таким образом, можно найти условия точки перегиба y_{i^*} при $\alpha = 0$.

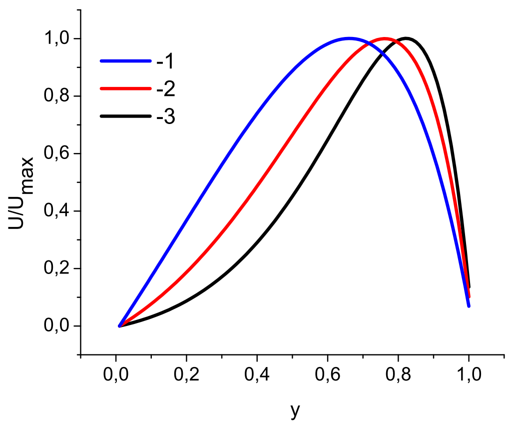


Рисунок 2.1: Безразмерный профиль скорости $U/U_{\max}$ с экспоненциальной зависимостью при $\alpha = -1,\ -2,\ -3$, виден процесс изменения выпуклости профиля скорости на участке, прилегающем к холодной стенке $y \to \infty$.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dy}|_{y=y_{i^*}} = 0, \\ \frac{d^2U}{d^2y}|_{y=y_{i^*}} = 0, \\ y_i \in (0,1). \end{cases} \tag{2.12}$$

Совокупность условий (2.12) приводит к трансцендентному неравенству, для выполнения которого при $\alpha \neq 0$ необходимо потребовать $\alpha > 1.5936$ — для множества положительных значений и $\alpha < -1.5936$ — для множества отрицательных. В результате, существование точки перегиба для конкретной термовязкой жидкости определяется исключительно абсолютным перепадом температур, независимо от своего знака.

Полученное решение показывает, что в термовязкой жидкости может реализоваться профиль скорости с перегибом, что, в соответствии с теоремой Рэлея, делает его интересным объектом исследований с точки зрения теории устойчивости.

2.2 Задача о длине установления плоского течения термовязкой жидкости

Перейдем к рассмотрению задачи о длине установления профиля скорости ТВЖ в плоском канале, когда динамическая вязкость μ является функцией пространственных координат, а распределение температуры является линейным (2.7). Запишем уравнения Навье–Стокса для стационарного течения несжимаемой жидкости:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right). \tag{2.13}$$

Считая движение одномерным, а также $\mu = \mu(y)$ получим следующее уравнение:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{2.14}$$

Обезразмерим уравнение следующим образом:

$$\mu = \mu_0 f(y), \quad u = U_0\tilde{u}, \quad x = L_{\mathrm{X}}\tilde{x}, \quad y = L_{\mathrm{Y}}\tilde{y}, \quad p = P_0\tilde{p}, \quad \tilde{y} \in [0;1], \tag{2.15}$$

опустив значок «тильда», обозначающий безразмерные переменные и координаты, и введя следующие обозначения безразмерных комплексов:

$$\mathrm{Eu} = \frac{P_0}{\rho u_0^2} \text{ — число Эйлера, } \mathrm{Re}_0 = \frac{\rho U_0 L_{\mathrm{Y}}}{\mu_0} \text{ — число Рейнольдса,} \tag{2.16}$$

уравнение (2.14) можно будет переписать в следующем виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{Eu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial f(y)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{2.17}$$

Функция $f(y)$ в такой постановке имеет вид $f(y) = e^{\frac{\beta}{T_0}(T-T_0)} = e^{\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}e^{\frac{\beta\Delta T}{T_0}y}$, в связи с чем можно ввести новое обозначение $\mathrm{Re}^* = \mathrm{Re}_0 e^{-\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}$ и $\alpha = \frac{\beta\Delta T}{T_0}$. Так как рассматривается установившееся течение, то необходимо потребовать $\frac{\partial p}{\partial x} = \mathbb{C}$. Таким образом, уравнение приобретает следующий конечный вид:

$$\mathrm{Re}^* u\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{Re}^*\mathrm{Eu}\mathbb{C} + \alpha e^{\alpha y}\frac{\partial u}{\partial y} + e^{\alpha y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{2.18}$$

Полученное уравнение относится к классу эллиптических и может решаться итерационными методами. Однако при течении жидкости в канале при отсутствии возвратных движений

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и членом в правой части неравенства можно пренебречь, — что переводит новое уравнение в класс параболических:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x} = D + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{\alpha y}}{\mathrm{Re}^*}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad D = -\mathrm{Eu}\mathbb{C}, \tag{2.19}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$u(x{,}0) = u(x{,}1) = 0; \quad u(0{,}y) = u_0(y), \tag{2.20}$$

где $\mathrm{Eu} \approx 1$ — число Эйлера, Re^* — локальное число Рейнольдса, определяемое по вязкости при $y = 0$. Применим интегро-интерполяционный метод, предложенный в [129], для построения разностной схемы уравнения (2.19) . Введем следующие обозначения:

$$W = -k(y)\frac{\partial u}{\partial y}, \quad k(y) = \frac{e^{\alpha y}}{\mathrm{Re}^*}. \tag{2.21}$$

Запишем уравнение баланса для прямоугольника $(x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}, y_{i-1/2} \leqslant y \leqslant y_{i+1/2})$

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \frac{1}{2}\left[u^2(x_{j+1},y) - u^2(x_j,y)\right] dy =$$
$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[W(x,y_{j-1/2}) - W(x,y_{j+1/2})\right] dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} D\,dy\,dx. \quad (2.22)$$

Возьмём простейшие формулы:

$$\int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \frac{1}{2}\left[u^2(x_{j+1},y) - u^2(x_j,y)\right] dy \approx \frac{\Delta y}{2}\left[u^2(x_{j+1},y_i) - u^2(x_j,y_i)\right], \quad (2.23)$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{W}{k}, \quad y_{i-1} < y < y_i, \quad (2.24)$$

$$W = const = W_{i-1/2}, \quad y_{i-1} < y < y_i, \quad (2.25)$$

$$u_{i-1} - u_i = W_{i-1/2} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{k(y)}, \quad (2.26)$$

$$W_{i-1/2} = -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y}, \quad W_{i+1/2} = -a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad a_i = \left(\frac{1}{\Delta y}\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{k(y)}\right)^{-1}, \quad (2.27)$$

Заменяя интеграл, записанный в (2.27), по формуле $\frac{1}{\Delta y}\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{k(y)} \approx \frac{1}{k_{i-1/2}}$, получаем $a_i = k_{i-1/2}$,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[W(x,y_{i+1/2}) - W(x,y_{i-1/2})\right] dx \approx \Delta x \sigma \left[W_{i+1/2}^{j+1} - W_{i-1/2}^{j+1}\right] + \Delta x(1-\sigma)\left[W_{i+1/2}^{j} - W_{i-1/2}^{j}\right], \quad (2.28)$$

где σ — произвольное число.

$$\frac{[u_i^{j+1}]^2 - [u_i^j]^2}{2\Delta x} =$$
$$= \sigma\left[\frac{a_{i+1}}{\Delta y^2}\left(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}\right) - \frac{a_i}{\Delta y^2}\left(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}\right)\right] + (1-\sigma)\left[\frac{a_{i+1}}{\Delta y^2}\left(u_{i+1}^{j} - u_i^{j}\right) - \frac{a_i}{\Delta y^2}\left(u_i^{j} - u_{i-1}^{j}\right)\right] + D. \quad (2.29)$$

В силу наличия нелинейности в исходном уравнении (2.19) можно применить итерационную линеаризацию Ньютона [130] (Newton's iterative liearization). Пусть $\delta\varphi_i$ — изменение переменной φ_i между двумя последовательными итерациями, тогда для пары переменных φ_i, φ_j можно записать

$$\delta\varphi_i = {\varphi_i}^{k+1} - {\varphi_i}^k, \quad \delta\varphi_j = {\varphi_j}^{k+1} - {\varphi_j}^k, \quad (2.30)$$

и

$${\varphi_i}^{k+1} = {\varphi_i}^k + \delta\varphi_i \quad {\varphi_j}^{k+1} = {\varphi_j}^k + \delta\varphi_j. \quad (2.31)$$

Нелинейный член $(\varphi_i)(\varphi_j)$ на $k+1$ итерации будет иметь следующий вид:

$${\varphi_i}^{k+1}{\varphi_j}^{k+1} = {\varphi_i}^k{\varphi_j}^k + \varphi_j^k\delta\varphi_i + \varphi_i^k\delta\varphi_j + (\delta\varphi_i)(\delta\varphi_j) =$$
$$= \varphi_i^k\varphi_j^k + \varphi_j^k(\varphi_i^{k+1} - \varphi_i^k) + \varphi_i^k(\varphi_j^{k+1} - \varphi_j^k) = \varphi_i^k\varphi_j^{k+1} + \varphi_i^{k+1}\varphi_j^k - \varphi_i^k\varphi_j^k. \quad (2.32)$$

С учётом полученного соотношения нелинейный член скорости приобретёт следующий вид:

$$[u^2]^{j+1} = 2u^j u^{j+1} - u^j u^j. \quad (2.33)$$

В результате получим разностную схему

$$-\frac{a_i\Delta x\sigma}{\Delta y^2}u_{i-1}^{j+1}+u_i^{j+1}\left[u_i^j+\frac{\Delta x}{\Delta y^2}(a_i+a_{i+1})\right]-\frac{a_{i+1}\Delta x\sigma}{\Delta y^2}u_{i+1}^{j+1}=$$
$$=(1-\sigma)\frac{\Delta x}{\Delta y^2}\left[a_{i+1}u_{i+1}^j+(a_{i+1}+a_i)u_i^j+a_iu_{i-1}^j\right]+D\Delta x+u_i^ju_i^j, \quad (2.34)$$

которую можно решать на каждом шаге по x, обращая трехдиагональную матрицу $\mathbf{A_j}$ из системы уравнений вида

$$\mathbf{A_j}u_{j+1}=b_j. \quad (2.35)$$

Определить, каким порядком аппроксимации обладает полученная разностная схема, можно, разлагая сеточную функцию в точках шаблона в ряд Тейлора по Δy и Δx, что в результате даёт:

$$u_i^j\frac{\partial u}{\partial x}=k_i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\sigma k_i\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}-\frac{1}{2}u_i^j\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Delta x+O\left(\Delta y^2+\Delta x^2\right)+D. \quad (2.36)$$

Здесь следует обратить внимание на первый порядок аппроксимации по Δx, который отмечается и в [129].

Определим характеристики устойчивости схемы, воспользовавшись спектральным признаком устойчивости и принципом замороженных коэффициентов [131], будем также считать, что $a_i\approx a_{i+1}=a$. Подставим решение в виде $u\sim\lambda^k e^{i\varphi n}$ в уравнение (2.29) и сократим его правую и левую части на множитель $\lambda^k e^{i\varphi n}$:

$$\frac{\lambda^k e^{i\varphi n}[\lambda-1]}{\Delta x}=\frac{\sigma a\lambda}{\Delta y^2}[e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2]+(1-\sigma)\frac{a}{\Delta y^2}[e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2]. \quad (2.37)$$

Выражение для мнимой части даёт:

$$\frac{\lambda^k\sin\varphi}{\Delta x}[\lambda-1]=0, \quad (2.38)$$

что выполняется при $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\varphi=\pi$. Однако нетривиальным является лишь последнее решение $\varphi=\pi$:

$$(-1)^n\frac{\lambda^k}{\Delta x}=-\frac{4a}{\Delta y^2}\left(\sigma\left(\lambda-1\right)+1\right). \quad (2.39)$$

Для устойчивости схемы необходимо, чтобы $|\lambda|<1$ при $k\to\infty$. В силу нелинейности решаемого уравнения не получается избавиться от множителя λ^k, как это обычно происходит при использовании спектрального признака устойчивости. Вместе с тем, $\lambda\to 0$ при $k\to\infty$. Что даёт возможность записать выражение:

$$\sigma(\lambda-1)+1=0, \quad (2.40)$$

$$|\lambda|=\left|\frac{\sigma-1}{\sigma}\right|<1. \quad (2.41)$$

Данное неравенство выполняется при $\sigma>1/2$.

Проверка работы схемы проводилась на расчёте профиля плоского течения Пуазейля, который можно представить в виде

$$u(y)=\frac{\mathrm{Re}^*\mathrm{Eu}\mathbb{C}}{2}y(y-1), \quad (2.42)$$

интегрируя (2.42), получаем расход $G=\frac{\mathrm{Re}^*\mathrm{Eu}\mathbb{C}}{12}$. Кроме того, использовался профиль термовязкой жидкости с точкой перегиба (5.109), записанный в форме

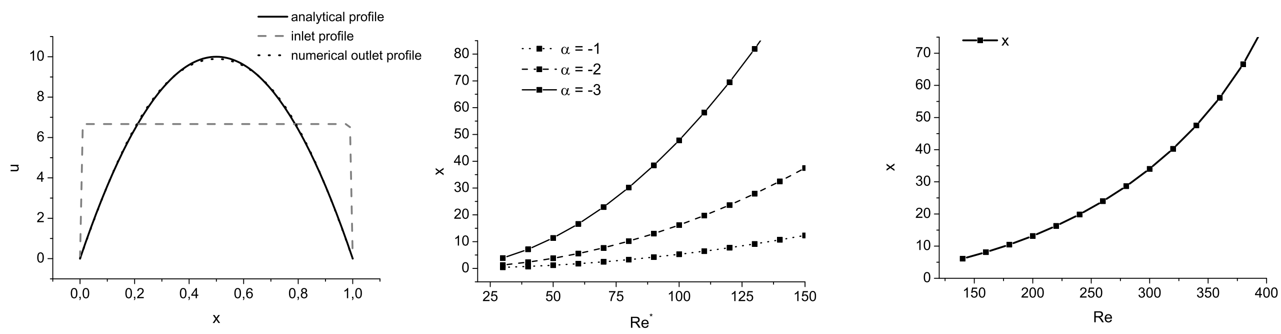
$$U(y)=-\mathrm{Re}^*\mathrm{Eu}\mathbb{C}\frac{e^{-\alpha y}(1-e^{\alpha y}-y-ye^{\alpha y})}{\alpha(-1+e^{\alpha})}. \quad (2.43)$$

В качестве начальных данных использовался диапазон чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}^* = 30$–140, а также $\alpha = -1, -2, -3$, $\mathbb{C} = -0.1$, длина расчётного канала в калибрах $L_X/L_Y = 20$, $\Delta y = 0.01$, $\Delta x = \Delta y/2$.

Итерационный процесс основан на сравнении контрольных интегралов по расходу на правой и левой границах расчётной области. Сначала выбирается σ_0 и $d\sigma_0$, а затем проводится минимизация интеграла путём подбора σ:

$$\min\left[\int_{y=0}^{y=1} u(x=0,y)dy - \int_{y=0}^{y=1} u(x=L_X,y)dy\right] \tag{2.44}$$

Результаты расчёта, представленные на рисунке 2.2б, показывают зависимость длины установления $x = x(Re^*,\alpha)$, измеряемую в калибрах. Скорость роста кривой очень сильно зависит от параметр α, т.е. от разности температур и, в отличие от течения Пуазейля в трубе (рисунок 2.2в), для которого $x \sim \frac{1}{16}\mathrm{Re}$ [132], полученное семейство кривых можно описать двух параметрической показательной функцией $x = A(\alpha)(\mathrm{Re}^*)^{-\alpha}$.



(а) (б) (в)

Рисунок 2.2: (а) — сравнение аналитического, входного и выходного профилей скорости в случае плоского течения Пуазейля; (б) — зависимость безразмерной длины установления профиля термовязкой скорости при различных значениях α; (в) — зависимость длины установления профиля Пуазейля от числа Рейнольдса.

2.3 Линейная задача устойчивости течения ТВЖ в плоском канале

2.3.1 Обобщение уравнения Орра–Зоммерфельда на случай течения ТВЖ

Одной из важнейших характеристик любого течения жидкости является устойчивость, определяющая возможность его реализации в природе или в лабораторных условиях. Неустойчивость течения по отношению к возмущениям малой или конечной амплитуды может привести к смене характера течения, как это происходит в течении Тейлора–Куэтта, и в конечном итоге к турбулентности, обладающей хаотическими трёхмерными полями завихренности и широким спектром временных и пространственных масштабов. Ответ на вопрос является ли данное течение устойчивым зачастую может быть дан в рамках линейной теории, которая сводится к линеаризации уравнений Навье–Стокса относительно возмущений бесконечно малой амплитуды. В случае вязкой жидкости эта процедура приводит уравнению Орра–Зоммерфельда [133], которое записывается относительно возмущения скорости или возмущения функции тока. Так как термовязкие свойства жидкости проявляются при движении в сильно неоднородных температурных полях, то необходимо провести обобщение уравнения для возмущений с учётом значительного изменения вязкости поперёк канала при установившемся линейном распределении температуры. Для этого представим скорости $\vec{v}(\vec{x},t)$ и давление $\hat{p}(\vec{x},t)$ в виде суперпозиции полученного решения $\vec{V}$, P и малых возмущений $\vec{\hat{v}}(\vec{x},t)$, $\hat{p}(\vec{x},t)$:

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{V} + \vec{\hat{v}}(\vec{x},t), \quad p(\vec{x},t) = P + \hat{p}(\vec{x},t), \tag{2.45}$$

и подставим их в уравнения Навье–Стокса, что, после некоторых преобразований, даёт уравнения для возмущений

$$\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu(T)\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{2.46}$$

В дальнейших выкладках, проводимых для возмущений, знак «ˆ» будет пускаться. Так как поперечная компонента основного профиля скорости (вдоль направления Y) равна 0, то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\cdot(2\nu\,(T)\,\mathbf{S})\,, \tag{2.47}$$

где

$$\mathbf{S} = 1/2\left(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T\right). \tag{2.48}$$

Рассмотрим следующее преобразование для кинематической вязкости $\nu = \nu_0 e^{\frac{\beta(T-T_0)}{T_0}}$, причём обычно $\beta < 0$, так как при нагревании вязкость падает.

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{\beta}{T_0}\nu\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{2.49}$$

для линейного распределения температуры $\frac{\partial T}{\partial y} = const$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = \nu\frac{\partial ln\nu}{\partial lnT}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial y} = \nu\nu_T k_T, \tag{2.50}$$

причём $\nu_T k_T = const$, что даёт:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu(T)\nabla\cdot\mathbf{S} + \nu(T)\nu_T k_T\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \nabla v\right). \tag{2.51}$$

Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$v(0) = 0, v(L_{\rm Y}) = 0. \tag{2.52}$$

Применим операции «$\nabla\cdot$» и «Δ» к (2.51), а затем исключим из полученной системы уравнений Δp, в результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta v = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\nu(T)\nu_T^2 k_T^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \nu(T)\nu_T^2 k_T^2\Delta v + \nu(T)\Delta^2 v. \tag{2.53}$$

Второй вариант вывода основан на применения двойного ротора к обеим частям уравнения (2.51):

$$\nabla\times\nabla\times\left[U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right] = \nabla\left[\nabla\cdot\left(U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)\right] - \nabla^2\left[U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right] = \nabla\left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \nabla^2\left[U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right]. \tag{2.54}$$

Рассмотрим второе слагаемое отдельно:

$$\nabla\cdot\left[\nabla\left[U\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right] = \nabla\cdot\left[(\nabla U)\,\frac{\partial v}{\partial x} + U\frac{\partial\,(\nabla v)}{\partial x}\right]. \tag{2.55}$$

Теперь рассмотрим y-компоненту:

$$\nabla\times\nabla\times(\nu(T)\Delta\vec{v}) = \nabla\left[\nabla\cdot(\nu(T)\Delta\vec{v})\right] - \Delta\left(\nu(T)\Delta\vec{v}\right) = \\ = \nabla\left[\nu(T)\nu_T k_T \Delta v\right] - \nu(T)\nu_T^2 k_T^2 \Delta\vec{v} - \nu(T)\Delta^2\vec{v}, \quad (2.56)$$

$$\nabla\times\nabla\times\left(\nu\nu_T k_T\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]\right) = \nabla\left[\nabla\cdot\left(\nu(T)\nu_T k_T\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]\right)\right] - \\ \Delta\left[\nu(T)\nu_T k_T\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]\right] = \nabla\left[(\nabla\nu(T))\cdot\nu_T k_T\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]\right] + \nu(T)\nu_T k_T\nabla\cdot\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right] \\ -\nu(T)\nu_T^3 k_T^3\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]. \quad (2.57)$$

Выбираем v, y-компоненту скорости:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - U\frac{\partial}{\partial x}\Delta v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nu(T)\nu_T k_T\frac{\partial}{\partial y}\Delta v - \nu(T)\Delta^2 v + \\ \nu(T)\nu_T^3 k_T^3 2\frac{\partial v}{\partial y} + \nu(T)\nu_T^2 k_T^2 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu(T)\nu_T^2 k_T^2\Delta v \\ + \nu(T)\nu_T k_T\frac{\partial}{\partial y}\Delta v - \nu(T)\nu_T^3 k_t^3 2\frac{\partial v}{\partial y} - \nu(T)\nu_T k_T\left[2\frac{\partial}{\partial y}\Delta v\right], \quad (2.58)$$

что в итоге даёт уравнение (2.53).

Проведем обезразмеривание полученного уравнения, используя следующую процедуру:

$$\begin{aligned} &y = \tilde{y}L_{\mathrm{Y}}, \quad v = U_0\tilde{v}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\frac{U_0}{L_{\mathrm{Y}}}, \quad \Delta = \frac{\tilde{\Delta}}{L_{\mathrm{Y}}}, \\ &U = \tilde{U}U_0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\frac{1}{L_{\mathrm{Y}}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\frac{1}{L_{\mathrm{Y}}}, \quad \nu_T k_T = \frac{\tilde{\nu}_T\tilde{k}_T}{L_{\mathrm{Y}}}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

что даёт

$$\tilde{\Delta}^2\tilde{v} - 2\tilde{\nu}_T^2\tilde{k}_T^2\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{y}^2} - \tilde{\nu}_T^2\tilde{k}_T^2\tilde{\Delta}\tilde{v} = \mathrm{Re}(T)\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\tilde{\Delta}\tilde{v} + \tilde{U}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{\Delta}\tilde{v} - \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{y}^2}\right], \quad (2.60)$$

где $\mathrm{Re} = L_{\mathrm{Y}}U_0/\nu(T)$ — число Рейнольдса, T — линейная функция безразмерной ширины канала.

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно двумерные возмущения плоскопараллельного потока. Связь между границами и условиями устойчивости, найденными для двумерного случая с фактическими реализующимися свойствами трёхмерных течений устанавливается теоремой Сквайра [134]. Доказательство этого утверждения основывается на преобразовании координат в пространстве волновых чисел и приводит к тому, что для любого неустойчивого трёхмерного волнового решения уравнения возмущений всегда существует неустойчивое двумерное волновое решение, реализующееся при больших волновых числах (для более коротких волн). Таким образом, теорема определяет такое динамическое подобие, что неустойчивости в параллельных потоках по своей природе являются двумерными [84] (исключая стадии нелинейной эволюции и появление вторичных неустойчивостей).

Будем искать решение в виде совокупности нормальных мод:

$$v = \tilde{v}(y)\mathbf{Re}[e^{\gamma t + ikx}]. \quad (2.61)$$

(где γ — инкремент неустойчивости — комплексное число, k — действительное волновое число). Введем также следующее обозначение для производной по безразмерной высоте канала $\tilde{y}$ — $D \equiv \partial/\partial y$, опустив при этом знак «$\tilde{}$», и получим следующее выражение:

$$\left(D^2-k^2\right)^2 v - 2\nu_T^2 k_T^2 D^2 v - \nu_T^2 k_T^2\left(D^2-k^2\right)v = \\ = \mathrm{Re}(T)\left[\gamma\left(D^2-k^2\right)v + iUk\left(D^2-k^2\right)v - ikU''v\right] \quad (2.62)$$

Уравнение (2.62) дополняется четырьмя граничными условиями для -компоненты скорости:

$$v(0)=0, \quad v(1)=0, \quad Dv(0)=0, \quad Dv(1)=0. \tag{2.63}$$

Полученное уравнение является обобщением уравнения Орра–Зоммерфельда на случай установившегося течения термовязкой жидкости с зависимостью $\nu = \nu_0 e^{\beta\frac{T-T_0}{T_0}}$ при линейном распределении температуры в сечении канала, в дальнейшем для уравнения (2.62) можно ввести безразмерный параметр α, идентичный использовавшемуся в предыдущих разделах.

2.3.2 Представление уравнения Орра–Зоммерфельда для ТВЖ через функцию тока для возмущения

Проведем обезразмеривание уравнения (2.51) и запишем его покомпонентно:

$$\frac{U_0^2}{L_Y}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+U\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{V}\right] = -\frac{P_0}{\rho L_Y}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu_0 e^{\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}e^{\beta\frac{\Delta T}{T_0}\frac{y}{L_Y}}\frac{U_0}{L_Y^2}\Delta\vec{v}+ \\ +\nu_0 e^{\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}e^{\beta\frac{\Delta T}{T_0}\frac{y}{L_Y}}\nu_T k_T\frac{U_0}{L_Y}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\nabla v\right]. \tag{2.64}$$

Также, полагая число Эйлера $\mathrm{Eu}=1$, получим в безразмерных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}(y)}\left[\Delta u+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial\eta}+\frac{1}{Re(y)}\left[\Delta v+2\alpha\frac{\partial v}{\partial y}\right], \tag{2.66}$$

Где число Рейнольдса обозначает:

$$\mathrm{Re}(y)=\frac{U_0L_Y}{\nu_0}e^{-\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}e^{-\alpha y}=\mathrm{Re}_0e^{-\frac{\beta}{T_0}(T_1-T_0)}e^{-\alpha y}=\mathrm{Re}^*e^{-\alpha y}.$$

Будем искать решение в виде бегущих волн:

$$\vec{\hat{v}}=\vec{v}(y)e^{i(kx-kct)}, \quad \hat{p}=p(y)e^{i(kx-kct)}, \tag{2.67}$$

где c —фазовая скорость, k — волновое число. Подставляя соотношения (2.67) в уравнения (2.65, 2.66):

$$\begin{aligned} &ia(U-c)u+\frac{dU}{dy}v=-iap+\frac{1}{\mathrm{Re}(y)}\left[\frac{d^2u}{y^2}-k^2u+\alpha\left(\frac{u}{y}+ikv\right)\right], \\ &ik(U-c)v=-\frac{\partial p}{\partial\eta}+\frac{1}{\mathrm{Re}(y)}\left[\frac{d^2v}{y^2}-k^2v+2\alpha\frac{dv}{dy}\right]. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Введем функцию тока вида $\hat{\psi}=\psi(y)e^{ia(x-ct)}$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-ik\psi. \tag{2.69}$$

Подстановка соотношений (2.69) в систему уравнений (2.68) и последующее исключение давления даёт уравнение для Орра–Зоммерфельда для функции тока возмущения в течении ТВЖ:

$$ik\mathrm{Re}(y)\left[(U-c)\left(\psi''-k^2\psi\right)-U''\psi\right]= \\ =\left[\psi^{(4)}-2k^2\psi''+k^4\psi\right]+2\alpha\left[\psi'''-k^2\psi'\right]+\alpha^2\left(\psi''+a^2\psi\right). \tag{2.70}$$

Следует отметить, что если положить $\alpha = 0$, то уравнение (2.70) сводится к обычному уравнению Орра–Зоммерфельда для вязкой жидкости.

Вернёмся к уравнению (2.62), теперь введем обозначение $\gamma = -ikc$ и перепишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{i\mathrm{Re}(y)k}\left[-D^4 + 2k^2D^2 - k^4 + 3\alpha^2D^2 - \alpha^2k^2\right]v - U''v. + U\left(D^2 - k^2\right)v = c\left[D^2 - k^2\right]v, \qquad (2.71)$$

при соответствующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \quad Dv(0) = 0,\\ v(1) &= 0, \quad Dv(1) = 0. \end{aligned} \qquad (2.72)$$

Следует отметить, что уравнение (2.53) можно записать относительно функции тока, тогда справедливы следующие выкладки:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta v - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{Re(y)}\left[\Delta^2 v - \alpha^2\Delta v - 2\alpha^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]. \qquad (2.73)$$

Аналогично $\tilde{\psi} = \psi(y)e^{ik(x-ct)}$, $\quad u = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}$, $\quad v = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = -ik\tilde{\psi}$,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right]\Delta\tilde{\psi} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{1}{Re(y)}\left[\Delta^2\tilde{\psi} - \alpha^2\Delta\tilde{\psi} - 2\alpha^2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2}\right], \qquad (2.74)$$

$$(-ikc + Uik)\left(\psi'' - k^2\psi\right) - ikU''\psi = \frac{1}{\mathrm{Re}(y)}\left[\left(\psi^{(4)} - 2a^2\psi'' + k^2\psi\right) - \alpha^2\left(\psi'' - k^2\psi\right) - 2\alpha^2\psi''\right]. \quad (2.75)$$

В результате имеем

$$ik\mathrm{Re}(y)\left[(U - c)\left(\psi'' - k^2\psi\right) - U''\psi\right] = \psi^{(4)} - 2k^2\psi'' + k^4\psi - \alpha^2\left(3\psi'' - k^2\psi\right). \qquad (2.76)$$

Таким образом, уравнение для поперечной компоненты возмущения скорости (2.76), записанное относительно функции тока не сводится к своему аналогу (2.70). Приведённые уравнения имеют разные параметрические зависимости относительно коэффициента α.

2.3.3 Численные методы решения Орра–Зоммерфельда

Аналитические решения уравнения Орра–Зоммерфельда можно получить только для ограниченного класса задач, описывающих устойчивость медленных вязких или невязких течений газов. Для изучения устойчивости произвольных неустановившихся одномерных потоков при ненулевых и не бесконечно больших числах Рейнольдса применяются приближённые, асимптотические и численные методы, к последним относятся метод конечных разностей, различные спектральные методы и методы Рунге–Кутты.

В методе конечных разностей проводится разностная аппроксимация производных D^4v и D^4v с помощью центральных разностей, что приводит появлению пятидиагональной матрицы с комплексными коэффициентами. В конечном счёте [135] система линейных алгебраических уравнений принимает вид

$$\mathbf{E}(c)\,v = 0,$$

где $\mathbf{E}$ — пятидиагональная матрица, c — фазовая скорость. Для решения этой системы необходимо применять метод Гаусса или LU-разложение.

Спектральные методы уже долгое время применяются для решения задачи Коши, а также краевых задач, ключевую роль в их развитии сыграла работа Орзага (Orszag) [136], посвящённая применению τ-метода на основе полиномов Чебышева для решения краевых задач. Орзаг свел уравнение Орра–Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля к обобщённой задаче на собственные значения

$$\mathbf{A}\,\mathbf{a} = \gamma\,\mathbf{B}\,\mathbf{a},$$

которая решалась при $\mathrm{Re} \approx 10^4$ с помощью QR-разложения. Высокая точность и производительность данного подхода обусловила его широкое применение в задачах устойчивости. В отличие от аппроксимации методом конечных разностей, дающей лишь конечный порядок точности, при котором ошибка ведет себя асимптотически как $(\Delta x)^n$ при $\Delta x \to 0$, где n — некоторое число, Δx — шаг сетки, аппроксимация полиномами Чебышева дает бесконечный порядок точности, т.е. ошибка убывает быстрее любой степени $1/N$ при числе точек $N \to \infty$ (если профиль усреднённого течения $U(y)$ является бесконечно дифференцируемой функцией). Вместе с тем, и этот метод не лишен своих недостатков, проявляющихся при решении задач устойчивости в МГД. В частности [137], при применении спектрального метода Галеркина для задач линейной устойчивости течений жидкости со свободной поверхностью, а также с неподвижными границами, для уравнений Орра–Зоммерфельда и индукции, так как при решении задач устойчивости в МГД часто требуется очень высокий порядок спектра (количество членов N в разложении в некоторых задачах может составлять $N \sim 10^3$) для достижения сходимости. При таких больших спектральных порядках применение τ-метода становится затруднительным, так как в этом случае матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют много ненулевых элементов (являются плотно заполненными), причём количество элементов и вычислительные затраты составляют для них N^2 и N^3 соответственно. Полученные матрицы являются также плохообусловленными, а матричные элементы в них, связанные с дифференциальным оператором четвёртого порядка, растут как N^7. Ещё одним недостатком τ-метода является появление «паразитных» собственных значений с большой амплитудой действительной части, осциллирующей между отрицательными и положительными значениями при изменении N. Эти численные собственные значения не связаны со спектром дифференциального оператора уравнения Орра–Зоммерфельда и, для того чтобы избежать ошибочных выводов об устойчивости, их необходимо детектировать и отбрасывать или же соответствующим образом модифицировать вычислительный метод.

Альтернативой спектральным методам является метод Рунге–Кутты, при данном подходе уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\Phi' = \mathbf{A}(y)\Phi, \tag{2.77}$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v^{'} \\ v^{''} \\ v^{'''} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

В случае плоского течения Пуазейля граничные условия имеют форму:

$$\Phi(0) = \Phi^{'}(0) = \Phi(1) = \Phi^{'}(1) = 0, \tag{2.79}$$

а решение ищется в виде

$$\Phi(y) = a_1\Phi^1 + a_2\Phi^2 + a_3\Phi^3 + a_4\Phi^4. \tag{2.80}$$

Φ^1, Φ^2, Φ^3, Φ^4 являются линейно независимыми решениями, a_i — константы интегрирования. Метод Рунге–Кутты был применен в работе [138] для исследования устойчивости профиля скорости в пограничном слое на пластине (формула Блазиуса).

Авторами [139] был разработан и протестирован подход для решения дифференциальных уравнений путём сведения их к системам уравнений второго порядка, в основе которого лежит представления о скорости роста матриц при аппроксимации многочленами Чебышева. Проводилось изучение так называемых D, D^2, $D^4\tau$-методов Чебышева для течений Пуазейля, Куэтта, и для двухслойного течения несмешивающихся жидкостей. Рассматривались задачи о нахождении множества собственных значений, в том числе трудно вычислимых. Особое внимание было уделено вопросам потери точности: из-за недостаточного количества членов разложения, плохого разрешения спектрального портрета вследствие ограниченной точности представления действительных чисел. Особо выделяется D^2-метод, позволяющий уменьшить скорость роста компонентов матриц до $O(N)$, где N — число членов в разложении. Одной из задач работы стал поиск метода удаления «паразитных» собственных чисел, однако, полностью решить эту проблему не удалось, в результате возможно появление мод порядка $O(10^{18})$ или выше. Фактически можно говорить о разрешении только «верхнего кончика» спектра. Установлено, что при увеличении числа Re происходит пересечение мод, т.е. моды обмениваются местами в том смысле, что мнимая часть одного собственного значения уменьшается относительно другого соседнего собственного значения и наоборот.

Изучение задач устойчивости течений жидкостей со стратификацией вязкости, в том числе вызванной неоднородным температурным полем, связано с решением модифицированного уравнения Орра–Зоммерфельда, имеющего дополнительные члены и отличающегося рядом примечательных свойств, которые приводят изменению предсказываемой области неустойчивости. Уравнение для возмущений, отягощённое параметрическими зависимостями, может решаться асимптотическими методами [140—143]. В пионерской работе [144] на основе численного метода «предиктор-корректор» для течения с зависимостью вязкости типа Аррениуса было показано, что существование слагаемых, описывающих малые градиенты вязкости в уравнении Орра–Зоммерфельда приводит к предсказанию более неустойчивых течений: для воды критическое число Рейнольдса уменьшается на 50% при разности температур $\Delta T = 78$ K. Расширение классической линейной теории устойчивости с использованием разложения в ряд Тейлора вязкости по температуре было предложено в работе [145]. Численные результаты [128] решения обобщённого уравнения Орра–Зоммерфельда с учётом температурной зависимости и нагрева стенок канала для четырёх моделей $\mu(T) = e^{a_1 T}$, $\mu(T) = 1 - a_2 T$, $\mu(T) = 1 + b(1 - e^{a_3 T})$, $\mu(T) = Ce^{(a_4 T + a_5)^{-1}}$, где a_i, $(i = 1{,}5)$ — параметры, T — температура, были получены методом конечных разностей высокого порядка точности на неравномерной сетке, который сводится решению линейной алгебраической задачи на собственные значения. В отличие от работы [144] возмущения накладывались и на основное распределение температуры, а уравнения для возмущений решались неасимптотическим методом (в отличие от [145]). По результатам расчётов было построено семейство кривых нейтральной устойчивости, на каждой из которых найдено критическое число Рейнольдса, являющееся минимумом кривой по аргументу Re. Считается, что неустойчивость вязких течений вызвана «перекачкой» энергии от основного течения к возмущению посредством напряжений Рейнольдса. Показано, что распределение напряжений подобно изотермическому случаю в части наложения их максимумов на критические слои. Установлена слабая зависимость характеристик устойчивости от числа Pe при его изменении на несколько порядков. Наиболее примечательным результатом является случай когда один поток вязкость которого монотонно убывает поперёк канала теряет устойчивость, другой же — с аналогичной зависимостью — её приобретает. Характеристики устойчивости могут быть объяснены совокупным влиянием трёх факторов: объёмных эффектов, эффектов скоростного профиля (velocity-shape effects), эффектов тонких слоев (thin-layer effects). Для последнего установлено, что создание тонкого слоя менее вязкой жидкости в пристеночной области стабилизирует поток.

В слоистых течениях Пуазейля, обладающих вязкой стратификацией, дестабилизирующую роль играет диффузия, происходящая на границе раздела сред [146]. Переход к стоксовским режимам течения позволяет разделить влияние диффузии и инерции, действие которой становится пренебрежимо малым. Параметрическое исследование указывает на существование четырёх типов неустойчивостей, доминирование каждой из которых зависит от положения «межфазной» границы (типа кусочно-постоянной функции), причём две основные моды порождаются процессами в диффузном слое, а две другие являются объёмными. Уравнение конвекции-диффузии для возмущения концентрации приводит к росту диффузного слоя. Возмущения завихренности и связанная с ними скорость, генерируемая на межфазной границе, приводит к набеганию фазы относительно возмущений поверхности слоя смешения. Таким образом, завихренность усиливает деформацию «гребней» и «ложбин» межфазной поверхности.

Даже малые градиенты вязкости могут вызывать неустойчивость течений, важную роль в развитии которой играет динамика на границе двух слоев [147]. При определённых положениях слоя смешения в канале наблюдалась хорошая стабилизация (или дестабилизация — при изменении знака градиента вязкости) в случае, когда вязкость жидкости, текущей у стенки, на 10% меньше вязкости жидкости, текущей в осевой зоне (ядре потока). Считается [148], что столь сильные эффекты являются следствием перекрытия областей стратификации и производства кинетической энергии возмущения. Новая мода неустойчивости, называется модой перекрытия («overlap mode») или O-модой («O-mode»). O-мода отличается от волны Толмина–Шлихтинга и невязких неустойчивостей и не требует наличия скоростного профиля с точкой перегиба. Экспериментальные исследования [149] неустойчивостей в потоках смешивающихся жидкостей с маловязким ядром, окруженным потоком более вязкой жидкости показали, что в слое смешения на границе раздела сред, сглаживающем разрыв градиента скорости, развиваются возмущения, сводимые к двум основным типам мод: волновому течению с разрывами («трещинами») в ядре и волновому течению с последующим разрушением ядра.

Задача устойчивости границы раздела в двухслойном течении жидкостей решалась различными методами на основе уравнения Орра–Зоммерфельда [150], а также двумерного моделирования с помощью метода конечных разностей [151]. В числе прочих результатов показано, что течение становится более неустойчивым при уменьшении толщины более вязкого слоя. Таким образом, поток может быть стабилизирован уменьшением толщины маловязкого слоя. Подобное же окно устойчивости существует и для неизотермических потоков. Отношение вязкостей также влияет на скорость роста неустойчивости, которая возникает вследствие разрыва производной профиля скорости на границе двух слоев.

2.3.4 Использование многочленов Чебышева для решения уравнения Орра–Зоммерфельда

Многочлены Чебышева определяются различными способами, в частности, через тригонометрические функции [152]

$$T_n(y) = \cos(n \arccos(y)), \tag{2.81}$$

которые являются решением однородного уравнения Штурма–Лиувилля

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{1-y^2}\frac{d}{dy}T_n(y)\right) + \frac{n^2}{1-y^2}T_n(y) = 0, \tag{2.82}$$

с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &T_0(y) = 1, \\ &T_1(y) = y, \\ &T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \end{aligned} \tag{2.83}$$

или степенной формулой

$$T_n(y) = \frac{1}{2}\left[(y+\sqrt{1-y^2})^n + (y-\sqrt{1-y^2})^n\right]. \tag{2.84}$$

На интервале $[1,-1]$ возмущение скорости $v(y)$ можно разложить как:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(y), \tag{2.85}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi c_n}\int_{-1}^{1} v(y)T_n(y)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy,\ c_0 = 2,\ c_n = 1\ (n>0). \tag{2.86}$$

Скорость сходимости разложения при $|y| \leqslant 1$ можно определить [136], рассмотрев

$$f(\theta) = v(\cos(\theta)), \tag{2.87}$$

которая является бесконечно дифференцируемой, чётной, периодической функцией θ. Таким образом, из теории рядов Фурье следует, что функцию $f(\theta)$ можно разложить в ряд Фурье по cos:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta), \tag{2.88}$$

причём ошибка после N членов разложения уменьшается быстрее, чем любая степень $1/N$ при $N \to \infty$. Разложение (2.88) точно переходит в (2.85) при $y = \cos(\theta)$. С другой стороны, из непосредственной оценки порядка величины a_n и производных $T_n(x)$ при $n \to \infty$, также следует, что разложение Чебышева дает аппроксимации бесконечного порядка точности, которые могут быть почленно дифференцированы произвольное число раз на интервале $[-1{,}1]$.

Ещё одним преимуществом разложения Чебышева перед другими ортогональными системами, является эффективность, с которой определяются коэффициенты из решаемого уравнения. N коэффициентов разложения Чебышева отсеченные при T_{n-1} находятся приблизительно тем же числом арифметических операций, требуемых для решения методом конечных разностей на N точках.

Полиномы Чебышева образуют ортогональную систему на отрезке $[-1{,}1]$ с весовой функцией $f(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(y)T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = C_n\delta_{nm} \quad C_0 = \pi,\ \ C_n = \frac{\pi}{2} \quad (n \neq 0). \tag{2.89}$$

Зависимая переменная представляется в виде ряда

$$v(y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(y). \tag{2.90}$$

На основе введённого ортогонального базиса проводится дискретизация ОДУ, а также зависимых переменных в точках Чебышева–Гаусса–Лобатто $y_j = \cos\frac{j\pi}{N}$. Производные неизвестной функции могут быть выражены через производные полиномов Чебышева, которые задаются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} T_0^{(k)}(y_j) = 0, \quad T_1^{(k)} = T_0^{(k-1)}(y_j), \quad T_2^{(k)}(y_j) = 4T_1^{(k-1)}(y_j), \\ T_n^{(k)} = 2nT_{n-1}^{(k-1)}(y_j) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}^{(k)}(y_j), \quad n = 3{,}4,\ldots \end{gathered} \tag{2.91}$$

Верхний индекс $k \geqslant 1$ обозначает порядок дифференцирования. Для того, чтобы использовать полиномы Чебышева на отрезке $[0{,}1]$ можно выполнить простую замену переменных $y \to \frac{1}{2}(1-y)$.

Используя разложения для возмущения скорости $v(y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(y)$ и $D^2 v(y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n''(y)$, получим следующее выражение для уравнения Орра–Зоммерфельда:

$$\left(\left(-k^4 - \alpha^2 k^2\right) \frac{1}{i\mathrm{Re}(y)k} - U'' - Uk^2\right) \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(y) +$$
$$\left(\left(2k^2 + 3\alpha^2\right) \frac{1}{i\mathrm{Re}(y)k} + U\right) \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n''(y) - \frac{1}{i\mathrm{Re}(y)k} \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n^{(4)}(y) = c\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n''(y) - k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n T_n(y)\right) \tag{2.92}$$

Следует ещё раз обратить внимание, что число Рейнольдса является локальным и зависит от координаты по высоте канала. Дискретизация граничных условий даёт:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N} a_n T_n(1) = 0, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(-1) = 0, \\ &\sum_{n=0}^{N} a_n T_n'(1) = 0, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n T_n'(-1) = 0. \end{aligned} \tag{2.93}$$

В итоге получаем обобщённую задачу на собственные значения в следующем виде: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = c\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$, правая часть которой имеет вид:

$$c\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} T_0(1) & T_1(1) & \cdots \\ T_0'(1) & T_1'(1) & \cdots \\ T_0''(y_2) - k^2 T_0(y_2) & T_1''(y_2) - k^2 T_1(y_2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_0''(y_{N-2}) - k^2 T_0(y_{N-2}) & T_1''(y_{N-2}) - k^2 T_1(y_{N-2}) & \cdots \\ T_0'(-1) & T_1'(-1) & \cdots \\ T_0(-1) & T_1(-1) & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

левая часть —

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} =$$
$$\begin{pmatrix} T_0(1) & \cdots \\ T_0'(1) & \cdots \\ \left((-k^4 - \alpha^2 k^2)\dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_2)k} - U''(y_2) - U(y_2)k^2\right) T_0(y_2) & \\ + \left((2k^2 + 3\alpha^2)\dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_2)k} + U(y_2)\right) T_0''(y_2) - \dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_2)k} T_0^{(4)}(y_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \left((-k^4 - \alpha^2 k^2)\dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_{N-2})k} - U''(y_{N-2}) - U(y_{N-2})k^2\right) T_0(y_{N-2}) + & \\ + \left((2k^2 + 3\alpha^2)\dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_{N-2})k} + U(y_{N-2})\right) T_0''(y_{N-2}) - \dfrac{1}{i\mathrm{Re}(y_{N-2})k} T_0^{(4)}(y_{N-2}) & \cdots \\ T_0'(y_{N-1}) & \cdots \\ T_0(y_N) & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix}. \tag{2.95}$$

В соответствии с формой искомого решения линейные моды с $\Im[c] > 0$ являются неустойчивыми, то есть амплитуда возмущения растёт с экспоненциально со временем.

В настоящее время уже накоплен колоссальный опыт решения уравнения Орра–Зоммерфельда совместно с уравнением Сквайра (уравнение для нормальной завихренности), было установлено, что для плоского течения Пуазейля только неустойчивая мода является чётной функцией на отрезке $[1, -1]$, что делает целесообразным модифицировать разложение (2.90) через симметричные функции вида

$$q_{2n} = T_{2n}(y) - n^2 T_n(y) + (n^2 - 1) T_0(y), \quad n = 2{,}3, \dots M, \quad M = N/2,$$

с обязательным выполнением условия нормировки.

2.3.5 Результаты моделирования

Проверка численного метода и программного кода проводилась для классического течения Пуазейля, которое представляется в следующем безразмерном виде: $\alpha = 0$, $U(y) = 1 - y^2$, $U'' = -2$, непосредственно расчёт производится при $\mathrm{Re} = 10000$, $k = 1$, число членов разложения $N = 100$. Первое собственное значение $c = 0.23752649 + 0.00373967i$, считающееся эталонным [136], находится точно. В процессе расчёта также была найдена область неустойчивости плоского течения Пуазейля, а также соответствующее критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_c = 5778$ и $k = 1.021$, что близко к [136], отличие кроется в величине дискретного шага при поиске Re_c Однако как известно из экспериментальных наблюдений [139], неустойчивости наблюдаются и при значительно меньших числах Рейнольдса, даже при $\mathrm{Re} = 1100$.

Одной из основных особенностей решения обобщённого уравнения Орра-Зоммерфельда для термовязкой жидкости является зависимость

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 e^{-\alpha y}, \tag{2.96}$$

где безразмерный $y \in [0{,}1]$, — которой нельзя пренебречь в силу её резкого роста поперёк канала. Таким образом, полученное уравнение является относится к обыкновенным дифференциальным уравнениям 4-го порядка с переменным коэффициентом. Однако большинство эффективных и надежных спектральных методов, разработанных для задач гидродинамической устойчивости (использующих полиномы Чебышева, тригонометрические ряды, в частности) основываются на свойствах полноты, ортогональности (ортонормированности) выбранной системы функций в пространстве $\mathcal{L}^2(-1{,}1)$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(y) g(y) h(y) dy,$$

где $h(y)$ — некоторая весовая функция, в случае полиномов Чебышева равная $h = 1/\sqrt{1 - y^2}$.

Пусть

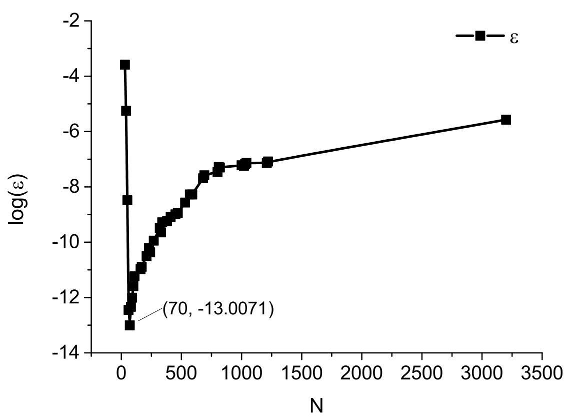
$$L_{\mathrm{OS}} = \left[\left(-k^4 - \alpha^2 k^2 \right) \frac{1}{i\mathrm{Re}k} - U'' - Uk^2 \right] + \left[\left(2k^2 + 3\alpha^2 \right) \frac{1}{i\mathrm{Re}k} + U \right] D^2 - \frac{1}{i\mathrm{Re}k} D^4 - c \left[D^2 - k^2 \right]$$

— дифференциальный оператор уравнения Орра–Зоммерфельда для ТВЖ, тогда $\langle L_{\mathrm{OS}} v, T_i \rangle = 0$, $i = 0{,}1, \dots, N-1$, если $\mathrm{Re} = const$, однако, для (2.96) это соотношение не выполняется, т.е. полиномы Чебышева не являются собственными функциями этого дифференциального оператора. Тем не менее, автору не известны работы, посвящённые исследованию устойчивости течений с такими резкими изменениями параметров, по этой же причине при изучении вопроса устойчивости нельзя считать число Рейнольдса постоянным.

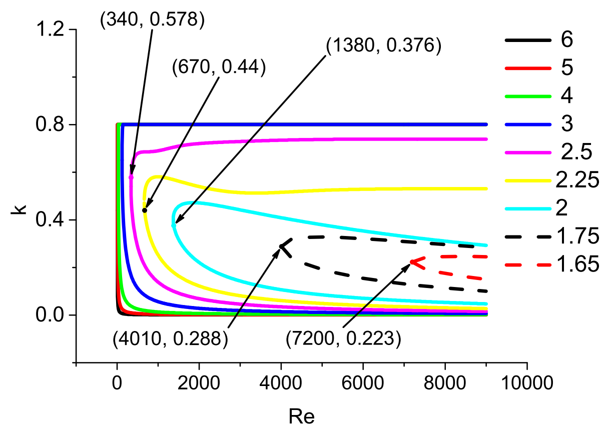
В работе проводился анализ относительной погрешности при последовательном увеличении количества членов разложения. Относительная погрешность определяется как $\varepsilon = \left| \frac{c_i[N_1] - c_i[N_2]}{c_i[N_1]} \right|$,

$N_1 < N_2$, где N_i, $(i = 1, 2)$, — количество членов разложения. Из результатов тестирования ясно, что относительная ошибка ведет себя немонотонно и имеет минимум в диапазоне $N \in [50, 100]$, что показывает быструю сходимость применённого спектрального метода. Дальнейший рост ошибки связан с погрешностями округления в представлении чисел и проведении матричных операций. Поведение относительной ошибки показано на рисунке 2.3а.

Автором была построена картина кривых нейтральной устойчивости $c_i < 0$ (рисунок 2.3б) для различных значений безразмерного параметра $\alpha < 0$, характеризующего разность температур на верхней и нижней стенках. Напомним, что отрицательные значения α соответствуют более горячей верхней стенке. Из графика видно, что течение становится неустойчивым для длинноволновых пространственных возмущений, причём при уменьшении параметра α критическое число Рейнольдса также уменьшается, и в конце заполняет практически всю область длинноволновых возмущений. Характерные Re_c показаны на рисунке 2.3б. При увеличении α происходит смещение кривой нейтральной устойчивости в область больших Re_0, при $\alpha > -1.5936$, т.е. при исчезновении точки перегиба, кривая смещается за пределы расчётной области, где значения базового числа Рейнольдса Re_0 нельзя считать адекватными (скорее всего произойдет разрушение основного течения возмущениями конечной амплитуды).



(а)



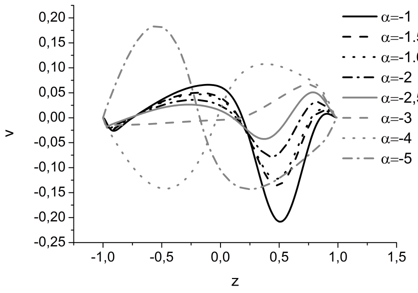
(б)

Рисунок 2.3: (а) — график изменения относительной ошибки $\log_{10} \varepsilon$ для различного числа мод (N), использовавшихся при разложении уравнения Орра–Зоммерфельда; (б) — кривые нейтральной устойчивости при различных значениях параметра α, цифрами обозначены критические числа Рейнольдса Re_c и соответствующие значения волнового вектора.

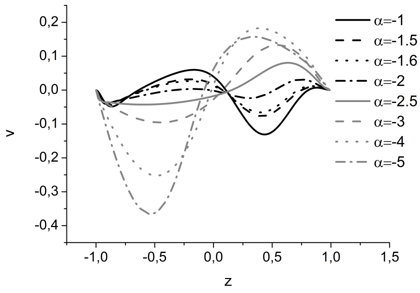
Кроме того, была прослежена эволюция наименее устойчивой моды, поведение которой значительно меняется при увеличении $|\alpha|$ для волновых чисел $k = 1$, $k = 0.5$, $k = 0.2$. В случае уменьшения значения волнового числа деформация этой собственной функции начинается раньше при увеличении $|\alpha|$, что является следствием перехода c_i через нейтральную кривую в область положительных значений. Собственные функции оператора L_{OS} не обладают свойствами симметрии или антисимметрии, к сожалению, нельзя также выделить «пристеночные» и «центральные» моды, как для случая плоского течения Пуазейля [152].

В результате расчёта были получены спектральные портреты, существенно отличающиеся от своих аналогов для плоского течения Пуазейля или течения в цилиндрической трубе. Их характерным отличием является отсутствие классических A-, P-, S-ветвей во множестве собственных чисел $|c_i| < 1$ см. рисунки 2.5а, 2.5б.

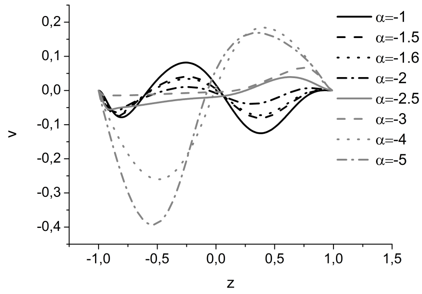
Стоит сравнить полученное семейство кривых с результатами работы [128]. Действительно, применение дифференциального оператора «$\nabla \times \nabla \times$» позволяет быстро получить уравнение для возмущений, однако, может сузить класс исследуемых решений, что, наряду с определением числа



(а)



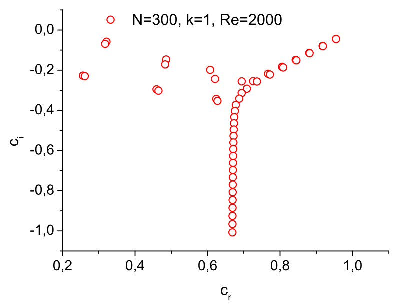
(б)



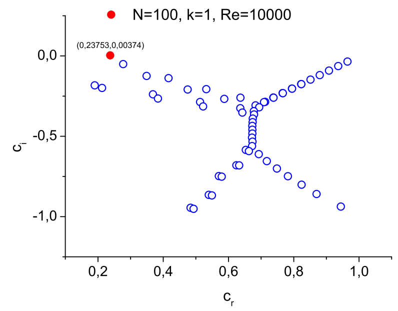
(в)

Рисунок 2.4: Деформация наименее устойчивой моды при различных α при $k = 1$ (а); $k = 0.5$ (б); $k = 0.2$ (в).

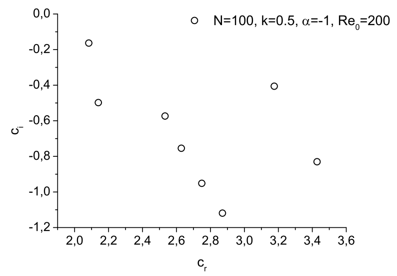
Рейнольдса по средней скорости и потока и по максимальной вязкости у холодной стенки, смещает область неустойчивости к большим Re_0. Уменьшение α, т.е. увеличение разности температур стенок, не только уменьшает критическое число Re_c, но и уменьшает устойчивость течения по отношению к коротковолновым возмущениям, в то время как максимальное волновое число на кривых нейтральной устойчивости [128] (рисунок 3) меняется относительно слабо.



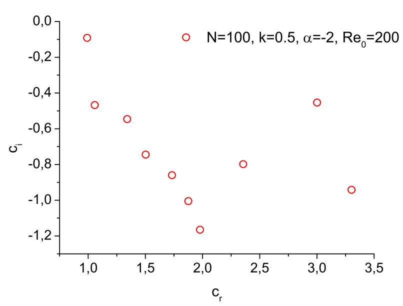
(а)



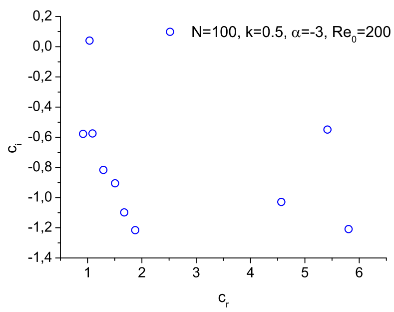
(б)



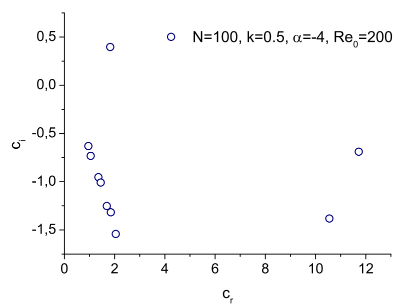
(в)



(г)



(д)



(е)

Рисунок 2.5: Спектр собственных значений уравнения Орра–Зоммерфельда для плоского течения Пуазейля обычной жидкости при: (а) — $\mathrm{Re} = 2000$, $k = 1$, $N = 300$; (б) — $\mathrm{Re} = 10000$, $k = 1$, $N = 100$, красной точкой отмечено собственное значение $c_i > 1$, соответствующее неустойчивой моде; спектр собственных значений уравнения Орра–Зоммерфельда для модельной термовязкой жидкости при: (в) — $\mathrm{Re}_0 = 200$, $k = 0.5$, $\alpha = -1$, $N = 100$; (г) — $\mathrm{Re}_0 = 200$, $k = 0.5$, $\alpha = -2$, $N = 100$; (д) — $\mathrm{Re}_0 = 200$, $k = 0.5$, $\alpha = -3$, $N = 100$, можно отметить переход одного из собственных значений через 0; (е) — $\mathrm{Re}_0 = 200$, $k = 0.5$, $\alpha = -4$, $N = 100$; при увеличении $|\alpha|$ происходит увеличение скорости роста c_i.

2.3.6 Заключение

В настоящей главе были представлены результаты, связанные с рядом характерных свойств ТВЖ, в частности, в задаче о форме профиля скорости термовязкой жидкости в установившемся течении в канале для случая экспоненциальной зависимости динамической вязкости от температуры, показано существовании точки перегиба при определённом значении безразмерного параметра $\alpha = \beta\Delta T/T_0$. В случае установившегося распределения температуры профиль скорости представляет собой универсальную зависимость от α. Решение параболизованной задачи установления с линейным распределением температуры показало, что длина установления профиля ТВЖ x есть резкая функция параметра α — $x = A(\alpha)\,(Re^*)^{-\alpha}$.

В задаче о линейной устойчивости профиля (5.109) проведено обобщение уравнения Орра–Зоммерфельда на класс ТВЖ с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры. Полученное уравнение содержит дополнительные члены, отражающие вклад термовязксти в характеристики устойчивости течения. Для решения данного уравнения был реализован метод колокации с применением базиса полиномов Чебышева. Проверка численной процедуры проводилась на задаче устойчивости плоского течения Пуазейля, полученные результаты (спектральные портреты A-, S-, P-ветвей собственных значений фазовой скорости, критическое число Рейнольдса) находятся в согласии с результатами классической работы Орзага [136]. Применение данного подхода к профилю ТВЖ в диапазоне $\alpha = -6 ... -1.65$ показало, что при увеличении α происходит уменьшение критического числа Рейнольдса и расширение области неустойчивости в сторону длинноволновых возмущений.

Глава 3. Схема КАБАРЕ: изложение метода слабой сжимаемости, тестовые задачи

3.1 Вступительные замечания

Численные расчёты являются неотъемлемой частью исследований течений жидкости и газа, они могут обладать как самостоятельной ценностью (при моделировании задач, реализация которых в лабораторных условиях невозможна, а также для классических задач гидродинамики), так и выполнять вспомогательную роль, помогая экспериментаторам определить оптимальные параметры установки.

Выбор данного численного метода КАБАРЕ как основного был мотивирован целым рядом примечательных свойств схемы, реализующихся в одномерной и двумерной постановках, в частности:

— она имеет компактный вычислительный шаблон, вмещающийся в одну пространственно-временную ячейку;
— в своей исходной формулировке является обратимой во времени;
— имеет формально второй порядок точности на сетке с неравномерным шагом по времени и по пространству на участках течения, не требующих применения процедуры коррекции потоков;
— обладает естественной процедурой коррекции потоков, основанной на прямом использовании инвариантов Римана;
— схема является универсальной и не имеет каких либо настроечных параметров, может быть использована для расчёта как сверхсильных, так и сверхслабых ударных волн;
— она может моделировать течения с аэроакустикой, в которых звуковые осцилляции на несколько порядков меньше гидродинамических, а их масштаб [153], наоборот, на несколько порядков больше. Конкурентами в задачах аэроакустики выступают схемы высокого порядка точности ([154] — схема DRP), которые могут использовать более разреженные сетки и отличаются большей точностью по сравнению со схемами второго порядка точности, однако, схемы высокого порядка аппроксимации могут давать неверные решения на сетках с ячейками переменного размера;
— способна моделировать задачи горения и детонации;

Схема КАБАРЕ (название, вероятно, происходит от английского сокращения «CABARET» — Compact Accurately Boundary Adjusting high-Resolution Technique) берет свое начало в работах В.М. Головизнина и А.А. Самарского [155; 156], в которых была предложена трёхслойная реализация схемы для одномерного уравнения переноса, а также показано, что метод является условно устойчивым в диапазоне чисел Куранта $\mathrm{CFL} \in [0, 1]$ и является точным при числах Куранта $\mathrm{CFL} = 0.5, 1$. Позднее было установлено формальное сходство первых вариантов схемы с результатами изысканий Айзерлиса [157], связанных с обобщением классической схемы LeapFrog для решения гиперболических уравнений. Однако, указанные схемы не эквивалентны друг другу, так как схема Upwind LeapFrog не является консервативной и не вмещается в одну пространственно-временную ячейку. Таким образом, в последствии название «КАБАРЕ» стало относиться к двухслойной дивергентной форме конечно-разностных уравнений переноса.

Дальнейшим развитием схемы стал балансно-характеристический подход для одномерного уравнения переноса [27], в последствии распространённый на уравнения газовой динамики и дополненный алгоритмом нелинейной коррекции [158]. Использование характеристической формы основных уравнений определяет точную локализацию таких особенностей решения, как ударные волны и контактные поверхности [159].

Газодинамические тесты, проведённые создателями схемы, показали высокую эффективность и точность моделирования акустических и завихренных потоков.

Кроме того, было показано, что разработанная схема в случае специальной аппроксимации начальных условий является монотонной [160] и сильно монотонной [161] для чисел Куранта (0,0.5] и немонотонной для чисел Куранта $(0.5, 1)$. Для устранения немонотонности схемы была предложена двойная коррекция потоковых переменных, которая производится внутри одной пространственной ячейки разностной сетки.

Позднее двухслойная форма схемы КАБАРЕ стала широко использоваться [155; 156] для решения многомерных задач газовой динамики [162], акустики [153; 163], течений с химическими реакциями [159; 164], несжимаемой жидкости [165], в которых уравнения формулируются относительно переменных «завихренность-функция тока» [166], «давление-скорость» [167]. Монотонность этого подхода для одномерных и двумерных задач изучалась в [168; 169]. Наиболее полное собрание вариаций метода можно найти в монографии В.М. Головизнина и др. [28].

Позитивные свойства схемы КАБАРЕ во многом обусловлены тем, что в ней используется расширенный набор переменных, включающий в себя наряду с обычными «консервативными» переменными (компоненты скорости, плотность и полная энергия) и т.н. «потоковые переменные» (относящиеся к серединам граней ячеек), что заметно повышает требования к объёму оперативной памяти. В частности, для обеспечения трёхмерного расчёта необходимо выделение 40 массивов данных, что приводит к четырёхкратному увеличению выделяемой памяти по сравнению с другими методами.

Данной главе последовательно излагаются алгоритм схемы в одномерной постановке, результаты его использования для таких задач как набегание волны давления на левую границу расчётной области, выравнивание давления (частный случай задачи о распаде разрыва [170], представляющий собой конфигурацию с одной ударной волной и одной волной Римана). Затем рассматривается более полный алгоритм расчёта течений вязкой теплопроводной жидкости в приближении слабой сжимаемости, на основе которого проводилось моделирование изотермических течений и течений с теплообменом, описанных в последующих разделах. Такой подход представляется обоснованным, так как предлагает целостное изложение вычислительной процедуры с учётом вязкости теплопроводности и слабой сжимаемости. Кроме того, в алгоритм схемы внесены некоторые изменения (в сравнении с [28]), связанный с отсутствием разложения уравнения состояния и расчёта инвариантов Римана на новом временном слое.

Рассматриваемый подход представляет собой достойную альтернативу [171] известным TVD-методам второго порядка точности [172] для задач, связанных с прохождением ударных волн и волн разрежения. Изучение эволюции синусоидального профиля скорости [28] в широком диапазоне чисел Куранта показало, что метод КАБАРЕ не порождает никаких нефизичных разрывов в гладком профиле, в отличие от стандартных TVD-схем.

Численные схемы на основе уравнений газовой динамики называются характеристическими, в областях гладких решений они превосходят схемы с выделением разрывов, однако, качественное моделирование сильных разрывов вызывает множество алгоритмических трудностей. Такое разделение позволяет использовать дивергентную форму уравнений для консервативных переменных и характеристические инварианты для потоковых переменных.

Схема КАБАРЕ рассчитана на применение в задачах аэроакустики, а также на сильно неравномерные расчётные сетки. Одним из способов повышения эффективности явных методов на таких сетках является асинхронный шаг по времени, когда решение на различных участках сетки обновляется с различной скоростью, которая определяется локальным числом Куранта, — что позволяет ускорить вычисления без потери точности исходного алгоритма. Типичные примеры алгоритмов асинхронного шага по времени включают в себя: (1) — адаптивное измельчение сетки, базирующееся на иерархии вложенных уровней логически прямоугольных (logically rectangular) вставок (наложений) сетки и (2) — адаптивного измельчения шага по времени, что позволяет получить значения решения на различных элементах в различные моменты времени. В работе [163] новой алгоритм асинхронных шагов по времени со встроенным методом обработки неактивных участков потока, был применен к схеме КАБАРЕ с сохранением простоты и компактности оригинального шаблона и законов сохранения.

Имея изначально слабые (практически нулевые) диссипативные и хорошие дисперсионные характеристики, убедительно доказанные при решении различных задач в одномерной и двумерной постановках, схема КАБАРЕ изначально позиционировалась как Perfect LES алгоритм. В настоящее время в литературе практически не опубликованы работы по совместной реализации схемы КАБАРЕ и приближения слабой сжимаемости [126] в применении к свободным сдвиговым течениям. В настоящей главе имеется раздел, посвящённый моделированию трёхмерного вихревого течения Тейлора–Грина с целью проверки диссипативных свойств схемы, реализованной в приближении слабой сжимаемости, на основе анализа интегральных и спектральных характеристик. Результате моделирования на примере анализа интегральных характеристик однородной турбулентности удалось показать, в целом, удачное использование слабой сжимаемости, существование в трёхмерном случае скрытого механизма численной диссипации, а также необходимость относить данную реализацию схемы к Implicit LES алгоритмам.

3.2 Распространение возмущений в одномерном случае в модели слабосжимаемой жидкости

Существует несколько различных реализаций схемы КАБАРЕ, разработанных для газодинамических течений, несжимаемой жидкости, в которых уравнения формулируются относительно переменных «давление–скорость» [167], «завихренность–функция тока» [166], а также отличаются количеством переносимых по сетке инвариантов. Приближение слабой сжимаемости представляет собой промежуточную модель, позволяющую упростить алгоритм отбора значений локальных инвариантов, а также избежать решения уравнения Лапласа для давления.

Запишем однородные ДУ в ЧП в консервативной форме, соответствующие уравнению неразрывности и количества движения в одномерной постановке:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

В качестве уравнения состояния среды используется уравнение баротропности, соответствующее модели слабосжимаемой жидкости:

$$p = c^2(\rho - \rho_0), \quad \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2}. \tag{3.2}$$

Заменим уравнения системы их линейными комбинациями так, чтобы каждое уравнение новой системы содержало производные от входящих в него функций только по одному направлению в плоскости (x,t), таким образом, k-е уравнение будет содержать производные вида

$$\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.3}$$

Системы линейных и квазилинейных уравнений, для которых такое преобразование возможно, а детерминант матрицы, составленной из коэффициентов при производных (3.3) отличен от нуля, называют гиперболическими [170]. Для системы уравнений (3.1) такое преобразование даёт:

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{3.4}$$

где I_k^i — инварианты Римана:

$$I_1^x = u + c\ln\left(p\left(\rho\right) + c^2\rho_0\right), \quad I_2^x = u - c\ln\left(p\left(\rho\right) + c^2\rho_0\right). \tag{3.5}$$

Важным аспектом является возможность разложения уравнения баротропности в ряд Тейлора (3.5) вследствие очевидного соотношения между членами $c^2\rho_0 \gg |p(\rho)|$ в реальной жидкости. В частности, в авторской монографии [28] предлагается провести именно такое преобразование, придающее найденным инвариантам вид:

$$I_1^x = u + \frac{p}{c\rho_0}, \quad I_2^x = u - \frac{p}{c\rho_0}. \tag{3.6}$$

В настоящей работе мы не будем следовать этому приёму, несмотря на неэкономичность операции при численном счёте ln.

Схема КАБАРЕ, имея формально первый порядок точности по времени и второй по пространству, является явной и требует ограничения величины шага по времени исходя из условия устойчивости $\Delta t = \mathrm{CFL} \cdot \Delta x / \max(|\lambda_1^x|, |\lambda_2^x|)$, где $\mathrm{CFL} < 1$ — число Куранта–Фридрихса–Леви.

Алгоритм расчёта консервативных переменных на новом временном слое подразделяется на следующие основные этапы.

1. Задание соответствующих начальных условий для консервативных переменных на внутренних точках расчетной области, а также граничных условий для потоковых переменных, последующее вычисление переносящихся от левой границы локальных инвариантов Римана первого рода и инвариантов второго рода, переносящихся от правой.

2. Интерполяция потоковых переменных ρ, u по консервативным $\mathbb{R}$, U.

3. Вычисление консервативных переменных на $n + 1/2$ слое по однородным уравнениям (см. схему шаблона на рисунке 3.1a):

$$\frac{[\mathbb{R}]_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}]_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} + \frac{[\rho u]_{i+1}^{n} - [\rho u]_{i}^{n}}{\Delta x} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{[\mathbb{R}U]_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}U]_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} + \frac{\left[\rho u^2 + p\right]_{i+1}^{n} - \left[\rho u^2 + p\right]_{i}^{n}}{\Delta x} = 0 \tag{3.8}$$

4. Вычисление двух первых инвариантов I_1^x, I_2^x по известным потоковым переменным на n-ом временном слое и по консервативным переменным на $n + 1/2$ слое, переносимых сквозь ячейку в направлении X:

$$\begin{aligned} \left[I_x^1\right]_i^n &= c\ln\left([p]_i^n + c^2\rho_0\right) + [u]_i^n, & [I_x^1]_i^{n+\frac{1}{2}} &= c\ln([p]_i^{n+\frac{1}{2}} + c^2\rho_0) + [u]_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \left[I_x^1\right]_i^n &= -c\ln\left([p]_i^n + c^2\rho_0\right) + [u]_i^n, & [I_x^2]_i^{n+\frac{1}{2}} &= -c\ln([p]_i^{n+\frac{1}{2}} + c^2\rho_0) + [u]_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

5. Интерполяция инвариантов на $n + 1$ временном слое:

$$\begin{aligned} \lambda_1^x &= u + c > 0, \quad [I_1^x]_i^{n+1} = 2\,[I_1^x]_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [I_1^x]_{i-1}^n, \\ \lambda_2^x &= u - c < 0, \quad [I_2^x]_i^{n+1} = 2\,[I_2^x]_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [I_2^x]_{i+1}^n, \end{aligned} \tag{3.10}$$

6. Поскольку линейные разностные схемы второго и более порядков аппроксимации являются немонотонными, то для построения монотонных и сильно монотонных разностных схем высокого порядка точности приходится использовать различные минимаксные процедуры коррекции потоков, приводящие к нелинейным схемам даже при аппроксимации линейных уравнений. Таким образом,

в схему КАБАРЕ вводится алгоритм нелинейной коррекции инвариантов на основе принципа максимума (рисунки 3.1б, 3.1в):

$$[I_l^x]_i^{n+1}=\begin{cases}[I_l^x]_i^{n+1}, & \text{если } \min\left(I_l^x\right)\leqslant [I_l^x]_i^{n+1}\leqslant \max\left(I_l^x\right)\\ \min\left(I_l^x\right), & \text{если } [I_l^x]_i^{n+1}<\min\left(I_l^x\right)\\ \max\left(I_l^x\right), & \text{если } [I_l^x]_i^{n+1}>\max\left(I_l^x\right)\end{cases},\quad l=1,2, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned}\max\left(I_1^x\right)&=\max\left\{[I_1^x]_{i-1}^n,\quad [I_l^x]_{i-\frac{1}{2}}^n,\quad [I_l^x]_i^n\right\},\quad \max(I_2^x)=\max\left\{[I_2^x]_{i+1}^n,\quad [I_1^x]_{i+\frac{1}{2}}^n,\quad [I_1^x]_i^n\right\},\\ \min\left(I_1^x\right)&=\min\left\{[I_1^x]_{i-1}^n,\quad [I_1^x]_{i-\frac{1}{2}}^n,\quad [I_l^x]_i^n\right\},\quad \min(I_2^x)=\min\left\{[I_2^x]_{i+1}^n,\quad [I_2^x]_{i+\frac{1}{2}}^n,\quad [I_2^x]_i^n\right\},\end{aligned} \tag{3.12}$$

7. По найденным инвариантам находим потоковые переменные $[u]_i^{n+1}$, $[p]_i^{n+1}$ следующим образом:

$$[u]_i^{n+1}=\frac{I_1^x+I_2^x}{2},\quad [p]_i^{n+1}=-c^2\rho_0+e^{\left(I_1^x-[u]_i^{n+1}\right)/c},\quad [\rho]_i^{n+1}=\rho\left([p]_i^{n+1}\right)$$

8. Расчёт новых значений консервативных переменных на $n+1$-ом временном слое по схеме второго порядка точности для однородных уравнений переноса (рисунок 3.1г):

$$\frac{[\mathbb{R}]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}-[\mathbb{R}]_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t}+\frac{[\overline{\rho u}]_{i+1}-[\overline{\rho u}]_i}{\Delta x}=0, \tag{3.13}$$

$$\frac{[\mathbb{R}U]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}-[\mathbb{R}U]_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t}+\frac{\left[\overline{\rho u^2+p}\right]_{i+1}-\left[\overline{\rho u^2+p}\right]_i}{\Delta x}=0. \tag{3.14}$$

Чертой обозначено значения потоковых переменных, усреднённых на n и $n+1$ слоях по времени.

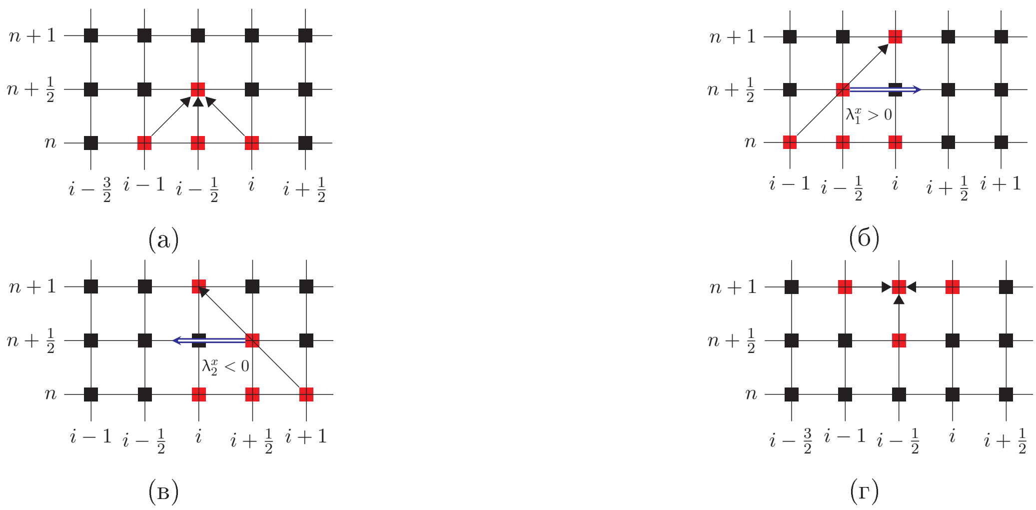


Рисунок 3.1: Сеточная диаграмма узлов шаблона, определяющих значение: (а) — консервативных переменных на $n+\frac{1}{2}$ слое по времени, (б) — значения локального инварианта Римана первого рода $[I_1^x]_{i+1}^{n+1}$, переносимого характеристикой слева направо, (в) — значения локального инварианта Римана второго рода $[I_2^x]_{i+1}^{n+1}$, переносимого характеристикой справа налево, (г) — значения консервативных переменных на $n+1$ временном слое.

Задача о выравнивании давления Алгоритм в одномерной постановке был реализован на языке Fortran F90, с применением технологии параллельного программирования OpenMP. В файле исходных данных задавались следующие параметры: скорость звука $c=1500.0$; длина расчётной области $L_X=2.0$; начальная скорость $u_{\text{init}}=0.0$; начальное давление $p_{\text{init}}=101325.0$; граничная скорость $u_{\text{inlet}}=0.0$; граничное давление $p_{\text{inlet}}=1013250.0$; число Куранта $\text{CFL}=0.15$.

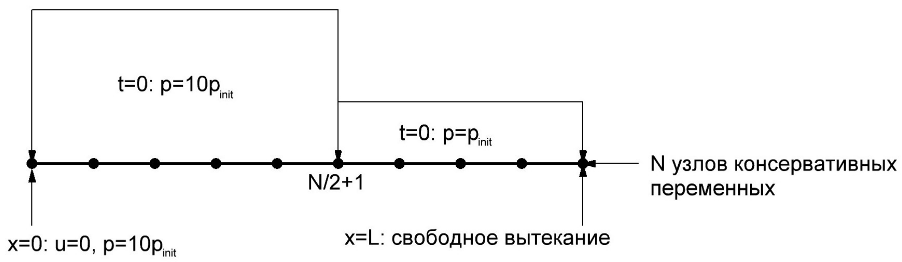
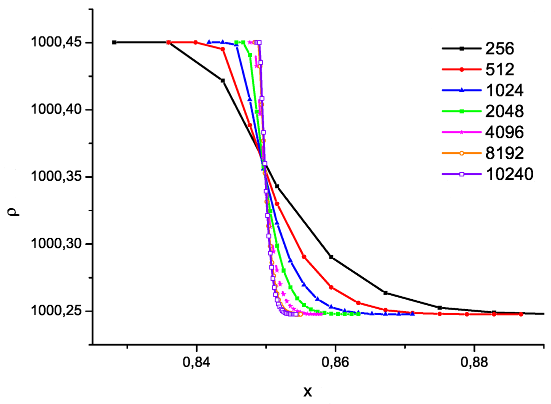
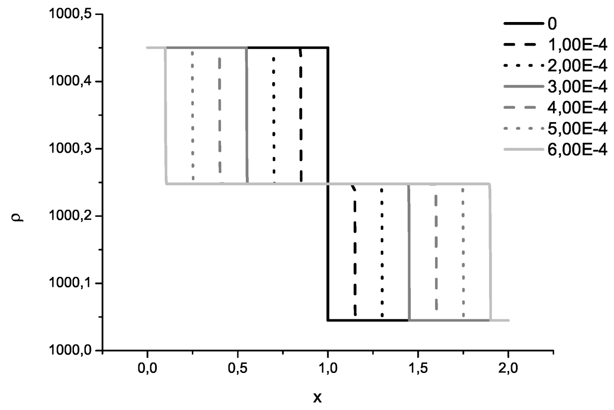


Рисунок 3.2: Постановка задачи с параметрами разрыва в задаче о выравнивании давления (частный случай задачи Римана)



(а)



(б)

Рисунок 3.3: (а) — пространственное распределение плотности в зоне градиента давления при $t = 2 \times 10^4$. Цифры в легенде рисунка соответствуют числу точек n_X расчетной сетки; (б) — процесс выравнивания давления (в переменных «плотность–время») в задаче Римана для слабосжимаемой жидкости, цифры в легенде указывают время, прошедшее с начала процесса, число расчётных точек $n_X = 10240$.

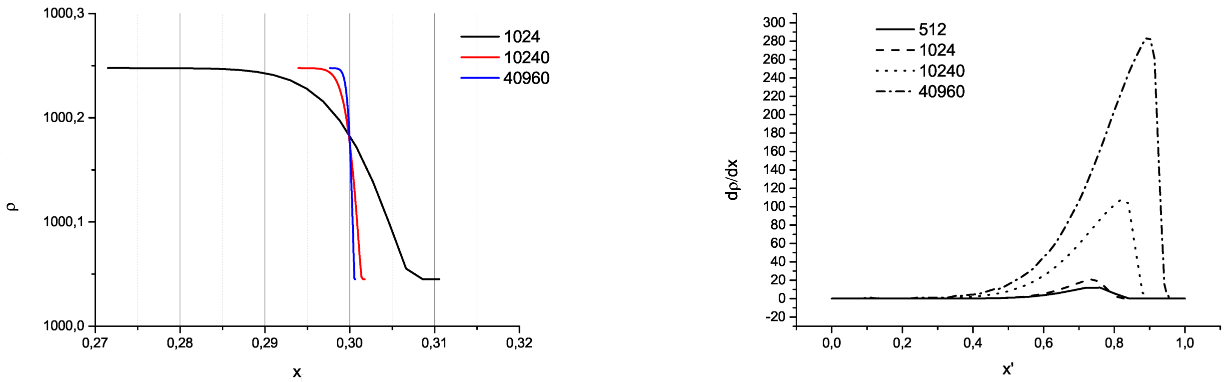
Для задания разрыва в задаче о выравнивании давления расчётная область делилась пополам, в левой её части для консервативных переменных задавалось значение плотности, рассчитываемое по давлению $p = 10p_{\text{init}} = p_{\text{inlet}}$, а в правой части $p = p_{\text{init}}$, при этом в начальный момент времени жидкость считалась неподвижной. В граничных точках расчетной области, соответствующих узлам потоковых переменных, на левой границе задавался свободный выход, а на правой — $p = p_{\text{init}}$ вместе с нулевой скоростью. Результаты проверки сеточной сходимости, осуществлявшейся на системе множеств узловых точек в диапазоне $n_X = 256$–10240, показали укручение фронта волны давления, распространяющейся по одномерному каналу при сгущении сетки, а также отсутствие каких-либо осцилляций, что показывает хорошую эффективность алгоритма нелинейной коррекции потоковых переменных на основе принципа максимума. Вместе с тем, тезис о том, что поверхность разрыва занимает одну ячейку, подтвердить не удалось: при сгущении сетки происходит увеличение пространственного градиента в волне с одновременным увеличением количества точек градиентной зоны (см. рисунок 3.3а).

Процесс выравнивания давления, показанный на рисунке 3.3б в модели слабосжимаемой жидкости происходит со скоростью звука и сопровождается движением возмущённого газа в область с меньшей плотностью, т.е. вправо. Ещё одной особенностью является отсутствие развитой волны разрежения, бегущей влево.

График для переменной скорости, представляющий собой П-образную ступеньку, расширяющуюся к границам расчётной области, здесь не приводится в силу тривиальности.

Расчёт волны сжатия, набегающей от левой границы Начальные условия на значения консервативных переменных $\mathbb{R}$ и U определяются соотношениями: $\mathbb{R} = \rho_{\text{init}}$, $U = u_{\text{init}}$. На левой границе, от которой движется волна сжатия, на основе значений давления $p = p_{\text{inlet}}$, и скорости $U = u_{\text{inlet}}$, вычислялось значение исходящего инварианта I_1^x, что вместе со значением I_2^x из внутренних точек области позволяет найти значения потоковых переменных в граничных точках на новом временном слое. На правой границе ставились условия, соответствующие свободному выходу. На рисунке 3.4а показана градиентная часть волны давления, двигающейся от левой границы при $t = 2.0 \times 10^4$ для различного числа расчётных точек.

На рисунке 3.4б показана зависимость градиента плотности $\partial\rho/\partial x$ в зависимости от числа расчётных точек. Область по оси абсцисс, соответствующая градиенту, нормирована на 1, чтобы лучше отразить факт разрешения разрыва, точнее, его «размывание» на конечное число ячеек.



(а) (б)

Рисунок 3.4: (а) — процесс выравнивания давления (в переменных плотность — длина) при $t = 2.0 \times 10^4$ цифры в легенде указывают число расчётных точек n_X; (б) — пространственный градиент давления при $t = 2.0 \times 10^4$. Цифры в легенде указывают число расчётных точек n_X, ось абсцисс для каждого графика нормирована на ширину градиентной области.

3.3 Расчёт течения вязкой слабосжимаемой нетеплопроводной жидкости в плоском канале по схеме КАБАРЕ

3.3.1 Развитие численного метода

В целях последовательного усложнения расчётного алгоритма и изучения влияния различных граничных условий схема КАБАРЕ была применена к расчёту течения в прямоугольной области вязкой нетеплопроводной слабосжимаемой жидкости. Однако, для компактности изложения в данном Разделе мы приведём алгоритм с учётом уравнения для теплопроводности. Программная реализация выполнялась на основе библиотеки параллельных вычислений OpenMP и рекомендаций [28]. Аналогично предыдущему разделу сначала рассматриваются однородные ДУ в ЧП, представляющие собой уравнения неразрывности и количества движения в консервативной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \Lambda_u U,\\
&\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \Lambda_v V,\\
&\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho T u}{\partial x} + \frac{\partial \rho T v}{\partial y} = \Lambda_v T.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Запишем тензор вязких напряжений $\sigma = \mu/2\left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathbf{T}}\right]$, используя обозначения:

$$q_x^u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_y^u = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_x^v = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_y^v = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3.16}$$

$$\sigma = \mu/2 \begin{pmatrix} 0 & q_y^u + q_x^v \\ q_y^u + q_x^v & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Пренебрегая влиянием сжимаемости, запишем выражения для правых частей неоднородных уравнений переноса в дивергентной форме:

$$\begin{aligned}
\Lambda_u U &= \left(\frac{\partial \mu q_x^u}{\partial x} + \frac{\partial \mu q_y^u}{\partial y}\right),\\
\Lambda_v V &= \left(\frac{\partial \mu q_x^v}{\partial x} + \frac{\partial \mu q_y^v}{\partial y}\right),\\
\Lambda_v T &= \frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial \lambda q_x^T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda q_y^T}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где $q_x^T = \partial T/\partial x$, $q_y^T = \partial T/\partial y$.

Аналогично предыдущему разделу перепишем уравнения (3.15) в характеристической форме:

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = G_k^x, \quad \frac{\partial I_k^y}{\partial t} + \lambda_x^k \frac{\partial I_k^y}{\partial x} = G_k^y, \quad k = 1-4, \tag{3.19}$$

где I_k^i — инварианты Римана:

$$\begin{aligned}
&I_1^x = c\ln\left(p + c^2\rho_0\right) + u, \quad I_2^x = -c\ln\left(p + c^2\rho_0\right) + u, \quad I_3^x = v, \quad I_4^x = T\\
&I_1^y = c\ln\left(p + c^2\rho_0\right) + v, \quad I_2^y = -c\ln\left(p + c^2\rho_0\right) + v, \quad I_3^y = u, \quad I_4^y = T,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

а λ_k^x, λ_k^y, $k = 1{,}4$ — характеристические числа:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^x = u + c, \quad \lambda_2^x = u - c, \quad \lambda_{3,4}^x = u,\\
&\lambda_1^y = v + c, \quad \lambda_2^y = v - c, \quad \lambda_{3,4}^y = v.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Временной шаг вычисляется из расширенного условия устойчивости, и, так как поток жидкости всегда существенно дозвуковой, то $\Delta t = \mathrm{CFL}\, h \min(1/c, 2h\rho/\mu, 2h\rho/c_p\lambda)$, где $h = \min(\Delta x{,}\Delta y)$.

В двумерном случае основной алгоритм расчёта консервативных переменных на новом шаге должен быть модифицирован.

1. Инициализация консервативных $\mathbb{R}$, U, V, Θ и потоковых переменных ρ, u, v, T (n-ый слой) на основе значений НУ, так чтобы дивергенция скорости в расчётной области была равна нулю. На диаграмме на рисунке 3.5 индексы $(i{,}j)$ обозначают индексацию по направлениям X и Y соответственно, C — положение точек так называемых консервативных переменных, а F_{X} и F_{Y} — потоковых.

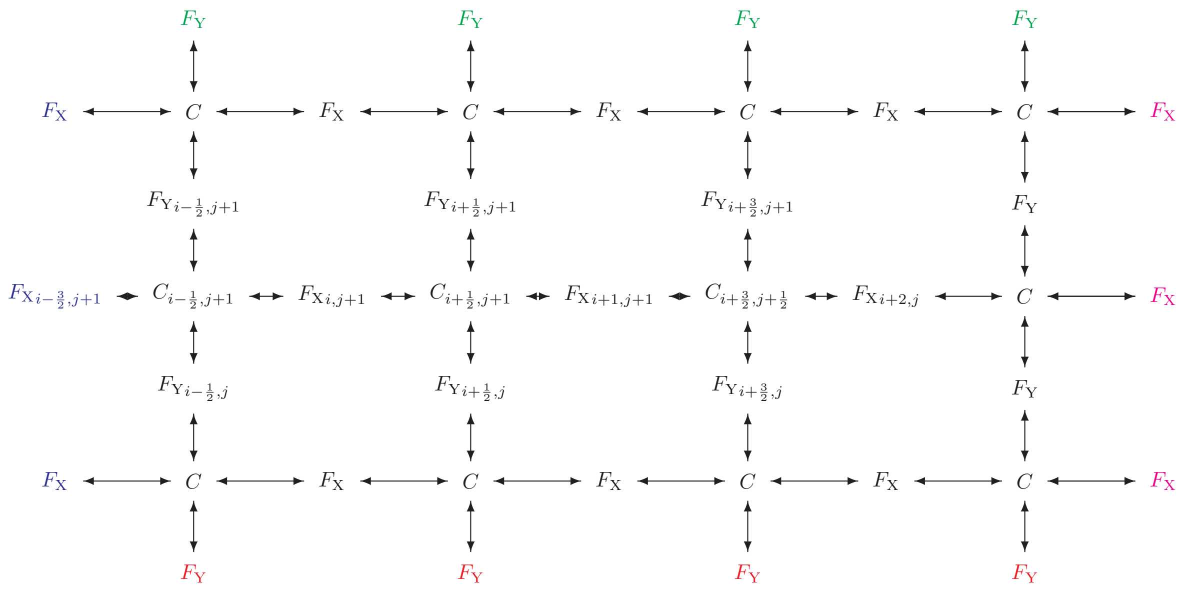


Рисунок 3.5: Диаграмма сеточных множеств для двумерной реализации схемы КАБАРЕ. Различными цветами обозначены участки сеточных множеств потоковых переменных, значения в которых определяются, исходя из граничных условий.

Подмножества потоковых переменных в граничных ячейках, для которых значения на новом слое по времени определяются исходя из граничных условий, отмечены цветовыми обозначениями.

2. Вычисление консервативных переменных на промежуточном слое по конечно-разностным аналогам однородных ДУ в ЧП:

$$\frac{[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[\mathbb{R}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}+\frac{[\rho u]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-[\rho u]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{[\rho v]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-[\rho v]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y}=0, \tag{3.22}$$

$$\frac{{}^{n+\frac{1}{2}}\,[\mathbb{R}U]^{i+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}-[\mathbb{R}U]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta/2}+\frac{\left[\rho u^2+p\right]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-\left[\rho u^2+p\right]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{[\rho uv]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-[\rho uv]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y}=0, \tag{3.23}$$

$$\frac{[\mathbb{R}V]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[\mathbb{R}V]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}+\frac{[\rho uv]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-[\rho uv]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{\left[\rho v^2+p\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-\left[\rho v^2+p\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y}=0, \tag{3.24}$$

$$\frac{[\mathbb{R}\Theta]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[\mathbb{R}\Theta]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}+\frac{[\rho Tu]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-[\rho Tvu]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{[\rho Tv]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-[\rho Tv]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y}=0. \tag{3.25}$$

В уравнениях (3.22)-(3.24) индекс i обозначает номер расчётной точки по направлению X, j — по направлению Y, n — номер временного слоя, индексы $i+1/2$ и $j+1/2$ относятся к потоковым переменным, отвечающим за перенос в направлениях X и Y соответственно и принадлежащим к серединам граней ячеек, $n+1/2$ относится только к консервативным переменным промежуточного слоя.

3. Определение консервативных переменных на промежуточном слое по неоднородным уравнениям

$$
\begin{aligned}
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\left[\tilde{U}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [U]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \Lambda^h U^n,\\
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\left[\tilde{V}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [V]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \Lambda^h V^n,\\
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\left[\tilde{\Theta}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [\Theta]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \Lambda^h T^n,
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
\Lambda^h U^n = \frac{1}{\Delta x}\left([\mu]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\left([q^u_x]^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - [q^u_x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\right) + \frac{1}{\Delta y}\left([\mu]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\left(\left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)\right), \tag{3.27}
$$

$$
\Lambda^h V^n = \frac{1}{\Delta x}\left([\mu]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\left([q^v_x]^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - [q^v_x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\right) + \frac{1}{\Delta y}\left([\mu]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\left(\left[q^v_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)\right), \tag{3.28}
$$

$$
\Lambda^h T^n = \frac{1}{c_p}\left(\frac{[\lambda]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\left(\left[q^T_x\right]^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \left[q^T_x\right]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{[\lambda]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\left(\left[q^T_x\right]^n_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left[q^T_x\right]^n_{i+\frac{1}{2},j}\right)\right), \tag{3.29}
$$

потоки в центрах ячеек внутренней области ($i = 1\ldots n_{\mathrm{X}} - 1, j = 1\ldots n_{\mathrm{Y}} - 1$) рассчитываются по формулам

$$
\begin{aligned}
&[q^u_x]^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{[U]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [U]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{[U]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [U]^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y},\\
&[q^v_x]^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{[V]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [V]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \left[q^v_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{[V]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [V]^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y},\\
&\left[q^T_x\right]^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{[T]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [T]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \left[q^T_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{[T]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [T]^n_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Для расчёта потоков в граничных ячейках используются значения соседней потоковой переменной, что приводит к появлению дополнительного множителя – 2:

$$
\begin{aligned}
&[q^u_x]^n_{1,j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[U]^n_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [u]^n_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad [q^u_x]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[u]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} - [u]^n_{n_{\mathrm{X}}-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},\\
&\left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},1} = 2\frac{[U]^n_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - [u]^n_{i+\frac{1}{2},0}}{\Delta y}, \quad \left[q^u_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} = 2\frac{[u]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} - [U]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}-\frac{1}{2}}}{\Delta y},\\
&[q^v_x]^n_{1,j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[V]^n_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [v]^n_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad [q^v_x]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[v]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} - [V]^n_{n_{\mathrm{X}}-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},\\
&\left[q^v_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},1} = 2\frac{[V]^n_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - [v]^n_{i+\frac{1}{2},0}}{\Delta y_i}, \quad \left[q^v_y\right]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} = 2\frac{[v]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} - [V]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}-\frac{1}{2}}}{\Delta y},\\
&\left[q^T_x\right]^n_{1,j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[\Theta]^n_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [T]^n_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \left[q^T_x\right]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} = 2\frac{[T]^n_{n_{\mathrm{X}},j+\frac{1}{2}} - [\Theta]^n_{n_{\mathrm{X}}-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},\\
&\left[q^T_y\right]^n_{j+\frac{1}{2},1} = 2\frac{[\Theta]^n_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - [T]^n_{i+\frac{1}{2},0}}{\Delta x}, \quad \left[q^T_x\right]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} = 2\frac{[T]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}} - [\Theta]^n_{i+\frac{1}{2},n_{\mathrm{Y}}-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

4. Вычисление значений потоковых переменных во внутренних точках области. Так как течение слабосжимаемой жидкости всегда дозвуковое, то значения инварианта первого рода переносятся

слева на направо, а второго рода — справа налево. Вычислим значение инварианта первого рода по его значениям консервативных переменных слева на промежуточном слое

$$[I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

потоковых слева на предыдущем слое по времени

$$[I_1^x]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n} = c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n} \tag{3.33}$$

по выражению

$$[I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2\,[I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [I_1^x]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}\,. \tag{3.34}$$

Для применения алгоритма коррекции необходимо вычислить инварианты для консервативных переменных слева на предыдущем слое:

$$[I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n} = c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}\,, \tag{3.35}$$

и по значениям потоковых переменных в текущей точке на предыдущем слое:

$$[I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} = c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1}\,, \tag{3.36}$$

на основе которых проведем интерполяцию правой части неоднородного уравнения переноса в характеристической форме:

$$\langle G_1^x\rangle_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{[I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t/2} + [\lambda]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\,\frac{[I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - [I_1^x]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x}. \tag{3.37}$$

Нелинейная коррекция первого инварианта по параметрам правой ячейки:

$$[I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{cases} [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}\,, & \text{если } \min(I_1^x) \leqslant [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \leqslant \max(I_1^x) \\ \min(I_1^x), & \text{если } [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} < \min(I_1^x) \\ \max(I_1^x), & \text{если } [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} > \max(I_1^x) \end{cases}, \tag{3.38}$$

где

$$\begin{aligned} \max(I_1^x) &= \max\left\{[I_1^x]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}\,,\quad [I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}\,,\quad [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\right\} + \Delta t\langle G_1^x\rangle_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \min(I_1^x) &= \min\left\{[I_1^x]_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}\,,\quad [I_1^x]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n}\,,\quad [I_1^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\right\} + \Delta t\langle G_1^x\rangle_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Аналогично по параметрам правой ячейки находится значение инварианта второго рода, используя консервативные переменные на промежуточном слое в её центре

$$[I_2^x]_{i+1\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -c\ln\left(p\left({}^{n+\frac{1}{2}}\,[\mathbb{R}]^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\,, \tag{3.40}$$

потоковые переменные справа на предыдущем слое по времени

$$[I_2^x]_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n} = -c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n}\right)+c^2\rho_0\right)+[\mathbb{U}]_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n}\,, \tag{3.41}$$

— по выражению

$$[I_2^x]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2\,[I_2^x]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [I_2^x]_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n}\,. \tag{3.42}$$

Для применения алгоритма коррекции необходимо вычислить инварианты для консервативных переменных справа на предыдущем слое:

$$[I_2^x]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) + c^2\rho_0\right) + [\mathbb{U}]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,, \tag{3.43}$$

и по значениям потоковых переменных в текущей точке на предыдущем слое:

$$[I_2^x]^{n-1}_{i,j+\frac{1}{2}} = -c\ln\left(p\left([\mathbb{R}]^{n-1}_{i,j+\frac{1}{2}}\right) + c^2\rho_0\right) + [\mathbb{U}]^{n-1}_{i,j+\frac{1}{2}}\,, \tag{3.44}$$

на основе которых проведем интерполяцию правых частей неоднородных уравнений переноса в характеристической форме:

$$\langle G_2^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{[I_2^x]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [I_2^x]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + [\lambda]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{[I_2^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}} - [I_2^x]^n_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \tag{3.45}$$

Нелинейная коррекция второго инварианта по параметрам правой ячейки:

$$[I_2^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} [I_2^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}\,, & \text{если } \min(I_2^x) \leqslant [I_2^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} \leqslant \max(I_2^x) \\ \min(I_2^x), & \text{если } [I_2^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} < \min(I_2^x) \\ \max(I_2^x), & \text{если } [I_2^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} > \max(I_2^x) \end{cases}, \tag{3.46}$$

где

$$\begin{gathered} \max(I_2^x) = \max\left\{[I_2^x]^n_{i+1,j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_2^x]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_2^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right\} + \Delta t\langle G_2^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ \min(I_2^x) = \min\left\{{}^n[I_2^x]^{i+1,j+\frac{1}{2}},\quad [I_2^x]^n_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},\quad [I_2^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right\} + \Delta t\langle G_2^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{3.47}$$

По найденным инвариантам находятся потоковые переменные $[u]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}$, $[\rho]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}$, новое значение потоковой скорости используется в качестве «переключателя.» На этом этапе алгоритм (в отличие от исходной реализации) имеет тройное ветвление, связанное с выделением условия $[u]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = 0$, при котором значения инвариантов на новом временном слое следует считать неизменными $\left[I_3^l\right]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = [I_l^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}$, $k = 3{,}4$. В противном случае может наблюдаться ситуация ошибочного распространения (тепловой) волны по почти неподвижной среде при появлении случайных ошибок порядка $O(10^{-16})$ (двойная точность вещественных чисел в Fortran F90), которые возникают вследствие некоммутативности бинарных операции сложения и вычитания очень больших и очень малых чисел на ЭВМ.

Если $[u]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} > 0$, вычисляются по параметрам левой ячейки:

$$[I_l^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = 2\,[I_l^x]^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [I_l^x]^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}\,,\quad l = 3{,}4, \tag{3.48}$$

$$[I_3^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} [I_l^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}\,, & \text{если } \min(I_l^x) \leqslant [I_l^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} \leqslant \max(I_l^x) \\ \min(I_l^x), & \text{если } [I_l^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} < \min(I_l^x) \\ \max(I_l^x), & \text{если } [I_l^x]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} > \max(I_l^x) \end{cases},\quad l = 3{,}4, \tag{3.49}$$

где

$$\begin{gathered} \max(I_l^x) = \max\left\{[I_l^x]^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_l^x]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_l^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right\} + \Delta t\langle G_l^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ \min(I_l^x) = \min\left\{[I_l^x]^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_l^x]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,,\quad [I_l^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}}\right\} + \Delta t\langle G_l^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ \langle G_l^x\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{[I_l^x]^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [I_l^x]^n_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + [\lambda_l^x]^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{[I_l^x]^n_{i,j+\frac{1}{2}} - [I_l^x]^n_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},\quad l = 3{,}4. \end{gathered} \tag{3.50}$$

Если $[u]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} < 0$, то инварианты вычисляются и корректируются по параметрам правой ячейки:

$$[I^x_l]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = 2\,[I^x_l]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [I^x_l]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}\,, \quad l = 3{,}4, \tag{3.51}$$

$$[I^x_l]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} [I^x_l]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}\,, & \text{если } \min(I^x_l) \leqslant [I^x_l]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} \leqslant \max(I^x_l) \\ \min(I^x_l), & \text{если } [I^x_l]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} < \min(I^x_l) \\ \max(I^x_l), & \text{если } [I^x_3]^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} > \max(I^x_l) \end{cases}, \quad l = 3{,}4, \tag{3.52}$$

где

$$\begin{gathered} \max(I^x_l) = \max\big\{[I^x_l]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \quad [I^x_l]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,, \quad [I^x_l]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\big\} + \Delta t \langle G^x_l\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ \min(I^x_l) = \min\big\{[I^x_l]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \quad [I^x_l]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,, \quad [I^x_l]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\big\} + \Delta t \langle G^x_l\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ \langle G^x_l\rangle^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{[I^x_l]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [I^x_l]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + [\lambda]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\,\frac{[I^x_l]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - [I^x_l]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad l = 3{,}4. \end{gathered} \tag{3.53}$$

Затем по новым значениям инвариантов находятся недостающие значения потоковых переменных. Расчёт потоковых переменных, отвечающих за перенос в направлении Y производится аналогичным образом.

6. Вычисление значений потоковых переменных в граничных точках области (на примере левой границы) в соответствии с различными типами граничных условий. На каждой из четырёх границ может быть поставлено 6 типов граничных условий для потоковых переменных $[\rho]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$: непротекание (а), прилипание (б), дозвуковой вход (в), свободное истечение (г), периодическое граничное условие (д), периодическое граничное условие с сохранением градиента давления (е), а также два условия для температуры $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ — постоянная температура (ж), нулевой градиент (з).

(а) Условие непротекания применяется для расчёта идеальных жидкостей или для имитации проскальзывания реальной жидкости вдоль каких-либо границ, при этом нормальная к стенке компонента скорости зануляется: $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = 0$, значение касательной компоненты экстраполируется по значению консервативной переменной $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [V]^{n+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$: давление на стенке $[p]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, вычисляется по значениям инварианта $[I^x_2]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ приходящего из глубины расчётной области, процедура его расчёта повторяет этапы расчёта I^x_2 во внутренних точках области, в том числе и использование алгоритма нелинейной коррекции.

(б) Условие прилипания на стенке приводит к $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = 0$, $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = 0$, давление и соответствующая плотность рассчитываются аналогичным п. (а) образом.

(в) Для определения условия дозвукового входа необходимо задать параметры на бесконечности p^{n+1}_∞, u^{n+1}_∞, v^{n+1}_∞, по которым рассчитываются инвариант Римана первого рода, приходящий на левую стенку из бесконечности $[I^x_1]^{n+1}_\infty = [u]^{n+1}_\infty + c\ln\Big([p]^{n+1}_\infty + c^2\rho_0\Big)$, Затем необходимо найти инвариант второго рода, приходящий на переднюю границу из глубины области в точности также, как для ячеек внутренней области, однако, в выражении для аппроксимации правых частей уравнений переноса следует использовать усреднённое значение характеристической скорости:

$$[\lambda^x_2]^{n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left([u]^{n+1}_\infty + [U]^{n+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) - c,$$

В итоге по известным $[I^x_1]^{n+1}_\infty$, $[I^x_2]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ находятся значения потоковых переменных на новом слое на левом ребре расчётной ячейки $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ и $[p]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$. Способ расчёта значения третьего и четвёртого инвариантов определятся знаком осреднённый характеристической скорости

$$[\lambda^x_3]^{n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(U^{n+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u^{n+1}_\infty\right), \tag{3.54}$$

здесь мы также допускаем тройное ветвление алгоритма: если $\left[\lambda^x_{3,4}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}} = 0$, то $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [v]^{n}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [T]^{n}_{0,j+\frac{1}{2}}$, если $\left[\lambda^x_{3,4}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}} > 0$, то $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = \left[\overset{\infty}{I^x_3}\right]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = \left[\overset{\infty}{I^x_4}\right]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, в противном случае $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ необходимо вычислять и корректировать по параметрам ячейки слева, аналогично алгоритму для внутренних ячеек.

(г) Для свободного выхода необходимо потребовать квазистационарность числа Маха $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [U]^{n+1}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, в случае слабосжимаемой жидкости совпадающее с требованием квазистационарности третьего характеристического числа. Для нахождения граничного значения плотности необходимо найти инвариант $[I^x_1]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, приходящий на переднюю границу справа. Другие инварианты, определяющие значения $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}}$ рассчитываются по параметрам правой ячейки, если $\left[\lambda^x_{3,4}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{n_X+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} < 0$, если же $\left[\lambda^x_{3,4}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{n_X+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$, то $[v]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [v]^{n}_{0,j+\frac{1}{2}}$, $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [T]^{n}_{0,j+\frac{1}{2}}$. В противном случае им присваиваются начальные значения.

(д) Периодическое граничное условие оказывается более сложным и требует задания одновременно на противоположных границах расчётной области, таким образом процедуры расчёта инвариантов для правой и левой границ совпадают. Инвариант $[I^x_2]^{n+1}_{n_X,i+\frac{1}{2}}$ рассчитывается и корректируется по параметрам крайней правой ячейки, в то время как значения $[I^x_1]^{n+1}_{0,i+\frac{1}{2}}$ — по крайней левой, по ним находятся значения $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [u]^{n+1}_{n_X,j+\frac{1}{2}}$, $[p]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [p]^{n+1}_{n_X,j+\frac{1}{2}}$. Значения характеристического числа $\left[\lambda^x_{3,4}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}}$ определяют по параметрам какой из указанных выше ячеек будут вычисляться значения $\left[I^x_{3,4}\right]^{n+1}_{0,i+\frac{1}{2}}$ или останутся неизменными.

(е) Как и в предыдущем случае расчёт периодического условия с сохранением перепада давления производится по инвариантам $[I^x_1]^{n+1}_{0,i+\frac{1}{2}}$ вместе с $[I^x_2]^{n+1}_{n_X,i+\frac{1}{2}}$, значения которых переносятся характеристиками из глубины расчетной области, по ним также определяются значения скорости $[u]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [u]^{n+1}_{n_X,j+\frac{1}{2}}$, в то время как значения плотности (или давления) должны быть скорректированы с учётом перепада давления Δp между границами: $[p]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [p]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} + \Delta p/c^2$ — для левой границы, $[p]^{n+1}_{n_X,j+\frac{1}{2}} = [p]^{n+1}_{n_X,j+\frac{1}{2}} - \Delta p/c^2$ — для правой границы. Расчёт компоненты скорости в направлении Y и температуры производятся согласно направлению характеристической скорости.

(ж) Условие постоянной температуры на стенке: $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = T_1$.

(з) Условие нулевого теплового потока по нормали к стенке: $[T]^{n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} = [T]^{n+1}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$.

7. Рассчитаем новые значения консервативных переменных на $n+1$-ом временном слое по схеме второго порядка точности для однородных уравнений переноса:

$$\frac{[\mathbb{R}]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + \frac{[\overline{\rho u}]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - [\overline{\rho u}]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{[\overline{\rho v}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - [\overline{\rho v}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y} = 0, \tag{3.55}$$

$$\frac{[\mathbb{R}U]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}U]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + \frac{\left[\overline{\rho u^2+p}\right]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \left[\overline{\rho u^2+p}\right]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{[\overline{\rho uv}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - [\overline{\rho uv}]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y} = 0, \tag{3.56}$$

$$\frac{[\mathbb{R}V]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}V]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + \frac{[\overline{\rho uv}]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - [\overline{\rho uv}]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\left[\overline{\rho v^2+p}\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left[\overline{\rho v^2+p}\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y} = 0, \tag{3.57}$$

$$\frac{[\mathbb{R}\Theta]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - [\mathbb{R}\Theta]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + \frac{\left[\overline{\rho T u}\right]^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \left[\overline{\rho T u}\right]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\left[\overline{\rho T v}\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left[\overline{\rho T v}\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y} = 0. \tag{3.58}$$

8. Теперь необходимо провести перерасчёт консервативных переменных на новом временном слое с учётом сил вязкого трения, которые также представляются в потоковой форме:

$$\begin{aligned}
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\left[\tilde{U}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[U]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\Lambda^h U^{n+\frac{1}{2}},\\
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\left[\tilde{V}\right]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[V]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\Lambda^h V^{n+\frac{1}{2}},\\
&[\mathbb{R}]^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\frac{\left[\tilde{\Theta}\right]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-[\Theta]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\Lambda^h T^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{3.59}$$

Для внутренних ячеек потоки рассчитываются по значениям консервативных переменных на промежуточном слое, тогда как для граничных ячеек используется значение потоковых переменных, усреднённое по двум слоям:

$$\overline{[u]}_{l,j+\frac{1}{2}}=0.5\left([u]^n_{l,j+\frac{1}{2}}+[u]^{n+1}_{l,j+\frac{1}{2}}\right),\quad \overline{[v]}_{l,j+\frac{1}{2}}=0.5\left([v]^n_{l,j+\frac{1}{2}}+[v]^{n+1}_{l,j+\frac{1}{2}}\right),\quad l=1,n_{\mathrm{X}},$$

$$\overline{[u]}_{i+\frac{1}{2},m}=0.5\left([u]^n_{i+\frac{1}{2},m}+[u]^{n+1}_{i+\frac{1}{2},m}\right),\quad ,\overline{[v]}_{i+\frac{1}{2},m}=0.5\left([v]^n_{i+\frac{1}{2},m}+[v]^{n+1}_{j+\frac{1}{2},m}\right),\quad m=1,\ldots,n_{\mathrm{Y}}.$$

9. на заключительном этапе происходит копирование новых потоковых переменных:

$$\rho^n=\rho^{n+1}, u^n=u^{n+1}, v^n=v^{n+1}.$$

3.3.2 Расчёт установления плоского течения Пуазейля

Численный алгоритм расчёта в двумерной области был реализован языке Fortran F90 с применением технологии (библиотеки) OpenMP. Параллельные секции использовались в каждой из последовательно вызываемых процедур. В качестве теста использовалось плоское течение Пуазейля, которое устанавливалось под действием градиента давления в изначально покоящейся жидкости. Следует ещё раз отметить, в схеме КАБАРЕ необходимо задать условия именно для инвариантов Римана, на основе которых затем и вычисляются потоковые переменные на границах. Таким образом, давление, задаваемое на бесконечности, имеет смысл полного давления (давления торможения для изоэнтропических течений сжимаемого газа). Для наиболее точного воспроизводства течения Пуазейля необходимо задать условия на значения статического давления p для потоковой переменной.

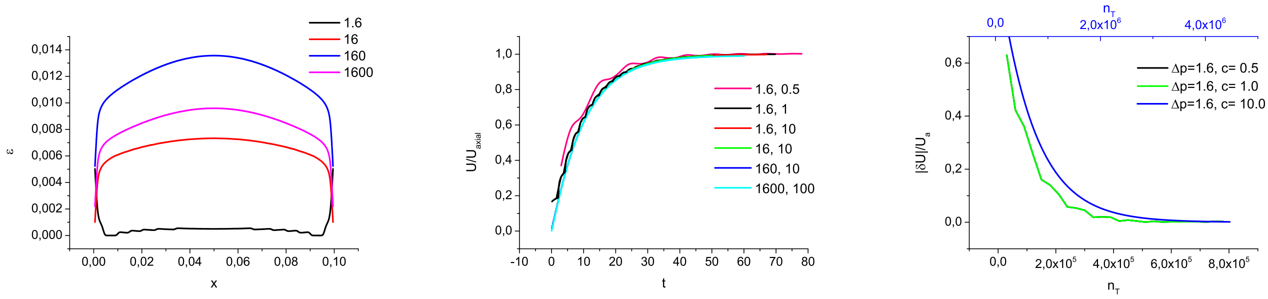
В расчёте использовалась достаточно грубая сетка с числом ячеек $n_{\mathrm{X}}\times n_{\mathrm{Y}}$ — 60×100. Кроме того, перед началом расчёта задаются скорость звука $c=1.0$–100, вязкость жидкости $\mu=0.1$, длина канала $L_{\mathrm{X}}=2.0$, ширина канала $L_Y=0.1$, начальная плотность в уравнении состояния $\rho_0=1000.0$, компоненты начальной скорости и давления полагаются равными нулю. Результаты расчёта сравнивались с установившиеся формой профиля, задаваемой соотношением

$$U_a(y)=\frac{\Delta p}{2\mu L_{\mathrm{X}}}y\left(y-L_{\mathrm{Y}}\right),\quad y\in[0,L_{\mathrm{Y}}],\tag{3.60}$$

путём вычисления относительной ошибки $\varepsilon=\left|U_c-U_a\right|/U_a$. Максимум этой величины, приведённой на рисуке 3.6a для различных значений перепада статического давления Δp не превышает 1.5% и приходится на осевую область для всех расчётов кроме первого.

Это связано с крайне медленным завершением процесса установления, который, возможно, не завершается за $\Delta t=70$. Вместе с тем, в первом расчёте, проведённом для очень медленного течения при $\Delta p = 1.6$ и осевой скорости $U_{\text{axial}} = 0.01$, диапазон максимальной ошибки приходится на приграничные слои и не превышает 0.5%. Погрешности, в целом, соответствуют погрешности модели слабосжимаемой жидкости (1%).

Рассмотрим теперь процесс установления течения, который в случае модели слабосжимаемой жидкости заключается в следующем. В момент начала течения от передней границы начинает распространяться волна сжатия, разделяющая области подвижной и неподвижной жидкости. Достигнув конца канала, она отражается волной разрежения, также сопровождаемой волной скорости, и движется вверх по течению к передней границе, вновь отражаясь волной сжатия. Указанный процесс повторяется многократно вплоть до установления постоянного градиента давления и хорошо проявляет себя в виде колебаний скорости на графике $\Delta p = 1.6$, приведённом на рисунке 3.6б (чёрная линия). Амплитуда этих колебаний снижается по мере установления. Стоит также отметить, что приращение скорости вследствие прохождения волны разрежения в несколько раз превосходит приращение в волне сжатия. Наиболее примечательным результатом оказалось то, что график роста скорости U/U_{axial} оказался независящим от градиента давления Δp, а также от скорости распространения возмущений во всем диапазоне изменения параметров расчёта. В силу нелинейной формы переносимых инвариантов, данное явление может представлять собой класс автомодельных решений уравнений Навье–Стокса. Одним из недостатков модели слабосжимаемой жидкости явля-



(а) (б) (в)

Рисунок 3.6: (а) — относительная ошибка ε расчёта профиля скорости как функция координаты поперечного сечения канала при различном перепаде давления; (б) — зависимость осевой скорости потока от времени при различных перепадах давления и скорости распространения возмущений. Величина осевой скорости нормирована на соответствующее аналитическое значение U_{axial}; (в) — зависимость нормы невязки от числа шагов по времени для различных скоростей распространения звука.

ется медленное уменьшение нормы невязки численного решения со стационарным аналитическим

$$\frac{\delta U}{U_a} = \max\left\{\frac{|U - U_a|}{U_a}\right\}, \tag{3.61}$$

при росте числа итераций, где U_a аналитическую скорость на оси. Данная проблема становится особенно заметной при расчёте напорных течений (см. рисунок 3.6в). Следует отметить, что оптимальная скорость распространения возмущении лежит в диапазоне $c = 50$–$100U_a$. Если $c \approx 10U_a$, то в начале расчёта происходит чрезмерное ускорение жидкости, и кривая установления подходит к асимптотическому значению «сверху» (кривая малинового цвета на рисунке 3.6б). В противном случае при $c \gg U_a$, оказывается, что норма невязки оказывается логарифмической функцией числа шагов и время решения становится неоправданно большим.

3.3.3 Заключение

Схема Кабаре представляет собой новый подход к решению задач гидромеханики, в которых доминирующую роль играет конвективный перенос, и может с успехом использоваться для расчёта газодинамических течений и несжимаемой жидкости. В данной главе показано, что её применение в модели слабосжимаемой жидкости оставляет неизменными все практически важные свойства, такие как отсутствие осцилляций при расчёте разрывных течений, пренебрежимо малую дисперсию и диссипацию. Тестирование плоского течения Пуазейля показало возможность успешного расчёта напорных течений с требуемой точностью, но не меньше, чем предсказываемая моделью слабосжимаемой жидкости. Важным результатом является проявление автомодельной зависимости процесса установления течения при варьировании перепада давления и скорости звука.

Как указывалось выше, схема КАБАРЕ сочетает преимущества консервативных и характеристических разностных методов в рамках единого подхода, что приводит использованию двойного набора переменных: первый из них относится к центрам и имеет смысл средних значений физических величин [164] в рамках одной вычислительной ячейки, а второй — к серединам граней расчётных ячеек и отвечает за обмен величинами между ячейками. Значения на новом слое по времени для подмножества потоковых переменных в граничных ячейках, определяются исходя из граничных условий.

Следует отметить, что в действительности консервативными переменными являются ρ, ρu, ρv, однако, пользуясь терминами «консервативный» и «потоковый» мы будем следовать авторской терминологии, отраженной в опубликованных работах. Консервативные и потоковые переменные связаны между собой с помощью интерполяции лишь при задании начальных условий, в дальнейшем они рассчитываются независимо и не могут получены друг из друга непосредственно.

Глава 4. Изучение смешения в изотермических сдвиговых течениях

4.1 Вступительные замечания

С точки зрения общей теории турбулентности наиболее плодотворное описание вихревой динамики удаётся дать на основе рассмотрения переменной завихренности:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}.$$

Поэтому, несмотря на то, что основными расчётными переменными являются компоненты скорости и плотность, мы будем рассматривать эволюцию течения с помощью $\vec{\omega}$ и построенной на её основе энстрофии $\vec{\omega}^2/2$, которые для трёхмерного течения описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \tag{4.1}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}^2}{2}\right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \nu\left(\nabla \times \omega\right) + \nu \nabla \cdot \left[\vec{\omega} \times \left(\nabla \times \vec{\omega}\right)\right], \tag{4.2}$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость, $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$ — конвективная производная. В двумерном случае вектор завихренности $\vec{\omega}$ имеет лишь одну отличную от нуля (вертикальную) компоненту ω и оказывается перпендикулярным плоскости движения, а уравнения (4.1), (4.2) преобразуются к виду:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega, \tag{4.3}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = -\nu\left[(\nabla\omega)^2 - \nabla \cdot (\omega \nabla \omega)\right]. \tag{4.4}$$

Если число Рейнольдса является большим ($\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$), то можно ожидать, что в соответствии с уравнением (4.3) диффузия завихренности окажется достаточно малой, и вихревые трубки будут «вмороженными» в поток. Таким образом, завихренность будет переноситься также, как и пассивная примесь.

К уравнениям (4.3), (4.4) добавляется соотношение для третьей производной величины — палинстрофии $1/2\,(\nabla \times \vec{\omega})^2$, используемой, как правило, только в двумерном анализе и сводящейся к $1/2(\nabla\omega)^2$:

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}(\nabla\omega)^2\right] = -S_{ij}(\nabla\omega)_i(\nabla\omega)_j - \nu\left[\left(\nabla^2\omega\right)^2 - \nabla \cdot \left(\left(\nabla^2\omega\right)\nabla\omega\right)\right], \tag{4.5}$$

где конструкция $S_{ij}(\nabla\omega)_i(\nabla\omega)_j$ обозначает свертку тензора скоростей деформации $\mathbf{S}$ с вектором градиента завихренности. В двумерном течении процесс растяжения жидкой частицы и связанного с ней контура завихренности приводит к увеличению градиента завихренности. Таким образом, в результате уединённый сгусток завихренности (vorticity patch) превращается в нить или плоский лист (vortex sheet). Указанный процесс носит название филаментации или нитеобразования и приводит к измельчению структуры турбулентности. Палинстрофия является мерой этого процесса и показывает возможность образования вихревых листов.

Во многих случаях уравнения (4.3)–(4.5) непосредственно не решаются, а привлекаются для аналитического описания результатов моделирования, полученных в примитивных переменных $(\vec{v}, \rho, p)$. Отличительной особенностью уравнений для завихренности (4.1) и её производных является отсутствие давления p, любые пульсационные изменения которого должны приводить к перестройке (мгновенной в случае несжимаемой жидкости или со скоростью звука c) поля скорости.

Согласно теоретическим представлениям, в основе образования трёхмерного течения с развитой завихренностью и турбулентностью лежит механизм деформации вихревых трубок при сжатии или растяжении жидких частиц. Действительно, обращаясь к уравнению (4.1), можно заметить, что первый член в правой части связан с изменением завихренности вследствие деформации жидкой частицы, второй — отвечает за диффузию из-за вязкости. Кроме того, сравнение уравнений (4.1) и (4.3) показывает, что механизм растяжения вихрей проявляет себя исключительно в трёхмерных течениях при достаточно больших числах Рейнольдса (критическое число Рейнольдса в трубе $\mathrm{Re_c} \approx 2300$), т.к. слагаемое, отвечающее за деформацию в двумерном случае отсутствует. Общий процесс интенсификации завихренности, независимо от направления вращения вихрей, описывается уравнением (4.4) для (локальной) энстрофии $\omega^2/2$, откуда следует, что в двумерном вязком течении интеграл этой величины может только убывать. В последующих разделах будут часто обсуждаться различные интегральные характеристики завихренных течений. В частности, интегральная кинетическая энергия двумерного

$$E = \frac{1}{\rho_0 U_0^2 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \rho\left(u^2+v^2\right)/2\,dx\,dy \tag{4.6}$$

и трёхмерного течения

$$E = \frac{1}{\rho_0 U_0^2 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Z}} \rho\left(u^2+v^2+w^2\right)/2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.7}$$

а также скорости её диссипации

$$\varepsilon = -\frac{dE}{dt}. \tag{4.8}$$

Интеграл энстрофии в двумерном

$$\zeta = \frac{t_0^2}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \omega^2/2\,dx\,dy, \tag{4.9}$$

и трёхмерном случаях

$$\zeta = \frac{t_0^2}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Z}} \vec{\omega}^2/2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.10}$$

позволяет судить о генерации завихренности в течении, диссипативных характеристиках численного метода. Скорость диссипации энстрофии, определяется аналогичным образом,

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{d\zeta}{dt}. \tag{4.11}$$

В приближении несжимаемой жидкости энстрофия пропорциональна скорости диссипации кинетической энергии [71]:

$$\varepsilon_1 = -2\frac{\mu}{\rho_0}\frac{t_0}{L^2}\zeta. \tag{4.12}$$

В силу того, что единственным механизмом диссипации энергии в инерционном интервале однородной изотропной турбулентности является деформация вихревых трубок, скорости диссипации ε и ε_1 должны совпадать [2].

С другой стороны, для течения сжимаемого газа ε определяется совокупным влиянием вязкой диссипации

$$\varepsilon_2 = 2\frac{\nu t_0}{\rho_0 U_0^2 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} S_{ij} S_{ij}\, dx\, dy,$$

где свертка тензора скоростей деформации (без выделения девиаторной части) даёт:

$$S_{ij} S_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 1/2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

и эффектами сжимаемости. Для оценки влияния последних на эволюцию турбулентности необходимо рассчитать скорость диссипации от расширения (сжатия) под действием давления (pressure dilatation), — в двумерном случае

$$\varepsilon_3 = -\frac{t_0}{U_0^2 \rho_0 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} p \nabla \cdot \vec{u}\, dx\, dy.$$

В трёхмерном случае соответствующие интегралы выглядят следующим образом:

$$\varepsilon_2 = 2\frac{\mu t_0}{\rho_0 U_0^2 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Z}} S_{ij} S_{ij}\, dx\, dy\, dz, \tag{4.13}$$

где свертка тензора даёт

$$S_{ij} S_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 1/2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 1/2\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 1/2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{t_0}{U_0^2} \frac{1}{\rho_0 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Z}} p \nabla \cdot \vec{v}\, dx\, dy\, dz. \tag{4.15}$$

В разделах, посвящённых исследованиям инкремента неустойчивости одномодового возмущения, будет рассматриваться интеграл палинстрофии для плоского течения

$$P = 2\frac{t_0^2}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} (\nabla \times \omega)^2 / 2\, dx\, dy = 2\frac{t_0^2}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y}} \int\limits_0^{L_\mathrm{X}} \int\limits_0^{L_\mathrm{Y}} (\nabla \omega)^2 / 2\, dx\, dy. \tag{4.16}$$

Интегрирование выполняется методом трапеций, который вследствие расположения точек консервативных переменных в центрах ячеек сводится к простому суммированию.

4.2 Задача об эволюции двойного вихревого слоя

4.2.1 Постановка задачи

Задача об эволюции двойного вихревого слоя принадлежит к широкому классу сдвиговых течений, основным объектом исследования которых является неустойчивость Кельвина—Гельмгольца.

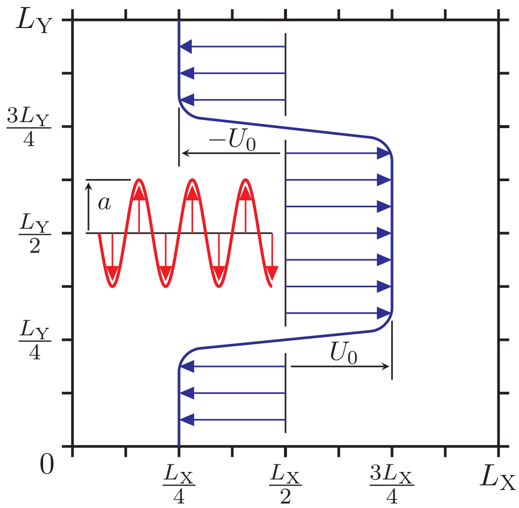


Рисунок 4.1: Постановка начальных условий в задаче о двойном вихревом слое в бесконечной периодически продолженной области.

Несмотря на давность изучения, данное явление используется не только для верификации численных кодов, — современные исследования позволяют рассмотреть новую феноменологию, связанную, например, с развитием вторичных неустойчивостей [86]. Задача об эволюции двойного сдвигового слоя решалась в плоской, периодически продолженной области размером $(L_X \times L_Y)$— 1×1 с соответствующими начальными условиями:

$$
\begin{aligned}
&u = \operatorname{th}\left(r(y - 1/4)\right), \quad y \in [0, 1/2],\\
&u = \operatorname{th}\left(r(3/4 - y)\right), \quad y \in [1/2, 1),\\
&v = a \sin(2\pi m x),\\
&\rho = \rho_0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, двойной сдвиговый слой (см. рисунок 4.1) слегка возмущается в начальный момент времени, что приводит к его свертыванию в крупномасштабные структуры. Параметр $r = 80$ управляет толщиной сдвигового слоя, a — определяет величину амплитуды для $m-$ ой гармоники. За исключением специально оговоренных случаев расчёты течения, описанные в последующих разделах, проводились при $a = 0.05$.

При моделировании в широком диапазоне изменялось число ячеек равномерной прямоугольной сетки:

$$
(n_X \times n_Y) - 128^2 \ (1),\ 256^2 \ (2),\ 512^2 \ (3),\ 1024^2 \ (4),\ 2048^2 \ (5),
$$

а также номер моды m начального поперечного возмущения. В силу того, что расчётная область представляет собой квадрат, для масштаба длины в дальнейшем будет использоваться обозначение $L_X = L_Y = L$.

Для достижения общности в описании свойств течений используется несколько безразмерных параметров, в частности, число Рейнольдса, являющееся мерой отношения сил инерции к силам вязкого трения в сдвиговом течении:

$$
\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu},
$$

где в качестве характерной скорости принимается $U_0 = 1$, характерного размера — ширина расчётной области L, а также число Маха

$$
\mathrm{M} = \frac{U_0}{c},
$$

являющееся мерой сжимаемости

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \mathrm{M}^2,$$

где $\Delta\rho$ — приращение плотности в потоке относительно равновесной. При использовании приближения слабой сжимаемости параметр M^2 выступает мерой точности полученных решений относительно результатов для несжимаемой ($\rho = const$) среды. Для обеспечения точности модели около 1% необходимо задать $c \gtrsim 10 \max\{u,v\}$, таким образом, в случае постоянной скорости звука требуется заранее оценить значение глобального максимума на всем расчётном промежутке.

Общее влияние диссипации на течение можно определить, рассматривая зависимость интеграла кинетической энергии (4.6) от времени, тогда как интеграл энстрофии (4.9) позволяет судить об эволюции завихренности и качестве воспроизведения вихревых образований численным методом. Помимо интегральных величин можно ввести и их производные — скорости диссипации во времени (4.11).

В предлагаемом исследовании завихренность рассматривается как производная величина, таким образом, ещё одна дифференциальная операция «$\nabla\times$», представляемая в конечных разностях, вносит дополнительную ошибку, что затрудняет сравнение полученных результатов с данными других авторов. Несмотря на то, что рассматриваемая задача, по сути, является классической, для неё не сформирован ряд обязательных для рассмотрения параметров и характерных зависимостей, как было сделано для задачи Тейлора–Грина [173]. В работах используются различные числа Рейнольдса, которые могут определяться по толщине слоя начальной завихренности:

$$\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_{\omega,0}}{\mu}, \quad \delta_{\omega,0} = \frac{\Delta U}{(\partial U/\partial y)_{\max,0}}, \tag{4.17}$$

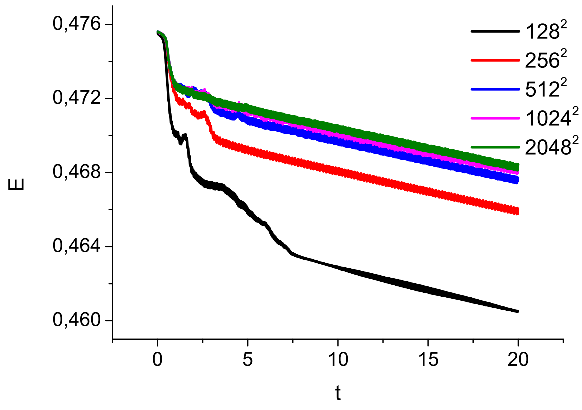
где ΔU — обозначает максимальную разницу скоростей в сдвиговом течении, $(\partial U/\partial y)_{\max,0}$ — максимальный поперечный градиент скорости в начальный момент времени, или потери импульса:

$$\mathrm{Re}_{\delta_{\theta,0}} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_{\theta,0}}{\mu}, \quad \delta_{\theta,0} = \frac{1}{U_0^2} \int U(t=0,y)(U_0 - U(t=0,y))\, dy.$$

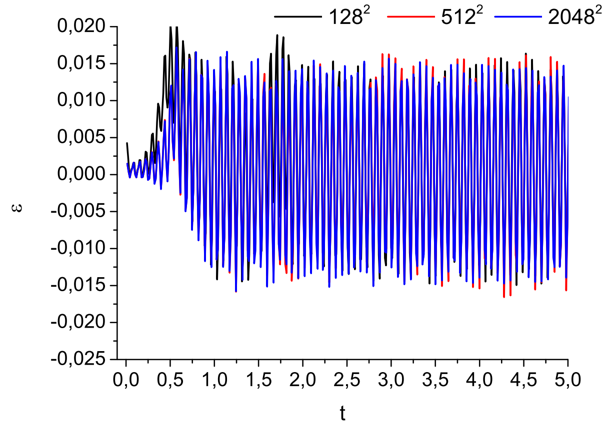
Кроме того, не всегда приводятся точные данные о номере гармоники m и величине амплитуды поперечного возмущения скорости a.

4.2.2 Интегральные кривые энергии и энстрофии

Рассмотрим семейство кривых кинетической энергии $E = E(t)$, рассчитанной на различных сетках (рисунок 4.2а) при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ для основной гармоники $m = 1$. Независимо от числа ячеек сетки кривые отличаются большим количеством мелких осцилляций, которые накладываются на основную зависимость. Для последней характерно наличие участка резкого спада с 1–2 крупными всплесками, который затем становится все более и более пологим, переходя в некоторую линейную асимптотическую зависимость. Кроме того, общее поведение $E = E(t)$ даёт представление о процессе сеточной сходимости: при увеличении количества ячеек на начальном этапе эволюции амплитуда резкого спада при $t \approx 2$–5 становится меньше, а участок линейной диссипации начинается раньше. Например, на сетке 1024^2 линейный участок начинается при $t \sim 3$, что соответствует рисункам 4.7д–4.7е. Линейность процесса диссипации кинетической энергии, вероятно, является одной из характерных черт моделирования двумерной турбулентности в периодической области, тогда как в трёхмерном случае наблюдается зависимость $E \propto t^{-1.2}$, переходящая в $E \propto t^{-2}$. Среднюю скорость диссипации $\bar{\varepsilon}$ можно определить, аппроксимировав участок асимптотического спада при $t > 10$ (см. таблицу 2).



(а)



(б)

Рисунок 4.2: (а) — зависимость кинетической энергии E от времени, рассчитанная на сетках (1)–(5); (б) — скорость диссипации кинетической энергии ε, полученная непосредственным дифференцированием зависимости $E = E(t)$ на сетках (1), (3), (5).

Скорость диссипации ε на всем расчётном промежутке также представляется в виде сильно осциллирующей функции (см. рисунок 4.2б), в поведении которой можно выделить два участка: на первом из них происходит рост до $\varepsilon = 0.02$, а на втором — резкое усиление амплитуды колебаний, на фоне которого оказывается практически невозможным определение среднего значения. Вероятно, оно должно быть положительным вследствие наличия вязкой диссипации. Частота выборки данных (12–14 точек на период осцилляции) позволяет предположить, что на участке развития течения ($t \gtrsim 1.5$) амплитуда и период колебаний $\mathfrak{T}$ являются практически независимыми от сеточного разрешения. Для исследованного случая период составил $\mathfrak{T} \approx 1.473 \times 10^{-4}$, что должно соответствовать акустическому диапазону.

Сильные осцилляции скорости диссипации, наблюдаемая в процессе эволюции течения несколько затрудняет использование простого приема оценки диссипативности схемы [71], который основан на сравнении скорости диссипации ε, рассчитанной по формуле (4.11), и аналогичной величины ε_1, установленной по графикам интегральной энстрофии (4.12). Указанное семейство кривых представлено на рисунке 4.3а (левая шкала). Все они получены при одинаковом числе Рейнольдса, поэтому скорость диссипации кинетической энергии легко найти умножением $\zeta = \zeta(t)$ на масштабный коэффициент 2ν (правая шкала того же рисунка). Новый набор кривых ε_1 не несет в себе никаких временных осцилляций, при его получении не использовалось какого либо сглаживания или фильтрации.

Таблица 2: Начало участка асимптотического спада в зависимости от расчётной сетки.

Сетка №	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
начало асимтотического участка	$t \approx 8.5$	$t \approx 5$	$t \approx 3.5$	$t \approx 3.3$	$t \approx 3.3$

Таблица 3: Скорости диссипации $\overline{\varepsilon}$ и ε_1, полученные на различных расчётных сетках.

(1) Сетка №	(2) $\overline{\varepsilon} \times 10^{-4}$	(3) относительная ошибка аппроксимации (%)	(4) ε_1	(5) относительная ошибка $\lvert\varepsilon_1 - \varepsilon\rvert/\varepsilon$ (%)
128^2	2.352	0.2	2.147	8
256^2	2.161	0.05	2.178	2.6
512^2	2.158	0.1	2.129	1.3
1024^2	2.113	0.08	2.107	3
2048^2	2.091	0.15	2.048	2

При исследовании сеточной сходимости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t)$ наиболее сильные различия (см. рисунок 4.3а) наблюдались для грубых сеток на участке $t \lesssim 7.5$, тогда как для мелких сеток 1024^2 и 2048^2 при $t \sim 2.5$, когда формируется развитая турбулентность, графики практически совпадают.

На поздних стадиях эволюции скорость диссипации медленно убывает со временем, при этом для последовательности сеток (1)–(5) значение ε_1 находится в пределах $\varepsilon_1 \sim 2.048 - 2.147 \times 10^4$. Измельчение сетки приводит к некоторому уменьшению скорости диссипации.

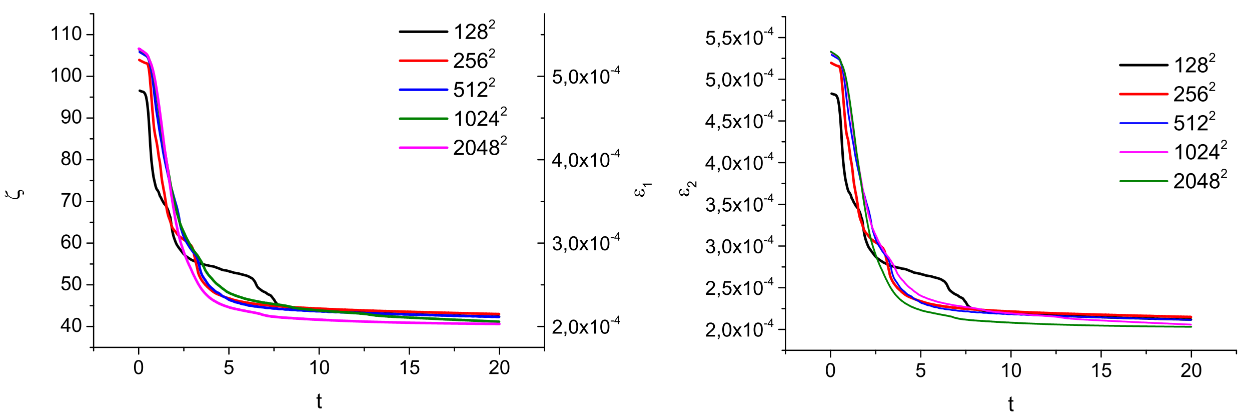
В отличие от трёхмерных расчётов [71], где существование дополнительного механизма схемной диссипации приводит к практически двукратному занижению ε_1, в данной задаче разброс значений ε_1 для различных сеток не превышает 8%. В качестве меры ошибки определим расхождение между $\overline{\varepsilon}$, полученным аппроксимацией участка асимптотического спада, и ε_1, взятым на стадии «медленной» диссипации в произвольный момент времени $t = 15$. Указанное расхождение на мелких сетках составляет 1.3–3% (см. таблицу 3).

Рассмотрим теперь поведение скорости диссипации с точки зрения модели сжимаемого газа, пренебрегая объёмной вязкостью. В этом случае скорость диссипации ε определяется совокупным вкладом сил вязкого трения ε_2 (рисунок 4.3б), а также эффектами дилатации ε_3 (рисунок 4.4а). Скорость диссипации ε_2 оказывается монотонно убывающей функцией, хорошо совпадающей с ε_1, откуда следует, что высокочастотные осцилляции ε являются исключительно следствием эффектов сжимаемости, а отсутствие колебаний на графиках палинстрофии обусловлено тем, что переменная p не входит в основные уравнения для завихренности и её производных.

Это предположение находит свое подтверждение в поведении графиков скорости диссипации вследствие дилатации ε_3 (рисунок 4.4б), амплитуда колебаний которых на несколько порядков превосходит ε_2. При увеличении количества ячеек расчётной сетки частота этих осцилляций оказывается неизменной, в то время как амплитуда постепенно увеличивается. Подобное поведение, вероятно, является одним из свойств приближения слабой сжимаемости. Для определения общей доли ε_3 в процессе диссипации можно вычислить интеграл

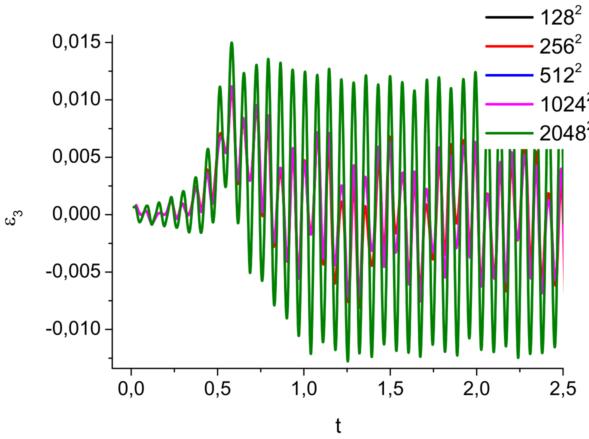
$$\Delta E_{\text{dil}} = -\int \varepsilon_3 \, dt,$$

значения которого (см. рис. 4.4б) оказываются сопоставимыми с общим изменением энергии ΔE в процессе эволюции течения, в частности, для сетки 2048^2 имеем $\Delta E_{\text{dil}} \approx 2.5 \times 10^{-3}$, в то время как общая потеря энергии составляет $\Delta E \approx 4 \times 10^{-3}$. Основная часть потерь энергии ΔE_{dil}, вероятно, связана с перестройкой полей давления при сворачивании крупных вихрей, что является следствием несогласованности переменных давления и скорости при задании начальных условий.

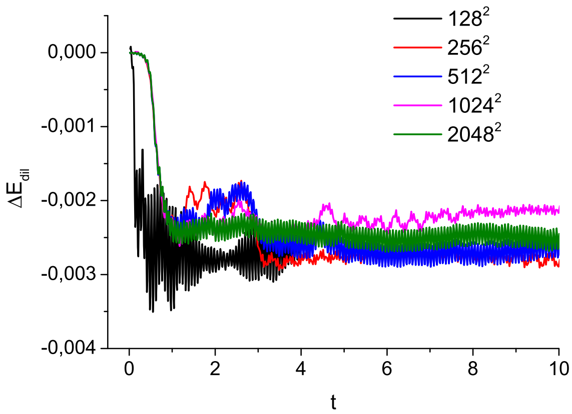


(а) (б)

Рисунок 4.3: (а) — зависимость интеграла энстрофии ζ от времени (левая шкала ординат), а также скорость диссипации ε_1, построенная на её основе (правая шкала); (б) — компонента скорости диссипации кинетической энергии ε_2, возникающая вследствие действия сил вязкого трения.



(а)



(б)

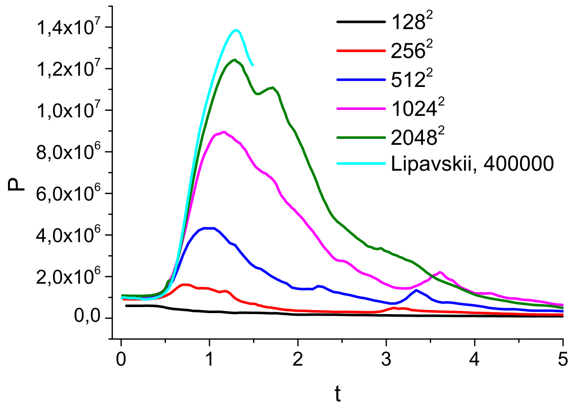
Рисунок 4.4: (а) — зависимость скорости диссипации вследствие дилатации ε_3, (б) — интеграл потерь кинетической энергии ΔE_{dil} вследствие дилатации в различные моменты времени.

Влияние численной диссипации не удаётся выделить однозначно, так как поведение ε сильно «зашумлено» осцилляциями, в то время как сравнение ε_1 и ε_2 показывает, что диссипативный механизм схемы в целом повторяет характеристики физической диссипации. Это особенно хорошо видно при $t \gtrsim 3$ (сетка (5)) — скорость диссипации на линейном участке кривой ε совпадает со значениями ε_1 на участках развития и затухания турбулентности.

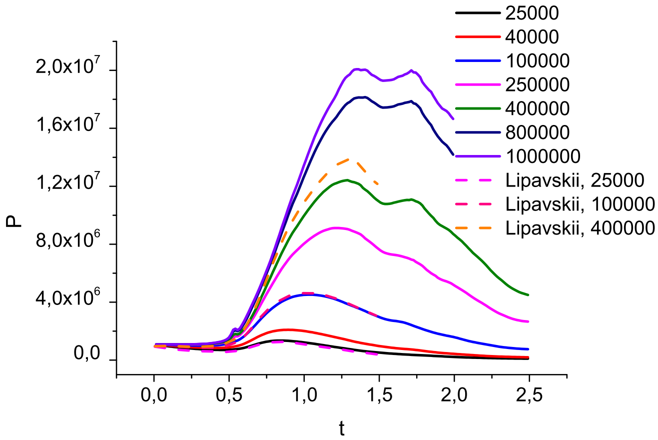
В целом положительные результаты сравнения определяются двумя факторами — общими свойствами задачи и характеристиками алгоритма. Действие первого фактора связано с тем, что в процессе свертывания вихревого слоя (листа) в «клубы» завихренности начинает существовать обратный каскад энергии, приводящий к появлению все более и более крупных энергосодержащих вихрей. Те мелкомасштабные когерентные структуры, которые выживают в процессе слияния, не вносят существенного вклада в интегральные характеристики. Таким образом, роль схемной диссипации уменьшается при моделировании достаточно крупных вихрей.

Второй фактор связан с действием алгоритма нелинейной коррекции потоковых переменных, который может вызвать диссипацию, однако, он не «срабатывает» на участках двумерного течения, где существуют структуры с замкнутыми линиями тока [174]. Этим обстоятельством объясняется успешное прохождение схемой КАБАРЕ тестовой задачи о диффузии вихря. Отметим ещё раз, что существование мелкомасштабных когерентных структур является следствием начальных условий, т.е. их может и вовсе не существовать.

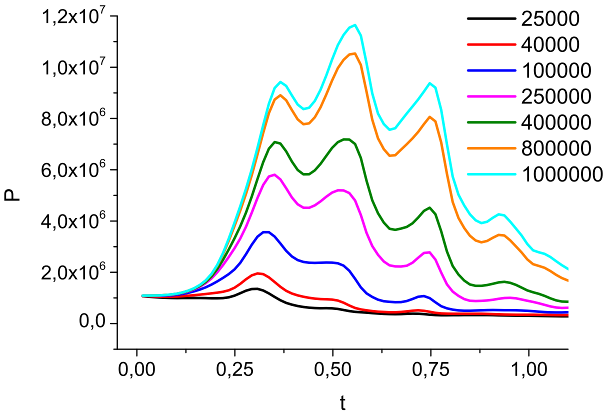
В заключение этого раздела рассмотрим семейства кривых палинстрофии (4.16) при различных числах Re для основной $m = 1$ и самой быстрорастущей $m = 6$ гармоник возмущения. На рисунке 4.5а представлена зависимость $P = P(t)$ при $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ и $m = 1$ для различного числа ячеек расчётной сетки, откуда следует, что при переходе к более подробным сеткам качество воспроизводства $\nabla\omega$ улучшается. При вычислении ω, как и $\nabla\omega$, для аппроксимации пространственных производных используются центральные разности, приводящие к сглаживанию неоднородностей, что вместе с другими различиями даёт 10% ошибку в сравнении с [175] в зоне максимума P. Рассматривая $P = P(t)$ для основной гармоники в широком интервале Re (см. рисунок 4.5б), следует отметить, что при $\mathrm{Re} = 2.5 \times 10^4$ результаты, полученные по схеме КАБАРЕ в зоне максимума, дают значение на 6% большее, в то время как при $\mathrm{Re} = 10^5$ наблюдается слабое занижение (-2%). В целом, можно говорить об удовлетворительном совпадении результатов до нижнего диапазона «больших» чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^5$. Характерным признаком ухудшения сеточного разрешения является наличие второго выраженного локального максимума, наблюдаемого с $\mathrm{Re} \sim 2.5 \times 10^5$. При максимальных из исследованных Re значение первого максимума, скорее всего, является заниженным вследствие потери точности решения. Это предположение также хорошо подтверждается, если



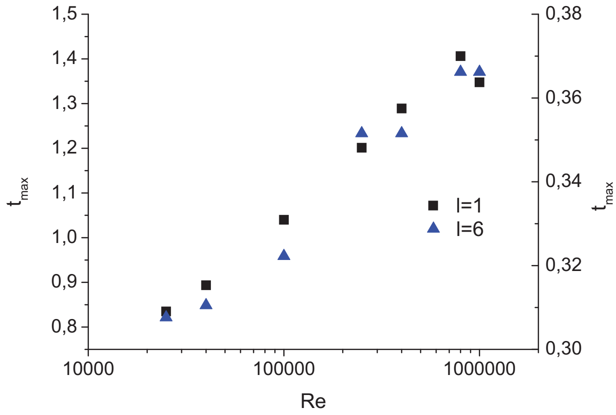
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 4.5: Зависимость палинстрофии от: числа ячеек расчётной сетки при $\mathrm{Re} = 4{\times}10^5$, сравнение с эталонным решением [175] (а), значения числа Рейнольдса для основной (б) и самой быстрорастущей гармоники поперечного возмущения скорости (в); (г) — время достижения палинстрофией первого максимума при различных числах Рейнольдса для выделенных гармоник $m = 1$ (левая шкала) и $m = 6$ (правая шкала). Результаты на рисунках (б)– (г) получены на сетке 2048^2.

обратиться к зависимости времени достижения максимума P при различных Re, представленной на рисунке 4.5г. Действительно, для гармоники $m = 1$ при всех Re, за исключением самого большого $\mathrm{Re} = 10^6$, наблюдается зависимость $t_{\max} \sim \lg \mathrm{Re}$, а для гармоники $m = 6$, производящей более мелкомасштабные возмущения, линейный закон начинает нарушаться ещё раньше — при $\mathrm{Re} \approx 250000$. На графиках $P = P(t)$ (рисунок 4.5в) этот процесс также связан с появлением второго локального максимума, значения которого превосходят первый. Сравнение рисунков 4.5б и 4.5в показывает, что для $m = 6$ максимумы P достигаются приблизительно в три раза быстрее. Таким образом, ускоренное развитие самой неустойчивой моды приводит к тому, что двумерная турбулентность развивается несколько другим образом, подчиняясь, тем не менее, общим закономерностям.

4.2.3 Поле завихренности: сходимость по сетке и временная эволюция

Обратимся к рассмотрению эволюции поля завихренности при $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$, возмущаемого в начальный момент времени основной гармоникой возмущения $m = 1$. Достаточно большое число Re позволяет утверждать, что в турбулентном течении сохраняется полная кинетическая энергия E, что позволяет турбулентности развиваться и долго существовать. Действительно, на мелких сетках относительное изменение кинетической энергии составляет $|\Delta E|/E \approx 8.4 \times 10^{-3}$. В отличие от трёхмерной турбулентности скорость диссипации определяется каскадным разрушением вихрей с характерной скоростью u и масштабом m и не зависит от вязкости. С другой стороны, в двумерном процессе интегральная энстрофия $\zeta = \zeta(t)$ определяется начальными условиями и является убывающей функцией, так как механизм растяжения вихревых трубок оказывается заблокированным и не может восполнить потери от вязкой диссипации.

Для детектирования сильных но немелких вихревых структур можно использовать поле давления или распределения пассивной примеси [70]. В настоящей работе вихри определяются по полю завихренности, данный способ является самым универсальным. Нарастание амплитуды гребней поперечного возмущения резко увеличивает площадь взаимодействия вихревых структур, что позволяет захватить больше незавихренной жидкости. После её захвата спутным потоком в дело вступает процесс смешения, сглаживающий неоднородности между завихренной жидкостью в каскаде вихрей разного масштаба. Захваченные жидкие моли постепенно смешиваются во время сворачивания вихревого слоя и дальнейшего слияния вихрей. Процесс смешения ограничен снизу скоростью диффузии на мелких масштабах и может сопровождаться развитием вторичных неустойчивостей.

В эталонных решениях [175] каждый сдвиговый слой сворачивается в одиночные периодические вихри, в то время как в случае недоразрешения появляются дополнительные свертки завихренности (roll-ups) между основными вихрями, что и происходит на сетке 128^2. Измельчение расчётной сетки приводит к появлению все новых деталей в основных вихревых структурах (рисунки 4.6г—4.6д) и уменьшает влияние «недоразрешенности» слоев, выражающееся в появлении «лишнего» («паразитного») вихря. Различие в эволюции процесса вследствие появления этого образования становится существенным при $t = 0.527$, однако, данный артефакт исчезает уже при переходе к сетке 256^2. Несмотря на полное исчезновение паразитного вихря на сетке 512^2 при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ для основной гармоники начального возмущения $m = 1$ окончательной сходимости решения не наблюдается, а при дальнейшем измельчении изменяется направление закрутки и относительное расположение мелкомасштабных вихревых образований.

Полезно провести оценку качества разрешения вихрей инерционного интервала в зависимости от числа расчетных узлов в одном направлении. Так как завихренность ω в двумерном случае сохраняется [2], то отношение крупных вихрей Λ к мелким l_η составляет

$$\frac{\Lambda}{\eta} \propto \mathrm{Re}^{1/2}.$$

При $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ отношение масштабов составляет $\Lambda/l_\eta \approx 633$, тогда, считая, что самый крупный вихрь занимает половину расчётной области, получим $l_\eta \approx 8 \times 10^{-4}$. Для удовлетворительного отображения самого малого вихря инерционного интервала необходимо как минимум две ячейки (в случае трёхмерной реализации схемы КАБАРЕ для разрешения потребуется 5–6 ячеек [174]), что позволяет связать Re с минимальным числом ячеек в одном направлении $N \approx 2\mathrm{Re}^{1/2}$, т.е. самой мелкой сетки 2048^2 ячеек должно быть достаточно для моделирования всего инерционного интервала. Данная оценка, к сожалению, не распространяется на участок сворачивания тонких вихревых слоев, отличающихся большими градиентами завихренности.

Для оценки процесса сходимости решения при сгущении расчётной сетки воспользуемся оценкой средней относительной ошибки $\varepsilon_{\mathrm{mean}}$ по норме L_1, предложенной в [176]:

$$\varepsilon_{\mathrm{mean}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} \left|[\omega]_{\mathrm{f}}(i,j) - [\omega]_{\mathrm{m}}(i,j)\right|}{\sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} \left|[\omega]_{\mathrm{f}}(i,j)\right|},$$

где $[\omega]_{\mathrm{f}}(i,j)$— значения завихренности в узлах самой подробной сетки, а $[\omega]_{\mathrm{m}}(i,j)$ — значения на более грубой сетке с количеством ячеек $m = 128 - 1024$ ячеек в одном направлении, суммирование ведется по узлам более грубой сетки. На рисунке 4.6е приведена средняя относительная ошибка

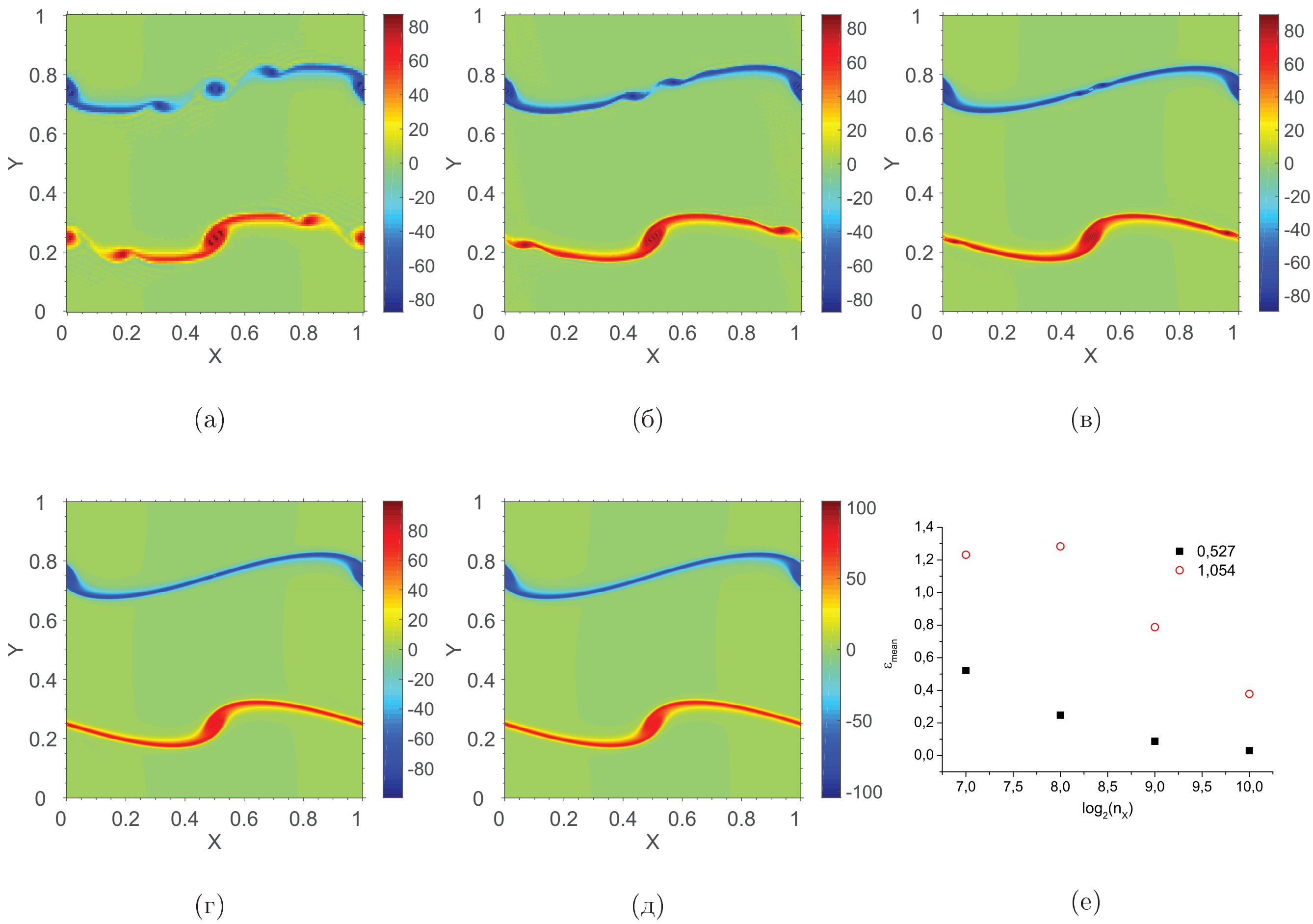
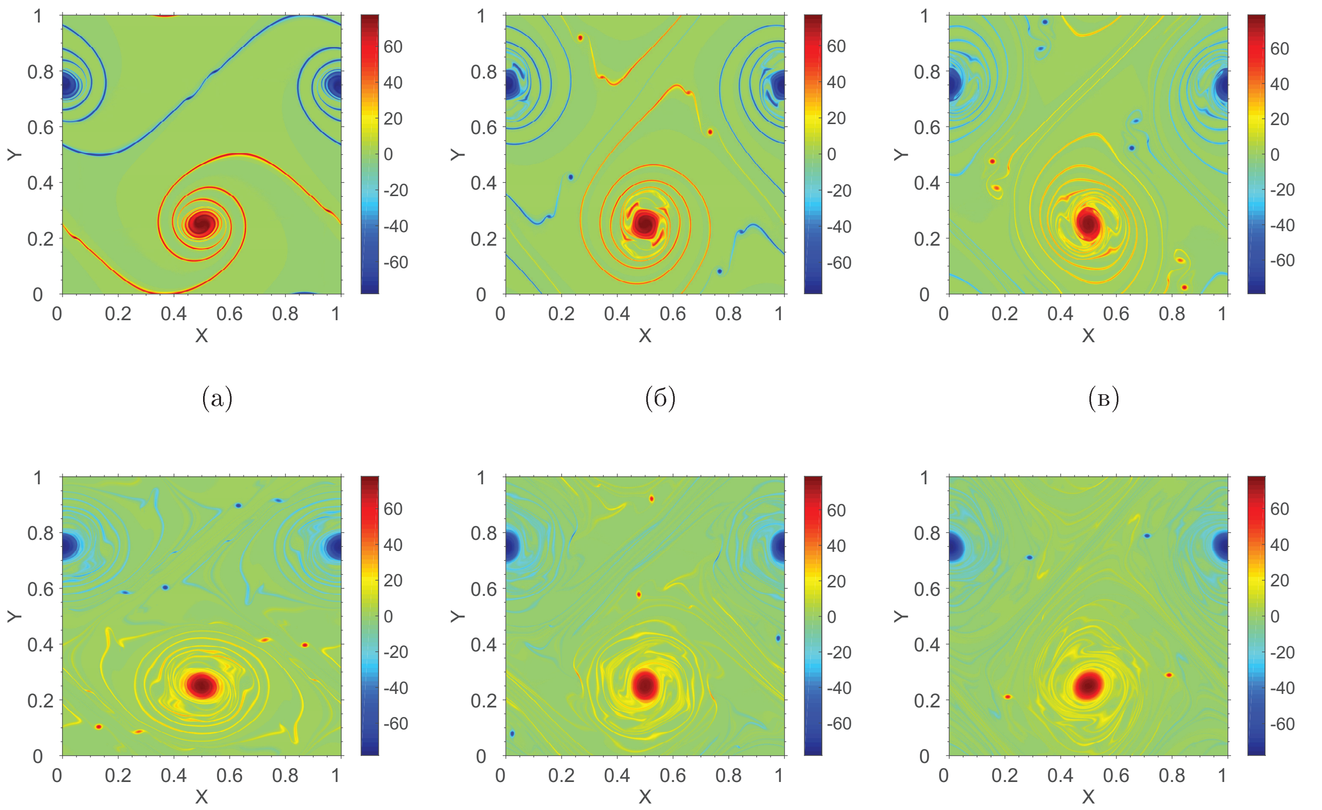


Рисунок 4.6: Поле завихренности при $t = 0.527$, число гармоник $m = 1$ на различных расчётных сетках: (г)— 128^2, (г)— 256^2, (г)— 512^2, (г)— 1024^2, (д)— 2048^2 ячеек; (е)— зависимость средней $\varepsilon_{\text{mean}}$ ошибки от двоичного логарифма числа ячеек n_{X}.

$\varepsilon_{\text{mean}}$ в два различных момента времени $t = 0.527$ и $t = 1.054$, при измельчении сетки её убывание в первом случае происходит монотонно, в то время как при $t = 1.054$ происходит нарушение монотонности (сетка 256^2), которая восстанавливается при дальнейшем сгущении сетки. Таким образом, окончательная сходимость не достигается даже на подробных сетках, однако, этот процесс всё же имеет место при последовательном измельчении.

Рисунки 4.7а— 4.7е демонстрируют генерацию вихрей и их эволюцию в различные моменты времени на самой подробной сетке 2048^2 ячеек. В начале происходит сворачивание слоя завихренности в спирали с одновременным образованием крупномасштабных «клубов». Помимо этого образуются малые вторичные вихри большой интенсивности. Процесс взаимодействия двух вихрей сопоставимого размера можно свести к двум исходам. В первом случае один из них «срывает» внешние слои завихренности и деформирует ядро второго настолько, что последний теряет свою округлую форму и, растягиваясь вдоль замкнутой линии тока первого вихря, полностью поглощается.

Во втором случае после «срыва» внешних слоев завихренности ядро разрушаемого вихря уменьшается настолько, что крупномасштабная завихренность перестаёт оказывать значимое влияние на него, и дальнейшее взаимодействие вихрей прекращается. Так как генерация завихренности на основе механизма деформации вихревых трубок в данном случае отсутствует, то дополнительной «раскрутки» или деформации разрушенного вихря не происходит. Описанное явление широко используется при построении иерархических моделей двумерной турбулентности [123].



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 4.7: Поле завихренности в различные моменты времени: (а)— $t = 1.054$, (б)— $t = 1.581$, (в)— $t = 2.108$, (г)— $t = 2.635$, (д)— $t = 3.162$, (е)— $t = 3.689$, число гармоник $m = 1$, результаты расчёта на сетке 2048^2 ячеек.

По мере распада турбулентности происходит уменьшение завихренности между большими вихрями и её концентрация в крупных образованиях округлой формы. В диапазоне средних масштабов наиболее активно происходит слияние одинаково закрученных вихрей [177]. Наряду с крупными вихрями образуются и мелкие, которые имеют характер когерентных структур. Данный термин в литературе толкуется двояко: с одной стороны, им обозначаются образования, имеющие размер, больший интегрального масштаба турбулентности, с другой— уединённые сгустки завихренности, слабо взаимодействующие с вихрями других масштабов. Так или иначе, эти структуры существуют достаточно долго $t \gtrsim 100u/\Lambda$ (Λ —интегральный масштаб, u — характерная скорость на этом масштабе), выживая в процессе филаментации. Многие исследователи считают [2], что появление когерентных структур связано со специфическими свойствами начальных условий. Таким образом, двумерная турбулентность «запоминает» гораздо больше в сравнении с её трёхмерным аналогом и базовыми гипотезами теории Бэтчелора.

Феноменологическое описание процесса эволюции турбулентности следует дополнить, рассмотрев спектральные характеристики кинетической энергии и энстрофии, получаемые с помощью быстрого преобразования Фурье, одной из эффективных реализаций которого является алгоритм FFT Intel MKL [178]. Результатом работы этого алгоритма являются матрицы фаз и амплитуд Фурье–компонент, по которым восстанавливается одномерный спектр $E(k)$ в диапазоне

$$k \in [k^{\min}, k^{\max}],\ \text{где}\ k^{\min} = \sqrt{\left(k_{\mathrm{X}}^{\min}\right)^2 + \left(k_{\mathrm{X}}^{\min}\right)^2}, \quad k^{\max} = 1/2\sqrt{\left(k_{\mathrm{X}}^{\max}\right)^2 + \left(k_{\mathrm{X}}^{\max}\right)^2}, \tag{4.18}$$

в свою очередь $k_{\mathrm{X}}^{\min} = 2\pi/\left(L_{\mathrm{X}} - \Delta x\right)$, $k_{\mathrm{X}}^{\min} = 2\pi/\left(L_{\mathrm{Y}} - \Delta y\right)$, $k_{\mathrm{X}}^{\max} = 2\pi/\Delta x$, $k_{\mathrm{Y}}^{\max} = 2\pi/\Delta y$, Δx, Δy— пространственный шаг сетки в соответствующем направлении.

Преобразование Фурье, используемое в Intel MKL имеет следующий общий вид:

$$z_{k_1,k_2,\dots k_d} = \sigma \times \sum_{j_d=0}^{n_d-1} \dots \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} w_{j_1,j2\dots,j_d} \exp\left(2i\pi\beta \sum_{d_{m=1}} j_m k_m / n_m\right),$$

где $k_m = 0, \dots n_m - 1$ $(m = 1, \dots, d)$, σ — коэффициент масштабирования, в настоящем расчёте принимаемый $\sigma = 1/(n_{\mathrm{X}} n_{\mathrm{Y}})$. Множитель β в показателе экспоненты выбирается как $\beta = -1$ для прямого преобразования.

После выполнения двумерного пространственного преобразования Фурье необходимо ограничить диапазон волновых чисел (пространственных частот), воспользовавшись результатами теоремы Котельникова (теорема отсчётов), находящей широкое применение в области цифровой обработки сигналов. В данном случае кинетическая энергия представляет собой непрерывную периодическую по двум направлениям функцию. Спектр сигнала (физической величины), восстановленного по своим дискретным отсчетам (сеточным значениям) ограничен конечной частотой, равной половине частоты дискретизации. Эта частота называется частотой Найквиста. Соотношение нижней граничной частоты и частоты Найквиста определяет интервал, в котором возможно вычисление частот Фурье-спектра. В случае, если в спектре сигнала присутствуют гармоники с частотой, превышающей частоту Найквиста, в спектре появляются «паразитные» частоты. Множитель 1/2 в выражении для максимального волнового числа $k^{\max}$ (4.18) возникает как следствие теоремы Котельникова. В каждом расчёте размер массива уровней волнового числа выбирался как $\min(n_{\mathrm{X}}, n_{\mathrm{Y}})$.

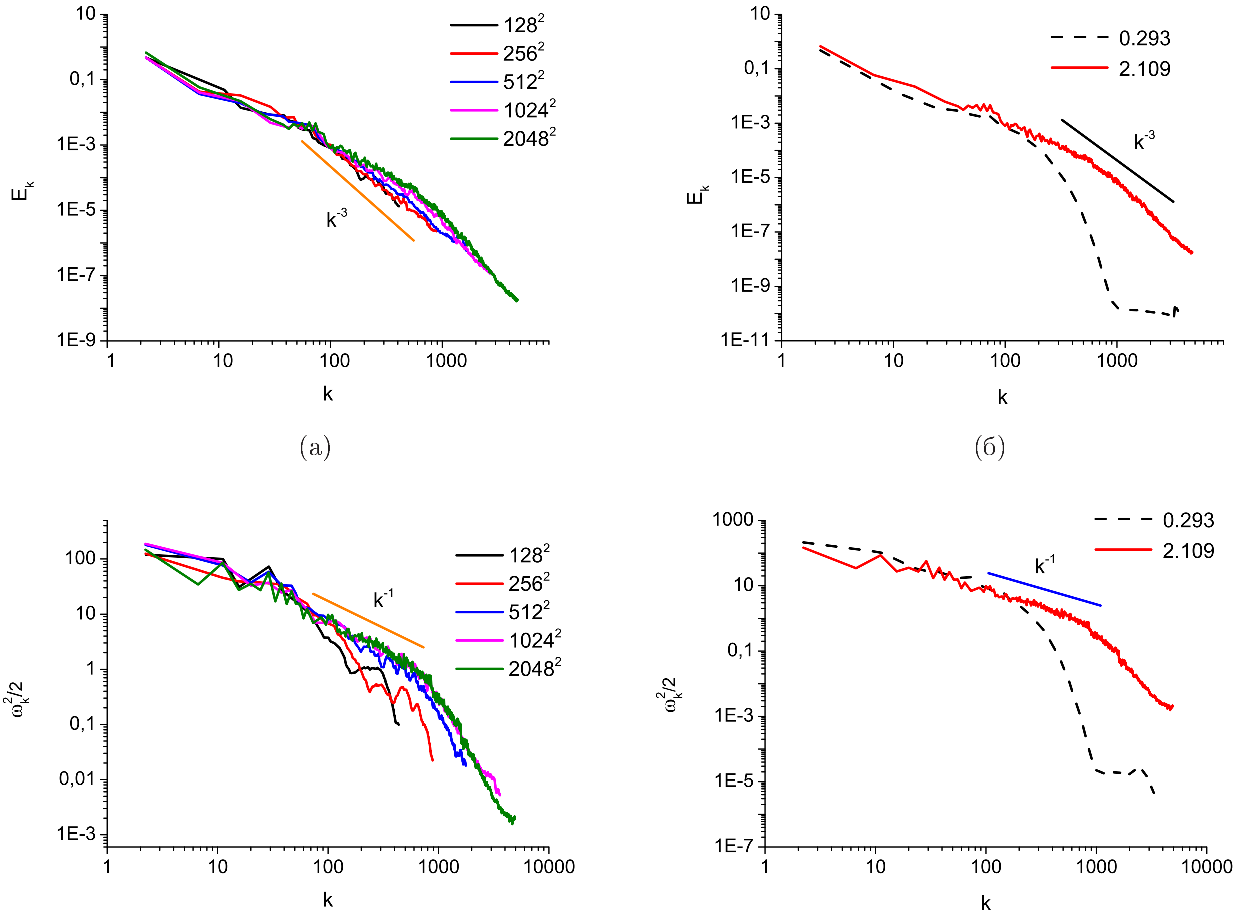
Реализацию спектральных характеристик двумерной турбулентности подтверждает асимптотическое поведение кинетической энергии и энстрофии, которые в инерционном интервале подчиняются закономерностям $E \propto k^{-3}$, $\omega^2/2 \propto k^{-1}$ (рисунок 4.8). При переходе к более подробным сеткам наблюдается удовлетворительное отображение разрешаемого диапазона волновых чисел при его расширении в коротковолновую область. Более сложная эволюция спектра имеет место для энстрофии $\omega^2/2$: на грубых сетках её каскад в инерционном интервале не наблюдается, однако, некоторое подобие спектров имеет место в диапазоне сеток 512^2–2048^2. Каскад энстрофии в двумерном случае связан с тем, что сгустки завихренности непрерывно подвергаются процессу нитеобразования (филаментации), что приводит к росту $(\nabla\omega)^2$ и сосредоточению завихренности в мелкомасштабных структурах.

4.2.4 Инкремент неустойчивости одномодового возмущения

Дальнейшее изложение посвящено результатам расчёта скорости роста возмущения (инкремента неустойчивости) в сдвиговом слое в зависимости от волнового числа ($\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$). В силу пространственной периодичности задачи результаты могут быть получены только для дискретного набора гармоник $m = 1 - 10$. Для определения скорости роста возмущения для конкретного волнового числа без анализа соответствующих Фурье–образов можно воспользоваться временным смещением кривой роста интеграла энстрофии (4.9) для двух возмущений разной амплитуды $a_1 = 10^{-3}$ и $a_2 = 10^{-5}$ $(a_1 > a_2)$. Тогда, считая ζ на линейной стадии экспоненциальной функцией времени, инкремент неустойчивости γ можно определить по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{a_1}{a_2},$$

где Δt— смещение кривой энстрофии по оси времени. На рисунке 4.9а представлено сравнение результатов по схеме КАБАРЕ, построенных в переменных (γ,α), где $\alpha = 4\pi m/(L_{\mathrm{X}} r)$ — безразмерное волновое число, с данными других авторов [175] (схема девятого порядка точности), а также



(в) (г)

Рисунок 4.8: Фурье-спектр кинетической энергии: (а) — рассчитанный на последовательности сеток при $t = 2.109$; (б) — сравнение энергетического спектра при $t = 0.293$ и $t = 2.109$; Фурье-спектр энстрофии: (в) — полученный при последовательном сгущении сетки; (г) — полученный в моменты времени $t = 0.293$ и $t = 2.109$. Результаты на рисунках (б) и (г) получены на сетке 2048^2. Сплошные линии указывают на графиках кинетической энергии и энстрофии указывают наклон асимптотик k^{-3} и k^{-1} соответственно.

линейной теорией [179]. Максимальная относительная ошибка в сравнении с линейной теорией не превышает 6%. Такое расхождение может быть вызвано не численными погрешностями, а различиями в характерном числе Маха для течения (при увеличении M происходит резкое подавление скорости роста слоя смешения и величины инкремента неустойчивости). В приведённых расчётах это число составляло $\mathrm{M} = 0.1$, в то время как сплошная кривая на рисунке 4.9а была построена Сэндхэмом (Sandham) и Рейнольдсом (Reynolds) для числа Маха $\mathrm{M} = 0.01$ и трёхмерного сдвигового течения сжимаемой жидкости.

На практике определение временного сдвига кривой энстрофии с помощью параллельного переноса не всегда возможно, т.к. скорость роста возмущения не является постоянной во времени и может зависеть от амплитуды. Определение временного сдвига можно провести, основываясь на кривых производных энстрофии от времени $\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\zeta(t)$ (4.9), выбирая участки одинаковой скорости изменения. Данные графики, параболически сглаженные по 20 точкам для гармоники с номером $m = 6$ представлены на рисунке 4.9б.

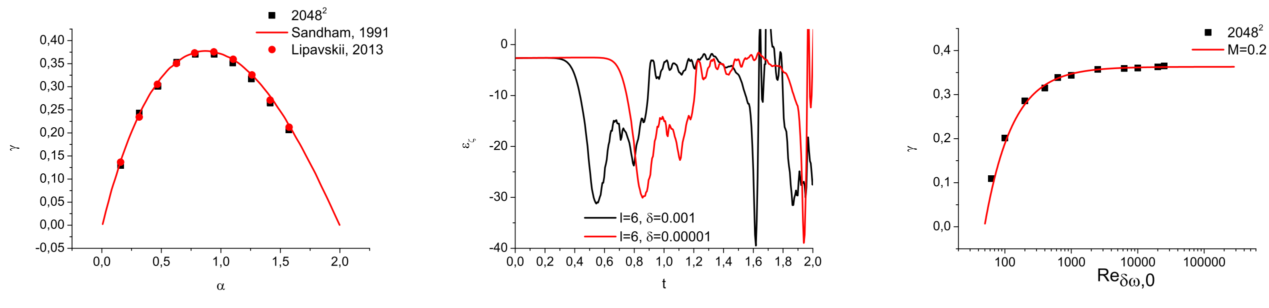
Следует отметить, что не всегда изначально задаваемое возмущение получает дальнейшее развитие, — в определённых случаях (медленно растущие первая и вторая гармоники и относительно малые амплитуды возмущений $a_2 \propto 10^{-5}$) происходит его подавление другими быстрорастущими модами. Развитие такого возмущения приводит к появлению растущего участка на интегральной кривой энстрофии и изменению её дальнейшего поведения, даже если разница амплитуд составляет $|a_1 - a_2| \approx 10^{-3}$. Сводные результаты в случае одномодового возмущения представлены в таблице 4. Тесты, в которых генерируемая мода не совпадает с начальной, отмечены жирным шрифтом, а рядом в скобках указывается фактическая гармоника. Примечательным фактом является генерация самой быстрой $m = 6$ дискретной моды при пробном моделировании достаточно сильной ($a = 0.05$) основной гармоники на грубой сетке 128^2 ячеек.

Таблица 4: Характерные параметры одномодовых возмущений и их реализуемость в расчете.

m	1	1	1	1	1	1	1
a	0.01	0.008	0.006	0.005	0.001	$\mathbf{10^{-4}}$ **(6)**	$\mathbf{10^{-5}}$ **(6)**
m	2	2	2	3	3	4	4
a	10^{-3}	10^{-4}	$\mathbf{10^{-5}}$ **(4)**	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}
m	5	5	6	6	7	7	8
a	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}
m	8	9	9	10	10		
a	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}		

В факте существования волнового числа, дающего самое быстрорастущее возмущение, заключается одно из основных отличий данной постановки от классической, что обусловлено, наличием процессов диффузии и вязкой диссипации. В частности, для классической постановки, можно показать, что не существует длины волны, соответствующей максимальному инкременту неустойчивости. Иными словами, рассматриваемая модель приводит к «ультрафиолетовой катастрофе» [85]. Эволюция слоя двойной вихревой пелены на начальных этапах является примером абсолютной неустойчивости [133] в силу того, что начальное течение состоит из двух слоев жидкости, для которых отношение скоростей [180] превосходит 0.136.

В заключение рассмотрим зависимость γ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}}$ (4.17), вычисленного по начальной толщине слоя завихренности ($m = 1$ и число Маха $\mathrm{M} = 0.2$). В рассматриваемом случае она составляет $\delta_{\omega,0} = 40$. На рисунке 4.9в показано сравнение полученной зависимости (чёрные точки) с результатами [179] при том же $\mathrm{M} = 0.2$. Некоторые различия, вероятно, связаны со способом определения γ и приходятся на участок резкого роста при небольших числах $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}}$.



(а) (б) (в)

Рисунок 4.9: (а)— зависимость инкремента неустойчивости γ от безразмерного волнового числа α, а также сравнение с результатами [179] (сплошная кривая) и [175] (круглые точки), б— скорость изменения интеграла энстрофии как функция времени для самой быстрорастущей гармоники $m = 6$; (в)— зависимость инкремента неустойчивости от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}}$, полученная на сетке 2048^2 (чёрные точки), а также сравнение с результатами [179] (сплошная кривая).

4.2.5 Заключение

Численный метод КАБАРЕ, реализованный в приближении слабой сжимаемости, был использован для моделирования неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, возникающей в двойном вихревом слое и приводящей к созданию развитого турбулентного течения. На основе анализа интегральных кривых энергии и энстрофии, рассчитанных на последовательности сгущающихся сеток, показан процесс сходимости этих зависимостей к точным значениям. Интеграл кинетической энергии, а также скорости её диссипации представляет собой монотонно убывающую функцию, на которую накладываются высокочастотные осцилляции. Установлено, что усреднённое поведение $E = E(t)$ определяется вязкой диссипацией, тогда как существование колебаний связано с эффектом сжимаемости среды. Средние значения скорости диссипации $\overline{\varepsilon}$, рассчитанные на участке асимптотического спада хорошо согласуются с результатами теории однородной изотропной турбулентности, связывающей скорость диссипации кинетической энергии с интегральной энстрофией. Большие значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ в расчете приводят к тому, что доля диссипации вследствие дилатации оказывается сопоставимой с общими потерями энергии.

Качество моделирования тонких слоёв завихренности определяется значением интеграла палинстрофии. Исследование его поведения на последовательности сеток в широком диапазоне Re показывает хорошее согласие с методами высокого порядка точности [175; 179], а обращение к общей феноменологии позволяет отследить процесс потери точности решения. В частности, на самой мелкой сетке 2048^2 для основной гармоники $m = 1$ он имеет место при $\mathrm{Re} \approx 10^6$, а для самой быстрорастущей моды — гораздо раньше — при $\mathrm{Re} = 2.5 \times 10^5$.

Картины эволюции при различном сеточном разрешении позволяют отследить явление «недоразрешенности» слоев, связанное с появлением «паразитного» вихря, а также свидетельствуют о, в целом, правильном отображении черт двумерной турбулентности, обладающей прямым каскадом завихренности от больших вихрей к малым и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим. С помощью расчёта относительной ошибки показан процесс сеточной сходимости схемы по полю завихренности. Реализацию спектральных характеристик двумерной турбулентности подтверждает асимптотическое поведение кинетической энергии и энстрофии, которые в инерционном интервале подчиняются закономерностям $E \propto k^{-3}$, $\omega^2/2 \propto k^{-1}$. К сожалению, на основе анализа скоростей диссипации интегральных величин и спектральных характеристик не удалось убедительно показать влияние схемной диссипации.

Расчёт инкремента неустойчивости одномодового возмущения по смещению интегральной кривой энстрофии для дискретного набора гармоник позволяет удовлетворительно предсказать дисперсионное соотношение в сравнении с методами высокого порядка точности. Расхождение полученных результатов, вероятно, связано с отличием чисел Маха M, для которых проводятся расчёты. Использование приближения слабой сжимаемости не позволяет проводить расчёт при слишком малых M на мелких сетках в связи с резким ростом объёма вычислений. С другой стороны, увеличение числа Маха требует изменения уравнения состояния с включением дополнительной переменной температуры.

По результатам исследования можно отметить, что использованная реализация способна успешно описывать основные характеристики двумерной турбулентности. Это обусловлено слабыми диссипативными свойствами схемы и хорошей вихреразрешающей способностью.

4.3 Моделирование течения Тейлора–Грина

4.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим кубическую периодически продолженную область с координатами $x \in [-\pi L, \pi L]$, $y \in [-\pi L, \pi L]$, $z \in [-\pi L, \pi L]$, имеющую размеры

$$L_X = L_Y = L_Z = L = 2\pi L,$$

внутри которой задаются соответствующие начальные условия вихря Тейлора–Грина:

$$\begin{aligned} &u = U_0 \sin(x/L)\cos(y/L)\cos(z/L), \\ &v = -U_0 \cos(x/L)\sin(y/L)\cos(z/L), \\ &w = 0, \\ &p = p_0 + \frac{\rho_0 U_0^2}{16}\left(\cos(2x/L) + \cos(2y/L)\right)\left(\cos(2z/L) + 2\right), \quad p_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Следует также заметить, что начальные условия для скоростей являются дивергентными, т.к. для них выполняется условие соленоидальности $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. С физической точки зрения периодические граничные условия означают неограниченную область, заполненную системой идентичных вихрей. Сам вектор завихренности имеет вид:

$$\vec{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{4.20}$$

Вихрь Тейлора–Грина представляет собой простейший пример изначально плоского течения, в котором происходит самовозбуждаемое растяжение вихря трёхмерным полем скорости. Действительно, воспользовавшись следствием из определения линии тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{4.21}$$

получим

$$\frac{dx}{\sin(x/L)\cos(y/L)} = \frac{dy}{\cos(x/L)\sin(y/L)}. \tag{4.22}$$

Откуда следует, что линии тока имеют вид плоских кривых $\sin(x/L)\sin(y/L) = const$ в плоскости $z = const$. Компоненты вектора завихренности:

$$\omega_X = -\frac{U_0}{L}\cos(x/L)\sin(y/L)\sin(z/L), \tag{4.23}$$

$$\omega_Y = -\frac{U_0}{L}\sin(x/L)\cos(y/L)\sin(z/L), \tag{4.24}$$

$$\omega_Z = 2\frac{U_0}{L}\sin(x/L)\sin(y/L)\cos(z/L). \tag{4.25}$$

Рассмотрим компоненты вектора $\vec{v} \times \vec{\omega}$, ответственного за генерацию трёхмерного течения

$$(v\omega_z)\vec{i} - (u\omega_z)\vec{j} + (u\omega_Y - v\omega_X)\vec{k}, \tag{4.26}$$

а z-компонента имеет вид

$$[\vec{v} \times \vec{\omega}]_Z = -\frac{U_0^2}{L}\left(\sin^2(x/L)\cos^2(y/L) + \cos^2(x/L)\sin^2(y/L)\right)\cos(z/L)\sin(z/L).$$

Таблица 5: Характерные числа Рейнольдса и значения динамической вязкости

Re	100	280	1600	4000
μ_0	1.33493×10^{-2}	4.7676×10^{-3}	8.3433124×10^{-4}	3.337324×10^{-4}

Вихревые линии описываются кривыми

$$\cos(y/L)\cos(x/L) = const, \quad \cos(x/L)\cos(z/L) = const.$$

Число Рейнольдса будем определять следующим образом

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 \rho_0 L}{\mu_0}. \tag{4.27}$$

В работе [173] аналогичный расчёт был проведен для сжимаемого газа (азота), в нашем случае будет рассматриваться слабосжимаемая жидкость с плотностью, относящейся к воде. Задача решатся для нескольких чисел Рейнольдса Re = 100, 280, 1600, 4000 (значения динамической вязкости указаны в табл. 5), в соответствии с выбором, сделанным в [173].

Расчётные сетки имеют одинаковое число ячеек по трем ортогональным направлениям

$$n_X \times n_Y \times n_Z = 64^3,\ 128^2,\ 256^3.$$

Сетка 256^3 является нижней границей диапазона, необходимого для разрешения [181] вихревых структур при прямом численном моделировании распада вихря (Re = 1600), поэтому в настоящей работе она будет использоваться для выяснения вопроса сеточной сходимости.

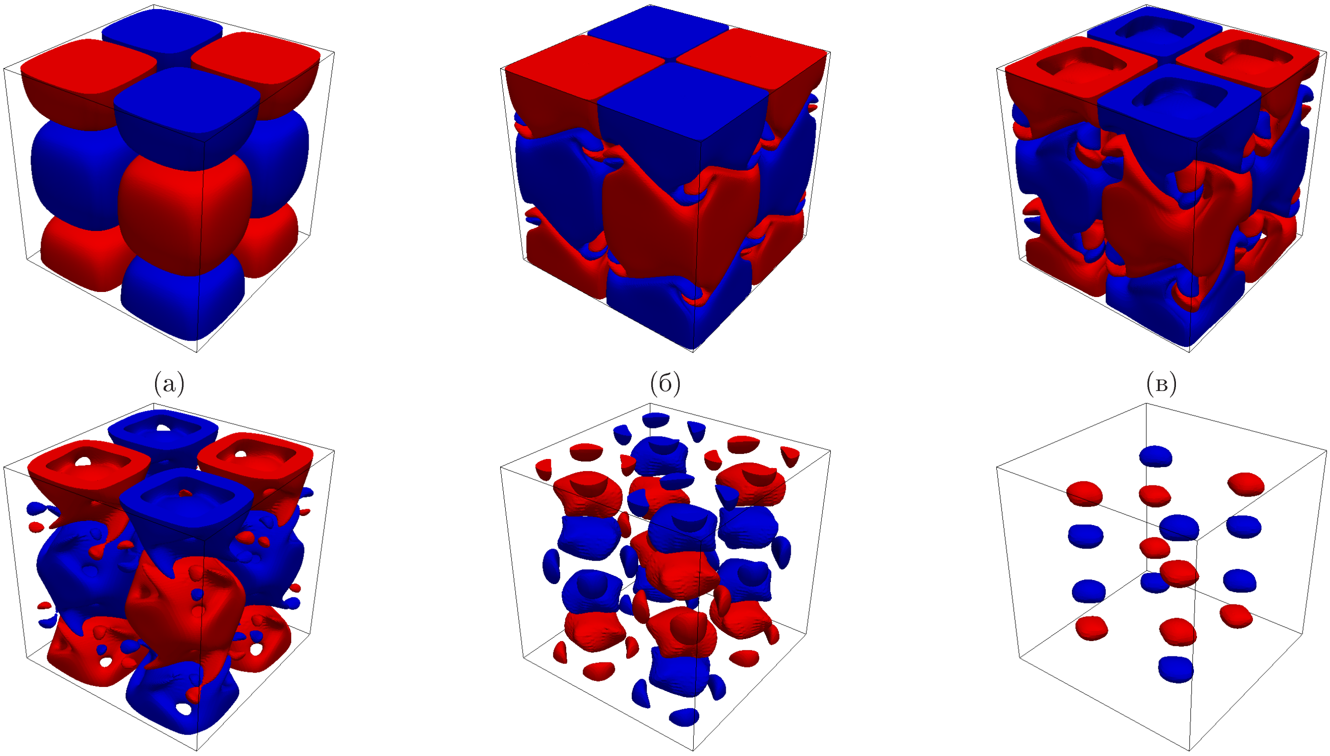
В очередной раз проведем оценку качества сеточного разрешения самых мелких масштабов однородной изотропной турбулентности. Для этого в трёхмерном случае (Re = 1600) необходимо $N \approx \mathrm{Re}^{9/4} \approx 16 \times 10^6$ точек сетки. Такая оценка снизу является достаточно мягкой — учёт диссипативных характеристик схемы КАБАРЕ [174] говорит о необходимости 5–6 ячеек расчётной сетки для качественного разрешения одного вихря, — таким образом, необходимо использовать порядка $N \approx 5\mathrm{Re}^{9/4} \approx 80 \times 10^6$ ячеек. В противовес модельным задачам (типа задачи Тейлора–Грина), для расчёта реальных течений, таких как обтекание самолета ($\mathrm{Re} \approx 2 \times 10^7$, $N \approx 2 \times 10^{16}$), часто встречающихся геофизических потоков [61] — $\mathrm{Re} \approx 10^{20}$, $N \approx 10^{45}$, что делает невозможным прямое численное моделирование.

При моделировании обеспечивалось постоянство всех характерных параметров (U_0, t_0, M), кроме числа Рейнольдса. Трёхмерная реализация алгоритма является развитием двумерной версии [182] приближения слабой сжимаемости. При распараллеливании алгоритма для исполнения на многопроцессорных ЭВМ использовалась декомпозиция расчётной области плоскостями $z = const$.

Как показывают другие исследования, наиболее часто рассчитывается режим Re = 1600, а для выявления сеточной сходимости анализируются не поля гидродинамических величин, а их производные — интегральная кривая энстрофии и кинетической энергии (4.7) а также скорости её диссипации 4.11 (см. раздел 4.1).

4.3.2 Феноменологическое описание эволюции вихря

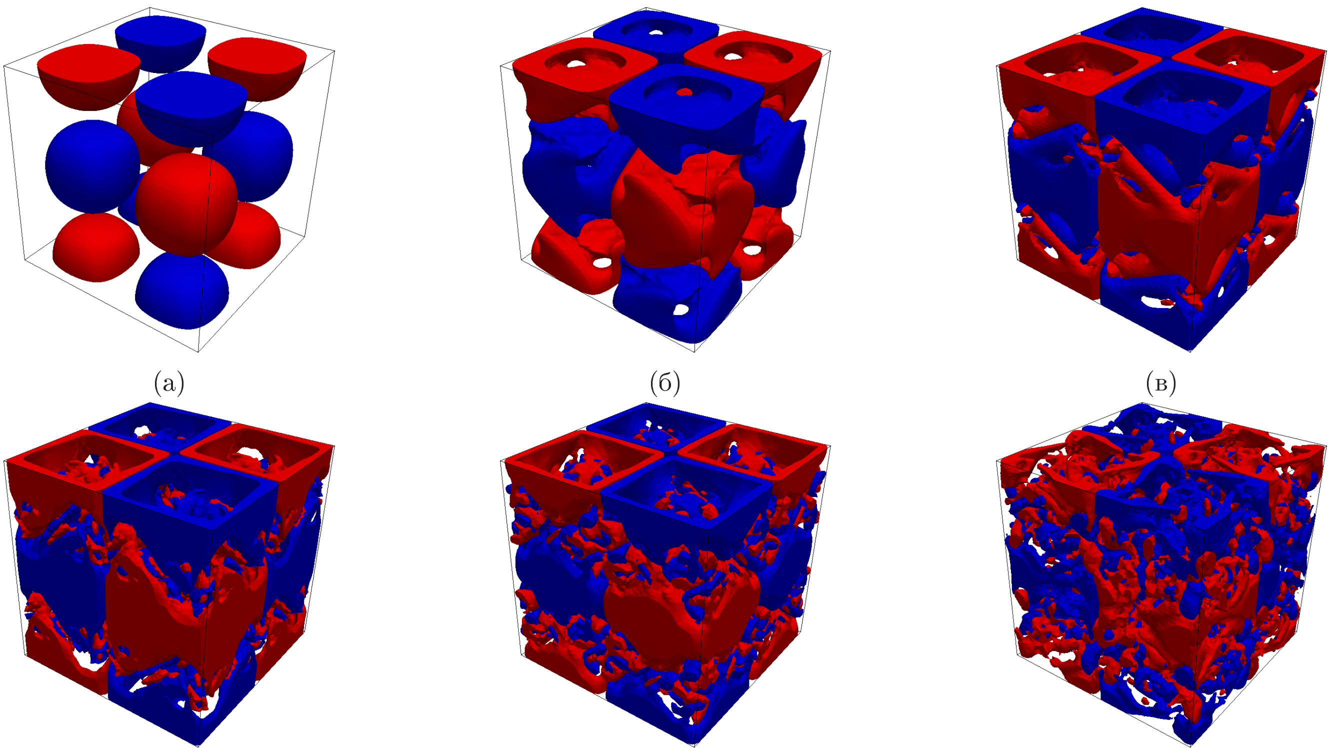
Вихрь Тейлора–Грина представляет собой простой пример течения, в котором наблюдаются механизмы распада турбулентности, генерации малых вихрей и усиления диссипации вследствие растяжения вихревых трубок. В зависимости от Re наблюдаются различные режимы эволюции течения: в частности, распад одиночного вихря для Re = 100, 280 имеет ламинарный характер, при котором не происходит образование случайного поля завихренности. На рисунке 4.10 изображен



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 4.10: Поле завихренности в случае ламинарного распада вихря ($Re = 100$) в диапазоне $\omega_z \leqslant -0.2 \cup \omega_z \geqslant 0.2$ в различные моменты времени: (а) — $t = 0$, (б) — $t = 5$, (в) — $t = 10$, (г) — $t = 15$, (д) — $t = 20$, (е) — $t = 25$.



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 4.11: Поле завихренности в случае турбулентного распада вихря при самом большом числе $\mathrm{Re} = 4000$ в диапазоне $\omega_z \leqslant -0.7 \cup \omega_z \geqslant 0.7$ в различные моменты времени: (а) — $t = 0$, (б) — $t = 3$, (в) — $t = 5$, (г) — $t = 7$, (д) — $t = 9$, (е) — $t = 12$.

пример такого распада при Re $=$ 100, здесь компонента завихренности ω_z представлена двумя группами поверхностей уровня, выделенных синим ($\omega_z \leqslant -0.2$) и красным цветами ($\omega_z \geqslant 0.2$).

При достаточно больших числах Рейнольдса эволюция вихря имеет две стадии [67]: на первом этапе влияние вязкости оказывается пренебрежимо малым, а мелкомасштабные структуры — упорядоченными и ламинарными. Ламинарная эволюция течения имеет невязкий характер ($t \approx 3$ — см. рисунок 4.11б) и приводит к свертыванию вихрей ($t \approx 5$ — см. рисунок 4.11в) с последующим изменением их топологии ($t \approx 7$ — см. рисунок 4.11г). На втором этапе ключевую роль играет диссипация энергии, а также диффузионные процессы вследствие существования вязкости. Кроме того, образуются участки активной диссипации энергии, которая достигает своего максимума на поздних стадиях «вязкого участка» ($t \approx 8.5$). При $t \approx 9$ (см. рисунок 4.11д) следует разрушение когерентных структур, что приводит развитому турбулентному течению, которое на временах $t > 12$ (см. рисунок 4.11е) начинает затухать. Считается, что участки с сильной завихренностью приходятся на структуры, имеющие форму трубок [67], в то время как участки сильной диссипации энергии связываются с листовидными образованиями.

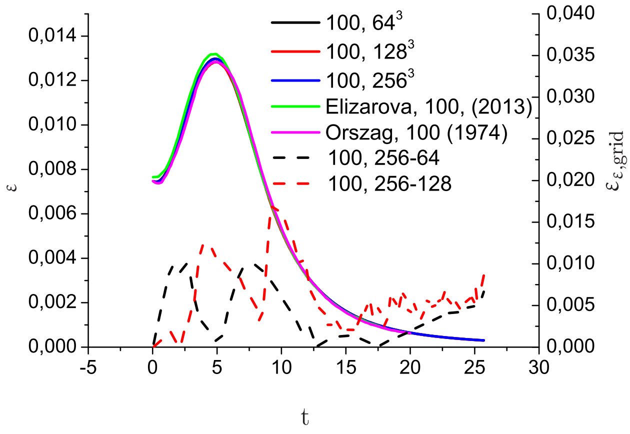
Конечным результатом как ламинарного, так и турбулентного распада вихря является покоящаяся среда. Таким образом, в рассматриваемом течении не может реализовываться временного хаоса [91], так как для этого должен существовать нетривиальный аттрактор в пространстве состояний при $t \to \infty$. Однако при больших числах Рейнольдса в процессе эволюции течения, возможно, реализуется переход к пространственному хаосу. Указанные соображения позволяют обосновать применение пространственного усреднения при расчёте корреляционных функций (Раздел 4.3.5).

4.3.3 Интегральные кривые энергии и энстрофии

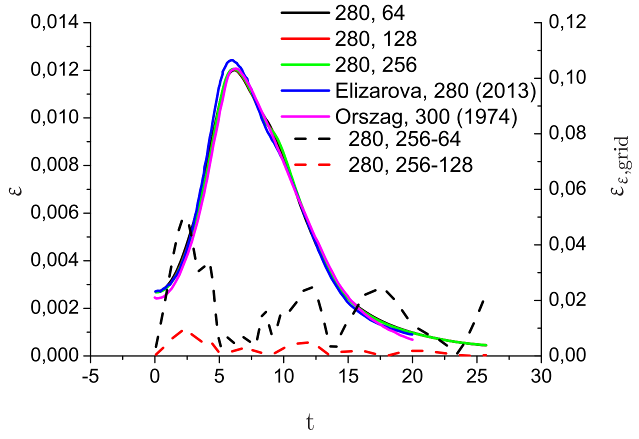
Как уже отмечалось выше, скорость диссипации кинетической энергии может быть определена несколькими способами, в том числе непосредственно по формулам (4.7),(4.11). Полученные результаты для различных чисел Рейнольдса представлены на рисунке 4.12. Помимо ε, интерес представляет поведение относительной ошибки $\varepsilon_{\text{grid}}$, демонстрирующей процесс сеточной сходимости и определяемой по формуле

$$\varepsilon_{\varepsilon,\text{grid}} = \frac{|\varepsilon_{i,256} - \varepsilon_{i,k}|}{\varepsilon_{i,256}}, \tag{4.28}$$

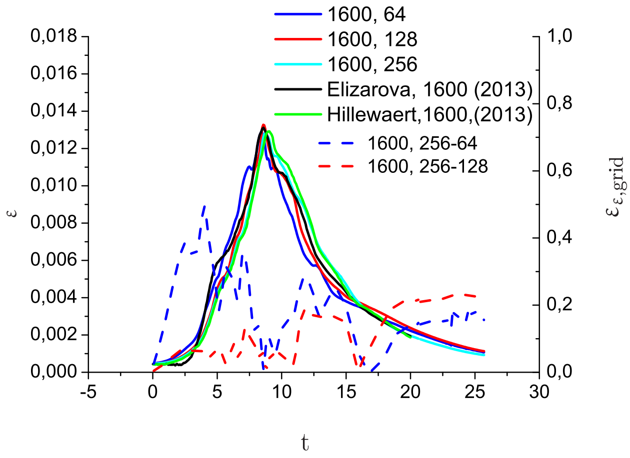
где $\varepsilon_{i,256}$ — результаты расчёта на сетке 256^3, $\varepsilon_{i,k}$ — на сетке k^3, $k = 64,\ 128$. На графиках рисунка 4.12 этой величине соответствует правая шкала ординат и штрихованный тип кривых (в легенде обозначены как «Re, 256-k»). Для случая ламинарного распада при Re $=$ 100 максимальное расхождение результатов по схеме КАБАРЕ с референсными значениями [173] при измельчении сетки соответствует максимуму скорости диссипации при $t \approx 5$; причём расчётные кривые для сеток 64^3 (красная линия на рисунке 4.12а) и 256^3 практически совпадают (чёрная линия на рисунке 4.12а), график для сетки 128^3 — синяя кривая, — располагается несколько ниже (-1.3%), полностью совпадая с референсными значениями [92]. Расчёт по квазигазодинамическим уравнениям (КГД) [173] завышает значение на 1.6%. Схожее поведение наблюдается и при Re $=$ 280 (рисунок 4.12б), здесь разница между результатами всех расчётов по схеме КАБАРЕ не превышает 0.5%, в то время как КГД-подход завышает скорость диссипации не более чем на 3%. В случае турбулентного распада вихря (Re $=$ 1600) на самой подробной сетке на всех участках кривой (рисунок 4.12в) схема КАБАРЕ практически совпадает с эталонным решением [73], полученным с помощью спектрального метода (ярко-зелёная кривая); КГД-подход [173] несколько завышает скорость диссипации на участке роста и занижает её на участке распада турбулентности (синяя кривая на рисунке 4.12б). Для



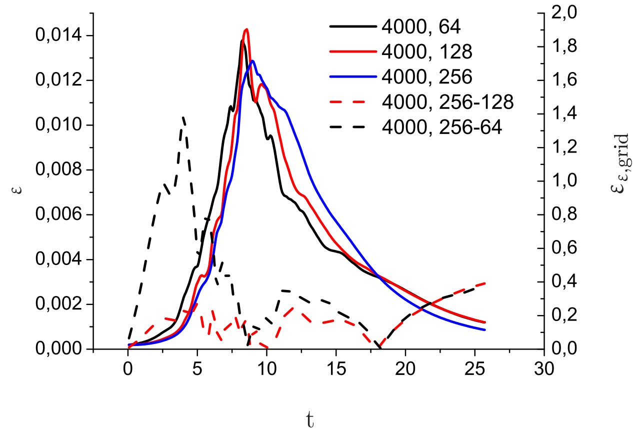
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 4.12: Скорость диссипации, рассчитанная непосредственно на последовательности сгущающихся сеток при различных числах Рейнольдса, сравнение с результатами работ [92; 173]: (а) — Re = 100; (б) — Re = 280; (в) — Re = 1600; (г) — Re = 4000. Правая шкала ординат и сплошные кривые отвечают поведению ε, левая и штрихованные кривые — поведению относительной ошибки $\varepsilon_{\varepsilon,\mathrm{grid}}$.

самого большого числа Рейнольдса Re = 4000 измельчение сетки приводит к усилению ε (см. рисунок 4.12г) на участке развития течения (вследствие лучшего разрешения вихревых образований) и уменьшению ε на участке спада (возможно, процесс диссипации проходит несколько быстрее).

Хорошее совпадение поведения кривых $\varepsilon = \varepsilon(t)$ при Re = 1600 и Re = 4000, вероятно, связано с приближением к «предельному» диссипативному процессу, независящему от числа Рейнольдса [59].

Т.о., метод КАБАРЕ при рассмотрении кривых $\varepsilon = \varepsilon(t)$ оказывается вполне конкурентноспособным.

Анализ кривых $\varepsilon = \varepsilon(t)$ следует дополнить, рассмотрев семейство графиков интегральной энстрофии $\zeta = \zeta(t)$ (см. рисунок 4.16), что позволит сделать несколько существенных выводов о качестве численного метода.

Зависимость $\zeta = \zeta(t)$ анализируется реже, однако, она показывает, необходимость более подробного сеточного разрешения в рамках ламинарного распада. Действительно, ведь ε_1 зависит качества моделирования вихревых структур. Для Re=100, относительная ошибка падает с 6-2% до 2-0.5%. Ошибка сетки 64^3 относительно сетки 256^3 обозначена чёрной штриховой кривой, аналогично для 128^3 – красной штриховой и вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\zeta,\mathrm{grid}} = \frac{|\zeta_{i,256} - \zeta_{i,k}|}{\zeta_{i,256}}, \tag{4.29}$$

Таблица 6: Максимальный рост интегральной энстрофии относительно начальных значений

Re	100	280	1600	4000
ζ_{max}/ζ_0	1.73	4.46	21.57	34.16

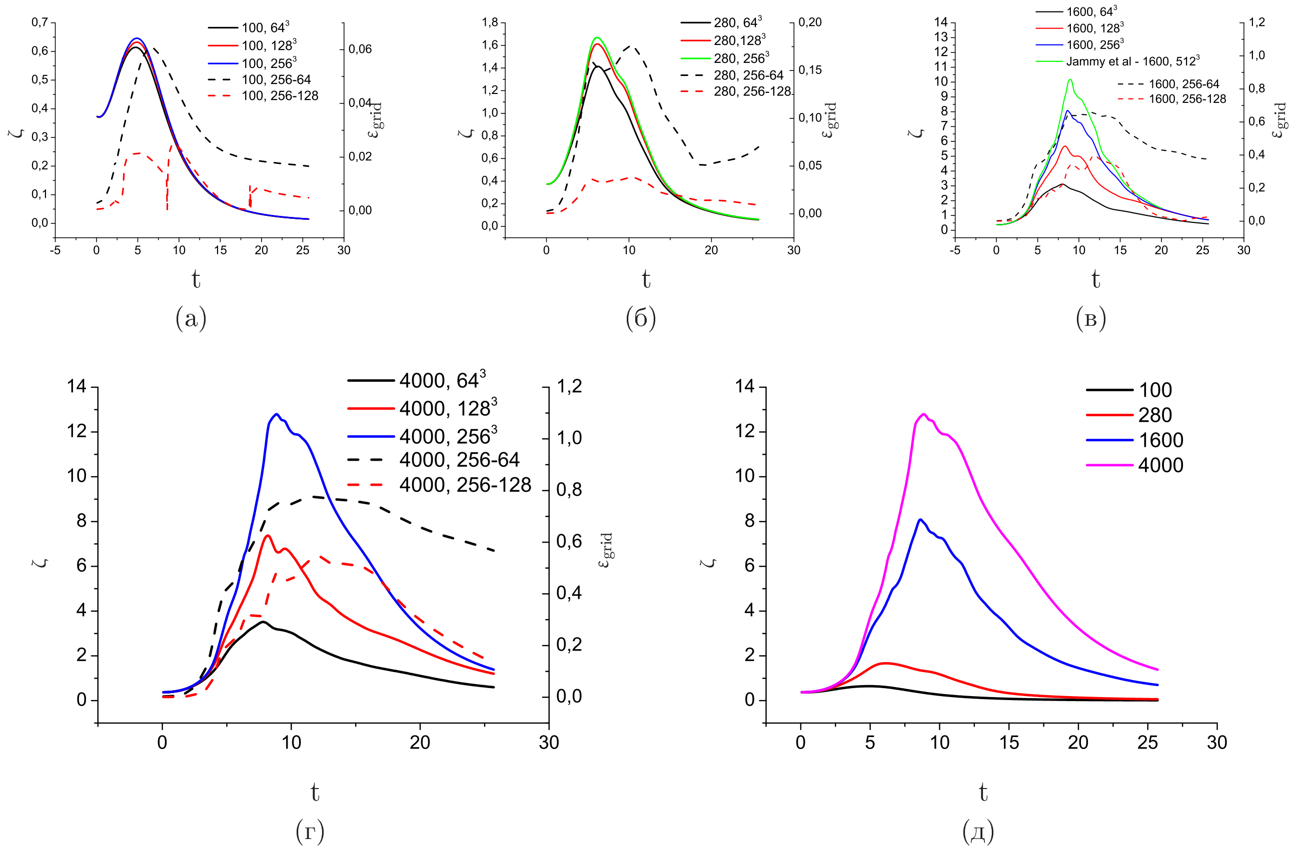


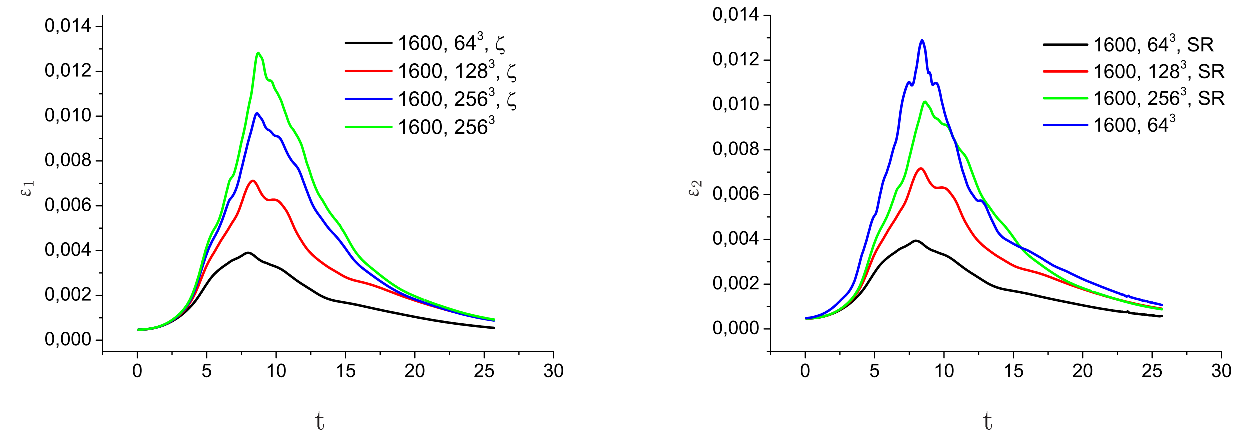
Рисунок 4.13: Зависимость интегральной энстрофии от времени, сходимость результатов на последовательности сгущающихся сеток при различных числах Рейнольдса: (а) — Re = 100; (б) — Re = 280; (в) — Re = 1600; (г) — Re = 4000; (д) — сводный график при различных числах Рейнольдса (сетка 256^3).

аналогичной (4.28). В случае ламинарного распада максимум относительной ошибки приблизительно приходится на участок максимальной скорости диссипации.

Быстрый спад кинетической энергии на пике диссипации связан с возбуждением неустойчивости, носящей невязкий характер (или неустойчивости, возникающей в идеальной жидкости — inviscid instability), и совпадает с пиком энстрофии [181].

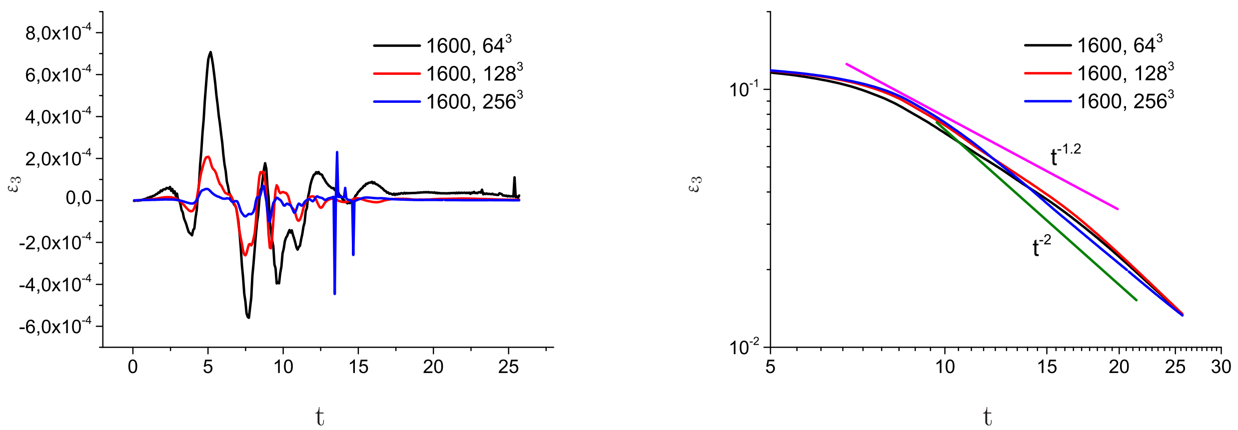
Переход к Re = 1600 показывает, что использование 256^3 ячеек является недостаточным — это следует из сравнения с результатами моделирования [183], выполненным на сетке 512^3. Таким образом, выигрыш от повышения точности при измельчении расчётной сетки оказывается более существенным, чем при подборе более эффективного численного метода. В нашем случае измельчение сетки позволяет уменьшить ошибку вдвое на всех участках (см. рисунок 4.16в). Аналогичная ситуация наблюдается и при Re = 4000, здесь, однако, распад происходит медленнее, поэтому ошибка уменьшается меньше. На рисунке 4.16д представлен сводный график, характеризующий многократное усиление энстрофии при переходе к развитому турбулентному режиму, коэффициент усиления ζ_{max}/ζ_0 представлен в таблице 7 (сетка 256^3).

Различие между непосредственным расчётом скорости диссипации ε и определением по данным энстрофии ε_1 позволяет сделать решающие выводы о характеристиках используемого численного метода. Для этого необходимо воспользоваться соотношением (4.12), которое справедливо для несжимаемой жидкости в любой момент развития течения [71].



(а) (б)

Рисунок 4.14: Скорость диссипации, рассчитанная на основе интеграла энстрофии $\zeta = \zeta(t)$ (а) и тензора скоростей деформации (б).



(а) (б)

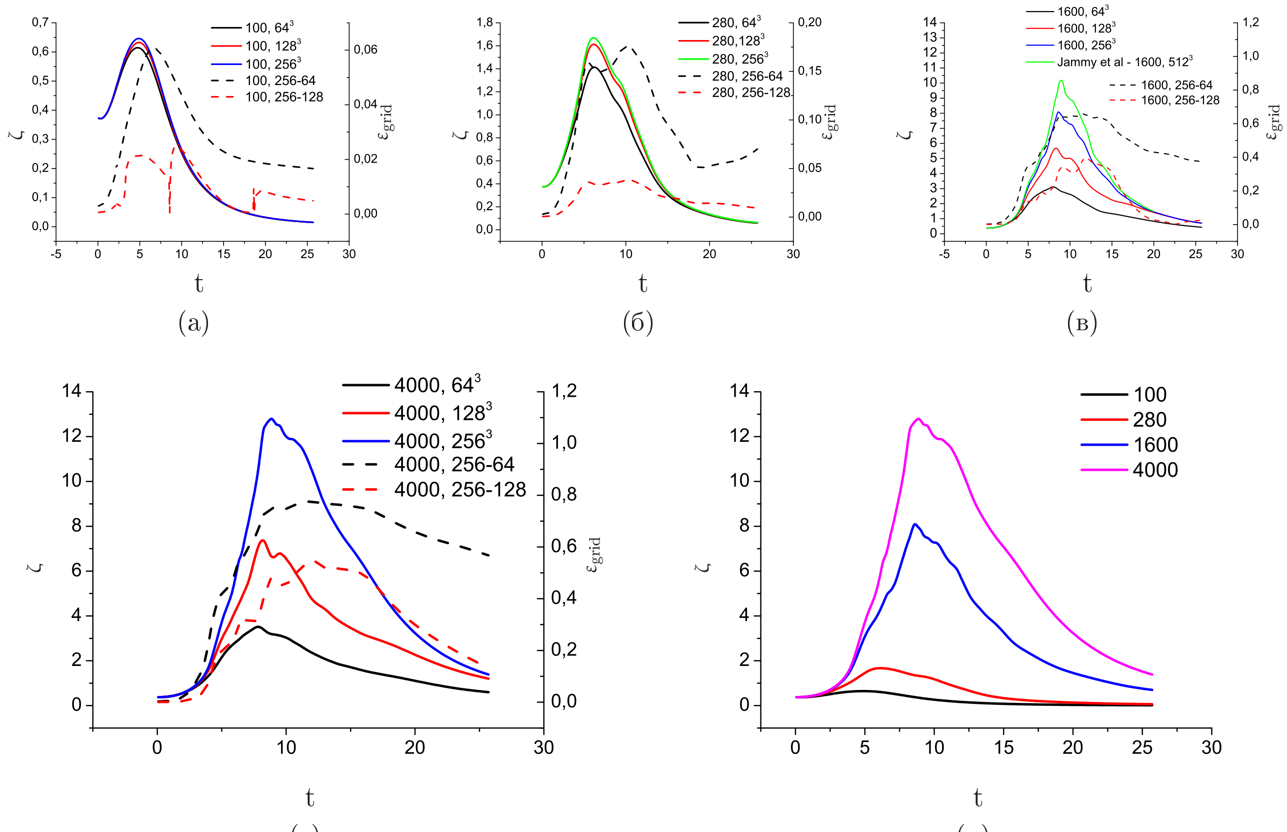
Рисунок 4.15: Скорость диссипации ε_3, обусловленная влиянием сжимаемости (а); зависимость кинетической энергии ε (б) от времени при $\mathrm{Re} = 1600$, рассчитанная на последовательности сеток, малиновая линия указывает наклон асимптотики $t^{-1.2}$, зелёная — асимптотики t^{-2}.

Следует помнить, что однородная изотропная турбулентность представляет собой идеализацию, никогда не встречаемую в природе, будучи связанной с несколькими свойствами симметрии [58]. В частности, однородность предполагает, что $\overline{u'^2(\vec{x})} = \overline{u'^2(\vec{x}+\vec{r})}$, но не $\overline{u'^2(\vec{x})} = \overline{v'^2(\vec{x})}$; Условие изотропности является более жёстким: $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ (повороты на 90°), $\partial\overline{u'^2}/\partial x = \partial\overline{v'^2}/\partial y = \partial\overline{w'^2}/\partial z$ (произвольные повороты), где u', v', w' — пульсации компонент скорости. Таким образом, термин «однородная изотропная турбулентность» в зарубежной литературе воспринимается как избыточный, в силу того, что любую трансляцию можно свести к совокупности двух поворотов.

На грубых сетках значения скорости диссипации, полученные из энстрофии (рисунок 4.14а) существенно ниже результатов непосредственного расчёта. Таким образом, механизм диссипации вследствие растяжения вихревых трубок не соответствует диссипативным процессам при расчёте, что является следствием дополнительной численной диссипации. Подход к моделированию, при котором присутствующая в численных схемах диссипация предлагает возможность не использовать (пренебречь) подсеточными моделями для диссипации на мелких масштабах получил название неявного (implicit) LES — ILES.

Таблица 7: Максимальный рост интегральной энстрофии относительно начальных значений

Re	100	280	1600	4000
$\zeta_{\max}/\zeta_0$	1.73	4.46	21.57	34.16



(а) (б) (в)

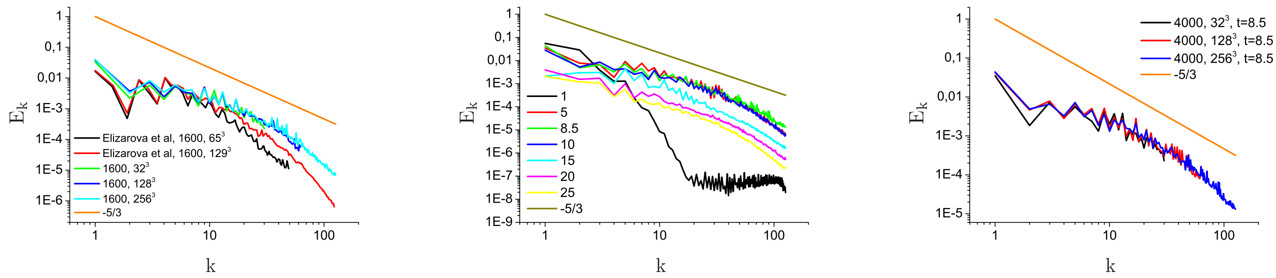
(г) (д)

Рисунок 4.16: Зависимость интегральной энстрофии от времени, сходимость результатов на последовательности сгущающихся сеток при различных числах Рейнольдса: (а) — Re = 100; (б) — Re = 280; (в) — Re = 1600; (г) — Re = 4000; (д) — сводный график при различных числах Рейнольдса (сетка 256^3).

При затухании турбулентности ($10 < t < 25$) более грубая сетка приводит к повышенной диссипации кинетической энергии [71]. Расчёт компонент ε, связанных с тензором скоростей деформации ε_2 (рисунок 4.14б) и дилатации ε_3 (рисунок 4.15а) показывает, что основной вклад вносит вязкая диссипация, а роль ε_3 является пренебрежимо малой, в особенности при измельчении сетки, — что даёт дополнительное обоснование применимости приближения слабой сжимаемости.

Рассмотрим поведение $E = E(t)$ на этапе распада турбулентного течения, представленное на рисунке 4.15б для различных сеток (Re = 1600). Показатель степени «-1.2» для временной зависимости скорости диссипации принимается как характерное значение для затухающей турбулентности [184]. Следование закону $E \propto t^{-1.2}$ приходится на достаточно узкий отрезок времени около $t \sim 8$–10, что обычно приписывается пику диссипации кинетической энергии. Сразу после этого действительно происходит укручение спада до $E \propto t^{-2}$. Переход к показателю «-2», возможно, связан с насыщением энергосодержащих масштабов, что отражает тот факт, что существование вихрей больших, чем периодическая область невозможно [185].

Различие между непосредственным расчётом скорости диссипации ε и определение по данным энстрофии ε_1 позволяет сделать решающие выводы о характеристиках используемого численного метода. Для этого необходимо воспользоваться соотношением (4.12), которое справедливо для несжимаемой жидкости в любой системе координат.



(а) (б) (в)

Рисунок 4.17: (а) — энергетический спектр течения в момент времени $t = 8.5$, ($\mathrm{Re} = 1600$, сетка 256^3), сравнение в КГД-подходом [173]; (б) — эволюция энергетического спектра со временем ($\mathrm{Re} = 4000$, сетка 256^3); (в) — аналогичный спектр при $t = 8.5$, $\mathrm{Re} = 4000$, сетка 256^3
.

4.3.4 Фурье спектр развитого турбулентного течения

На рисунке 4.17 приведено сравнение фурье-спектров развитого турбулентного течения в момент наибольшей скорости диссипации, приблизительно соответствующий $t \approx 8.5$. Трёхмерное преобразование Фурье было реализовано с помощью библиотеки Intel MKL. По трем проекциям волнового вектора рассчитывалась его длина, на основании чего проводилось распределение значений по $n_{\mathrm{X}}/2$ уровням с выборкой максимального значения. Альтернативой может служить линейное или логарифмическое усреднение по сферическим оболочкам. В этом случае играет роль существенная разница между значениями чётных и нечётных k, что, возможно, является следствием ограниченного числа членов спектрального разложения и специальной симметрии вихря [91]. Такое усреднение приводит к несколько заниженным значениям. Кроме того, процедура простого сложения амплитуд высших гармоник выполняется без какого-либо методологического обоснования. На рисунке 4.17а приведено сравнение энергетических спектров полученных в работе [91] с результатами по схеме КАБАРЕ. На взгляд автора, спектры КАБАРЕ лучше приближаются к асимптотике «-5/3», вместе с тем, небольшое укручение «хвостов» спектров подтверждает предположение о численной диссипации. Временная эволюция спектров (см. рисунке 4.17б) показывает, что при развитии течения ($5 < t < 10$) спектры приближаются к асимптотике «-5/3». На этапе распада $t > 10$ наклон спектров усиливается, хотя, вероятно, «завал» спектра должен затрагивать его хвост, который вследствие недостаточного спектрального разрешения не наблюдается. Напротив, в представленном случае он охватывает практически весь разрешаемый интервал. При числе $\mathrm{Re} = 4000$ измельчение сетки (рисунок 4.17в) приводит слабовыраженному удлинению интервала с асимптотикой «-5/3».

В отличие от спектральных методов, где разрешение может достигать нескольких сотен членов разложения в одном направлении, методы конечных разностей ограничивается существенно меньшим значением. В результате, чтобы реализовать достаточно подробные спектры, необходимо уменьшать толщину сферических оболочек, по которым проводится усреднение. В итоге, мы используем очень тонкие сферические оболочки, которые дают «дрожащие» спектры. Измельчение толщины (ширины сферических оболочек) Δk не позволяет устранить «паразитные» осцилляции в спектрах: при $\Delta k < \delta k$ — увеличивается число участков спектра, на которые в среднем статистически приходится менее одного слагаемого, тогда как $\Delta k > \delta k$ приводит к изменению асимптотики спектра следствие усреднения [186].

4.3.5 Корреляционные функции

Для подтверждения связи между областями сильной завихренности и разрежения рассчитаем пространственную корреляционную функцию для переменных давления p и $\vec{\omega}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$:

$$R_{pe} \frac{\langle p\,\vec{\omega}^2\rangle}{\sqrt{\langle p^2\rangle}\sqrt{\langle(\vec{\omega}^2)^2\rangle}}, \tag{4.30}$$

где

$$\langle p\,\vec{\omega}^2\rangle = \frac{t_0^2}{c^2\rho_0 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \iiint_{-\pi L}^{\pi L} p\left(\vec{\omega}^2\right)^2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.31}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{1}{c^4\rho_0 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \iiint_{-\pi L}^{\pi L} p^2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.32}$$

$$\langle\left(\vec{\omega}^2\right)^2\rangle = \frac{t_0^4}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \left(\vec{\omega}^2\right)^2\,dx\,dy\,dz. \tag{4.33}$$

Кроме того, можно выполнить расчёт корреляции пульсационных характеристик p', $(\vec{\omega}^2)'$:

$$p = \bar{p} + p', \quad \bar{p} = \iiint_{-\pi L}^{\pi L} p\,dx\,dy\,dz, \tag{4.34}$$

$$\vec{\omega}^2 = \overline{\vec{\omega}^2} + \left(\vec{\omega}^2\right)', \quad \overline{\vec{\omega}^2} = \iiint_{-\pi L}^{\pi L} \vec{\omega}^2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.35}$$

$$R_{p'e'} \frac{\langle p'\,(\vec{\omega}^2)'\rangle}{\sqrt{\langle(p-\bar{p})^2\rangle}\sqrt{\langle\left(\vec{\omega}^2 - \overline{\vec{\omega}^2}\right)^2\rangle}}, \tag{4.36}$$

где

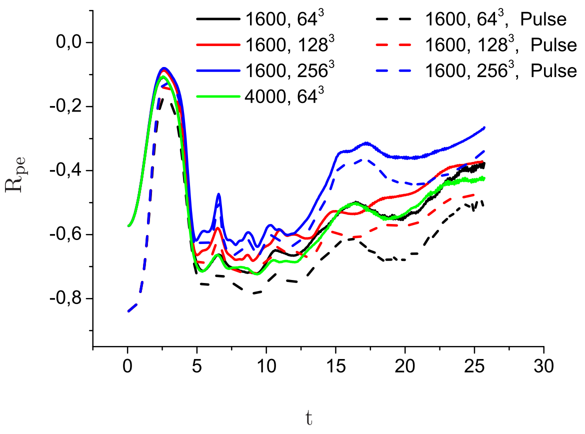
$$\langle p'\,(\vec{\omega}^2)'\rangle = \frac{t_0^2}{c^2\rho_0 L_X L_Y L_Z} \iiint_{-\pi L}^{\pi L} p'\left(\vec{\omega}^2 - \overline{\vec{\omega}^2}\right)\,dx\,dy\,dz, \tag{4.37}$$

$$\langle p^{2\prime}\rangle = \frac{1}{c^4\rho_0 L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \iiint_{-\pi L}^{\pi L} (p-\bar{p})^2\,dx\,dy\,dz, \tag{4.38}$$

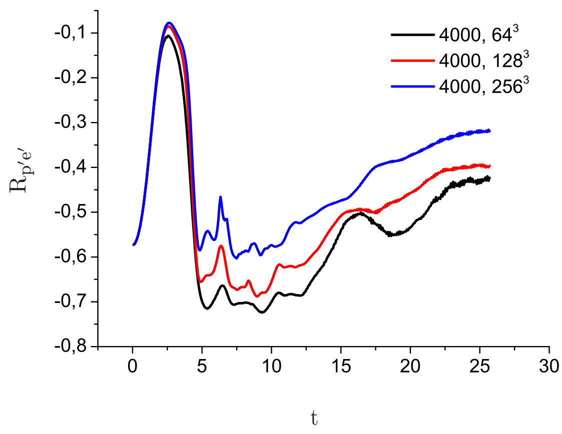
$$\langle\left(\vec{\omega}^2\right)^2\rangle = \frac{t_0^4}{L_\mathrm{X} L_\mathrm{Y} L_\mathrm{Z}} \iiint_{-\pi L}^{\pi L} \left(\vec{\omega}^2 - \overline{\vec{\omega}^2}\right)^2\,dx\,dy\,dz. \tag{4.39}$$

Результаты расчёта $R_{pe} = R_{pe}(t)$ позволяют даже на грубых сетках 64^3 и 128^3 уловить основные особенности течения (см. рисунок 4.18). В частности:

- значения R_{pe} на всем расчётном промежутке являются отрицательными, так что областям сильной завихренности соответствуют разрежение;
- R_{pe} является сильно немонотонной функцией: на участке ламинарного распада вихря $0 < t < 2.5$ происходит потеря связи полей, антикорреляция усиливается при свертывании вихрей и достигает минимума при $t \approx 5$. В дальнейшем она сохраняет свое значение в диапазоне (-0.6 ± 0.05) при $5 < t < 11$, когда происходит формирование турбулентного течения. Увеличение R_{pe}, означающее «разрыв» корреляционной зависимости); при $t \approx 7$ может быть связано с изменениями структуры поля завихренности. При дальнейшем распаде турбулентности $|R_{pe}|$ уменьшается, т.е. корреляционная связь становится все слабее, что может быть связано как с физической и численной диссипацией, так и с недостаточным сеточным разрешением.
- Та же кривая для большего числа Рейнольдса показывает аналогичную зависимость. Полный набор кривых $R_{pe} = R_{pe}(t)$ на последовательности сгущающихся сеток для $\mathrm{Re} = 4000$ приведен на рисунке 4.18б.



(а)



(б)

Рисунок 4.18: Функция взаимных корреляций давления и квадрата завихренности $R_{pe} = R_{pe}(t)$: (а) — Re = 1600; (б) — Re = 4000
.

Таблица 8: Значения структурных функций различных порядков при $r = 0$

S_3	S_4	S_5	S_6
0.58 (0.65)	12.66(10)	23.26(23.1)	459.2(273)

– измельчение расчётной сетки, в общем, показывает ослабление корреляционной зависимости.
– расчёт корреляционной функции на основе «пульсационных» характеристик (имеется в виду отклонение от пространственного среднего) для грубых сеток приводит к усилению антикорреляции $R_{pe} > R_{p'e'}$, однако на самой подробной сетке 256^3 характер поведения кривых практически одинаков (сплошная и штриховая синие кривые на рисунке 4.18а)

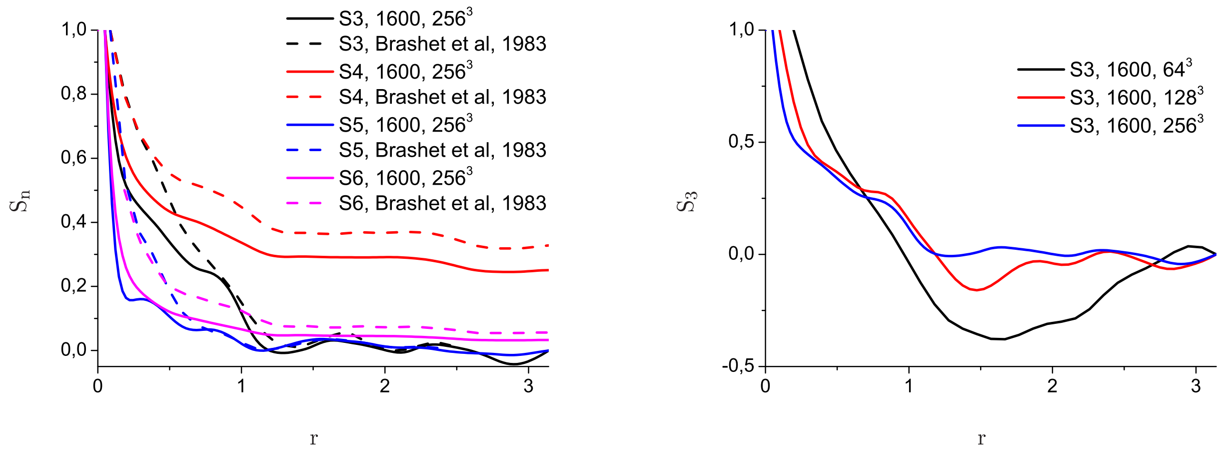
Дополнительный анализ потока можно провести, привлекая структурные функции — коэффициенты асимметрии (skewness factor) и гладкости (flatness factor):

$$S_n(r) = (-1)^n \frac{\langle [U(x+r,y,z) - U(x,y,z)]^n \rangle}{\langle [U(x+r,y,z) - U(x,y,z)]^2 \rangle^{1/2n}}, \tag{4.40}$$

$$S_n(0) = (-1)^n \frac{\langle (\partial U(x,y,z)/\partial x)^n \rangle}{\langle (\partial U(x,y,z)/\partial x) \rangle^{1/2n}}, \tag{4.41}$$

где $\langle\ \rangle$ означает пространственное усреднение в периодической расчётной области. На рисунке 4.19 приведено сравнение коэффициентов асимметрии и гладкости высоких порядков с результатами [91]. Видно, что основной вклад вносят области в окрестности $r = 0$. Из факта аппроксимации пространственной производной конечными разностями получается, что $S_n(0) = S_n(2\Delta x)$. Рассмотрение поведения первой структурной функции $S_3(r)$ на различных расчётных сетках показывает, что сколько-нибудь адекватное поведение по сравнению с эталонными значениями удаётся получить только на самой подробной из них.

В таблице 8 приведено сравнение структурных функций различного порядка при $r = 0$ с референсными значениями [91], указанными в скобках. Точность расчёта для последней структурной функции существенно падает.



(а) (б)

Рисунок 4.19: (а) — зависимость структурных функций от длины корреляции, сравнение полученных данных с эталонными; (б) — поведение структурной функции S_3 на различных сетках, число Рейнольдса Re $= 1600$.

4.3.6 Течение Тейлора–Грина с точки зрения спектральной теории

Соответствие некоторых участков спектра кинетической энергии асимптотике «-5/3» для изотропной турбулентности может ввести в заблуждение относительно её общих характеристик. При рассмотрении спектральных характеристик турбулентного течения, необходимо сначала установить возможность реализации общих свойств турбулентного потока с точки зрения соображений симметрии. Как уже отмечалось ранее, мы имеем дело с пространственной периодической системой вихрей. Таким образом, можно предположить, что турбулентность является как минимум однородной, что обеспечивает совпадение [58] статических средних, полученных усреднением по ансамблю и по пространству.

Более жёстким является условие изотропности, под которым мы будем понимать инвариантность пространственных средних при произвольных поворотах.

В изотропной турбулентности спектральный перенос кинетической энергии $T(k)$ (или спектральный поток $\Pi_E(k)$) и спектральная диссипация $\varepsilon(k)$ связаны друг с другом спектральным аналогом уравнения Кармана–Ховарта [2] (уравнение Линя — [187]):

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = T(k,t) + \varepsilon(k,t), \quad \varepsilon(k,t) = 2\nu k^2 E(k,t), \tag{4.42}$$

или

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_E(k,t)}{\partial t} + \varepsilon(k,t), \quad \Pi_E(k) = -\int\limits_0^k T(k')dk', \tag{4.43}$$

где $E(k,t)$ — спектральная плотность кинетической энергии, ν — кинематическая вязкость.

В терминах энергетического каскада $T(k,t)$ представляет собой отбор энергии от больших масштабов и накопление её в малых. В идеализированном случае отрицательные значения $T(k,t)$ приходятся на малые k (отбор энергии от больших вихрей), положительные — на область больших k (передача энергии малым вихрям). Спектральный поток $\Pi_E(k)$ представляет собой полную величину переноса энергии от всех вихрей с волновым числом, меньшим k, в сторону вихрей остального интервала.

В случае изотропной турбулентности $T(k)$ можно найти двумя способами, — основываясь на продольном двухточечном моменте третьего порядка (троичные корреляции) $S_{iii}(r) = \langle U(x,y,z)^2 U(x+r,y,z)\rangle$ и продольной автокорреляционной функции

$$Q_{ii}(r) = \langle U(x,y,z)U(x+r,y,z)\rangle;$$

а также воспользовавшись представлением $T(k)$ в виде интеграла троичных взаимодействий мод в Фурье-пространстве (см. изложение Разделе 4.3.7).

Продольная автокорреляционная функция $Q_{ii}(r)$, а также двухточечный момент третьего порядка $S_{iii}(r)$ в случае однородной изотропной турбулентности принимают вид $Q_{ii}(r) = \langle u^2\rangle f(r)$ и $S_{iii}(r) = \langle u^2\rangle^{3/2} K(r)$, где $\langle u^2\rangle = Q_{ii}(0)$ — средний квадрат турбулентных пульсаций, $f(r)$ — «классическая» продольная корреляционная функция скорости, $K(r)$ — продольная корреляционная функция тройных корреляций (в обозначениях [2]). Функция $f(r)$ — является положительной, $K(r)$ — отрицательной, но обе они стремятся к нулю при бесконечном удалении точек корреляции друг от друга.

По известным значениям автокорреляционных функций, можно вычислить спектральный перенос $T(k)$ и спектральный поток $\Pi_E(k)$:

$$T(k) = \frac{k}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 u^3 K(r)\right]\sin(kr)\,dr = \frac{k}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 S_{iii}(r)\right]\sin(kr)\,dr, \tag{4.44}$$

для диапазона безразмерных волновых чисел $k \in [1, n_{\mathrm{X}}]$. В приводимых расчётах верхний предел устанавливался в виде половины расчётной области (πL):

$$T(k) = \frac{k}{\pi}\int\limits_0^{\pi L} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 S_{iii}(r)\right]\sin(kr)\,dr, \tag{4.45}$$

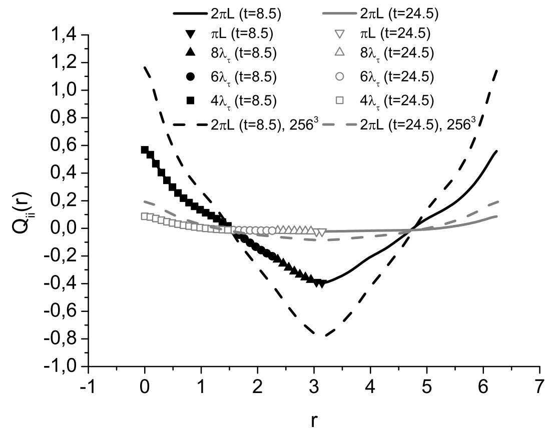
и использовался половинный набор волновых чисел (аналогично спектральному разложению с учётом теоремы Котельникова).

Расчёт расстояния r между точками проводился без учёта пространственной периодичности, то есть существования ближайшего образа, но с учётом изменения индексации точек, выходящих за границы расчётной области.

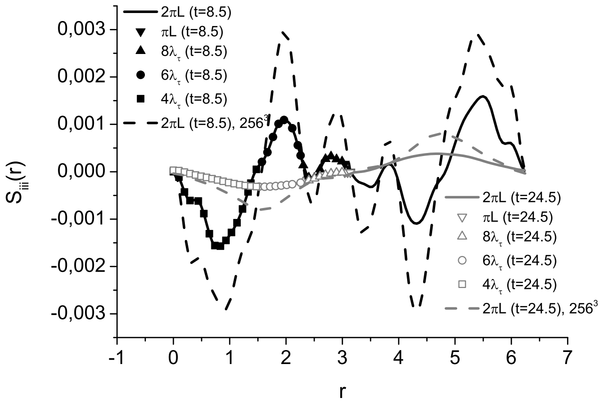
Существенным является вопрос о выборе размера области нахождения пространственных корреляций. Если эта область не достаточно велика, то расчёт пространственной корреляционной функции может быть неправильным [188]. Для прямого численного моделирования, если область усреднения правильно подобрана, то значения автокорреляционной функции будут оставаться практически неизменными при её дальнейшем увеличении. В общем случае автокорреляционная функция быстро спадает до нуля, затем может стать отрицательной и продолжить осцилляции в окрестности нуля. Указанные осцилляции могут как отражать структуру турбулентного течения, так и представлять собой «паразитное» (spurious) [189] явление в случае малого количества точек, взятого для определения автокорреляционной функции, при этом ошибка может превышать значение рассчитываемой величины.

Интегрирование автокорреляционной функции [188] (например, для определения интегрального масштаба) может проводится в различных диапазонах:

— по всей расчётной области;
— до минимального значения, если автокорреляционная функция имеет область отрицательных значений;
— только до первого нуля;
— значения, когда автокорреляция уменьшается в e раз.



(а)



(б)

Рисунок 4.20: Автокорреляционная функция продольных корреляций скорости $Q_{ii}(r)$ (а) в момент максимальной скорости диссипации $t = 8.5$ (чёрные линии, «заполненные» точки), а также стадии распада турбулентности ($t = 24.5$ — серые линии и «выколотые» точки)— обработка расчёта на сетке 128^3; результаты расчёта на сетке 256^3; двухточечный момент третьего порядка $S_{iii}(r)$ (б), характеристики расчёта совпадают с предыдущим. Также отмечен вклад, возникающий при интегрировании области различного размера: «$2\pi L$» — $r \in [0, 2\pi L]$; «πL» — $r \in [0, \pi L]$; «$8\lambda_\tau$» — $r \in [0, 8\lambda_\tau]$; «$6\lambda_\tau$» — $r \in [0, 6\lambda_\tau]$; «$4\lambda_\tau$» — $r \in [0, 4\lambda_\tau]$.

Если автокорреляционная функция не имеет минимального значения, а также участка отрицательных значений, то определение подходящей области интегрирования не представляется возможным.

Периодические ГУ также должны оказывать влияние на выбор размера области корреляции.

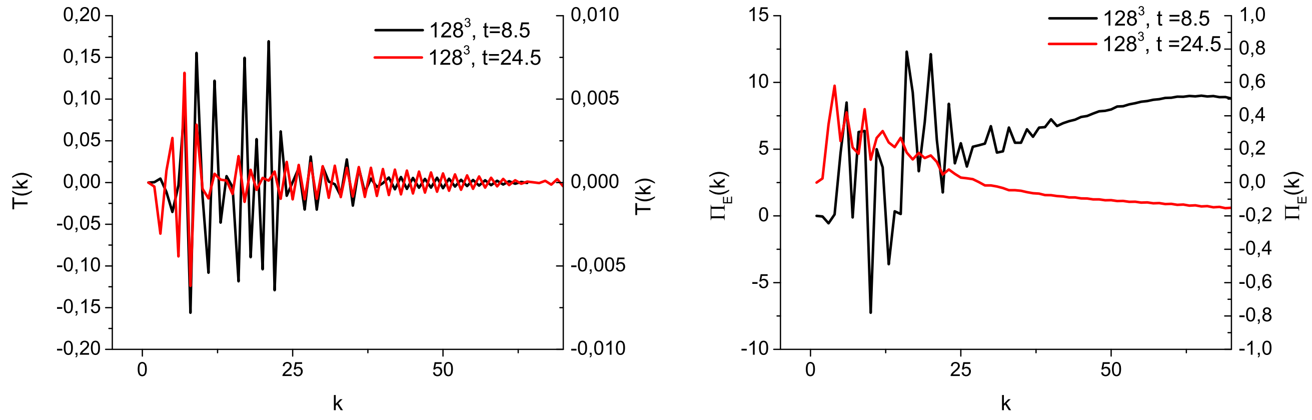
С практической точки зрения ($t \approx 10$, $\lambda_\tau/2\pi L \approx 0.06$) можно рассмотреть поведение продольных корреляционных функций $Q_{ii}(r)$, $S_{iii}(r)$ с различными корреляционными масштабами r (рисунки 4.20а-4.20б). Расчёты на сетке 128^3 в момент максимальной скорости диссипации ($t = 8.5$) показаны сплошными линиями, на стадии распада однородной изотропной турбулентности, в конце расчёта ($t = 24.5$) — точками; также отмечен результат для $r = 2\pi L$.

Результаты [188], а также собственные расчёты $Q_{ii}(r)$ и $S_{iii}(r)$, представленные на графиках рисунка 4.20, выполненные для момента времени максимальной скорости диссипации $t \approx 8.5$, а также на момент окончания расчёта $t \approx 24.5$, показывают, что периодические начальные условия имеют решающее влияние на форму автокорреляционной функции — она достигает значения, приближающегося к единице при увеличении расстояния между точками корреляции до размера расчётной области. Поведение кривых показывает сохранение корреляционной связи и периодических зависимостей в расчётной области, что существенно отличается от свойств однородной изотропной турбулентности.

Изменения поведения корреляционных функций при расчёте вклада с различных расстояний $r = 4\lambda_\tau, 6\lambda_\tau, 8\lambda_\tau, \pi L, 2\pi L$, где λ_τ — тейлоровский микромасштаб, выполненных на сетках 128^3 и 256^3, в случае продольной корреляции не обнаруживается. Кривая автокорреляции, полученная на самой густой сетке имеет ещё более резкое поведение (среднеквадратичные пульсации в одной точке ещё сильнее, а антикорреляция в центре области ещё больше). Данный эффект наблюдается и на участке затухания турбулентности, а также и для функции троичных корреляций.

Таким образом, полученные результаты отличаются от действительных свойств изотропной турбулентности, для которой автокорреляционная функция $Q_{ii}(r) \to 0$ при $r \to \infty$, и наблюдаемая в распаде вихря Тейлора–Грина турбулентность является неизотропной.

Тем не менее, приведем результаты расчёта спектрального переноса $T(k)$ и спектрального потока энергии $\Pi_E(k)$ (рисунок 4.21) в предположении изотропии турбулентного течения по форму-



(а) (б)

Рисунок 4.21: (а) — спектральный перенос $T(k)$ и поток энергии $\Pi_E(k)$ в ограниченном диапазоне волновых чисел $k \in [k_{\min}, n_X/2 \cdot k_{\min}]$ в момент максимальной скорости диссипации ($t = 8.5$ — левая шкала) и в момент окончания расчёта ($t = 24.5$ — правая шкала); обработка расчёта на сетке 128^3.

лам (4.45), проинтегрировав функцию троичных корреляций в диапазоне $r \in [0, \pi L]$, т.е. до половины области. Расчёты показывают, что $T(k)$ совершенно не похож на перенос в изотропной турбулентности. $T(k)$ на всем масштабе волновых чисел показывает существование осцилляций в области крупных вихрей при малых k, — без выраженного направления переноса, — а также «паразитные» осцилляции при больших k. Измельчение сетки до 256^3 характера $T(k)$ не меняют. Интегральный спектральный поток при вариации расчётной сетки (128^3 или 256^3) или времени ($t \approx 8.5$ или $t \approx 24.5$) имеет осциллирующий участок в диапазоне крупных вихрей, и гладкую часть в диапазоне больших $k > 30$.

Таким образом, в силу отсутствия изотропии можно провести расчёт спектрального переноса $T(k)$ и спектрального потока $\Pi(k)$ непосредственно из интеграла троичных взаимодействий мод, основываясь на фурье-образах полей скоростей.

4.3.7 Расчёт спектрального потока $T(k)$ и спектрального потока $\Pi(k)$ на основе интеграла тройных взаимодействий

Для определения спектрального переноса $T(k)$ и спектрального потока $\Pi(k)$ необходимо рассчитать тройные взаимодействия мод для обобщённого уравнения Кармана–Ховарта для однородной (но не изотропной) турбулентности. Данное уравнение записывается для следа спектрального тензора — Фурье-образа двоичных корреляций, — и получается способом, аналогичным нахождению цепочки уравнений Фридмана–Келлера для моментов скорости: в начале записываются уравнения для фурье-компонент $\hat{u}_i(\vec{k'})$ и $\hat{u}_j(\vec{k})$, которые затем домножаются на $\hat{u}_j(\vec{k})$ и $\hat{u}_i(\vec{k'})$, после этого два уравнения складываются и усредняются, затем проектируются на плоскость, ортогональную вектору $\vec{k}$. В результате получается уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \hat{U_{ii}}(\vec{k},t) = -P_{ijm} \int \Im[\langle \hat{u}_i(\vec{k}) \hat{u}_j(\vec{p}) \hat{u}_m(\vec{q}) \rangle d\vec{p} d\vec{q}], \qquad (4.46)$$

где P_{ijm} — проективный тензор.

Алгоритм расчёта спектрального потока $T(k)$ для некоторого момента времени $t = t_0$ выглядит следующим образом:

(1) нормировка полей скорости $\tilde{u}$,$\tilde{v}$,$\tilde{w}$ на характерную скорость U_0:

$$\tilde{u} = u/U_0,\ \tilde{v} = v/U_0,\ \tilde{v} = v/U_0, \tag{4.47}$$

(как и в предыдущих разделах, мы опустим знак «тильда» в дальнейшем изложении принимая во внимание, что речь идет о безразмерных переменных) нормировка дискретного множества волновых чисел:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x &\in \left[k_x^{\min},\, k_x^{\max}\right], \quad k_x^{\max} = n_{\mathrm{X}}/2, k_x^{\min} \\ \tilde{k}_y &\in \left[k_y^{\min},\, k_y^{\max}\right], \quad k_y^{\max} = n_{\mathrm{Y}}/2, k_y^{\min} \\ \tilde{k}_z &\in \left[k_z^{\min},\, k_z^{\max}\right], \quad k_z^{\max} = n_{\mathrm{Z}}/2k_z^{\min}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

на минимальные значения проекции волнового вектора:

$$k_x \in \left[1, \frac{n_{textX}}{2}\right], \quad k_y \in \left[1, \frac{n_{textY}}{2}\right], \quad k_z \in \left[1, \frac{n_{textZ}}{2}\right], \tag{4.49}$$

(2) выполнение трёхмерного преобразования Фурье для нормированных полей скоростей $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\vec{k}, t_0) &= \mathfrak{F}[u(\vec{x}, t_0)], \\ \hat{v}(\vec{k}, t_0) &= \mathfrak{F}[v(\vec{x}, t_0)], \\ \hat{w}(\vec{k}, t_0) &= \mathfrak{F}[w(\vec{x}, t_0)]; \end{aligned} \tag{4.50}$$

(3) для заданного трёхмерного волнового вектора $\vec{k}$ проводим расчёт двумерного проективного тензора:

$$P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2, \tag{4.51}$$

а также трёхмерного проективного тензора P_{ijm}:

$$P_{ijm}(\vec{k}) = k_m P_{ij}(\vec{k}) + k_j P_{im}(\vec{k}). \tag{4.52}$$

интеграл (4.46) рассчитывается только для таких взаимодействий, что $\vec{k} + \vec{p} + \vec{q} = 0$; считая, что $p_i > 0$, $q_i > 0$, должно выполняться соотношение для компонент векторов $\vec{k}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$:

$$k_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} = p_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} + q_{X\{,Y,Z\}}, \tag{4.53}$$

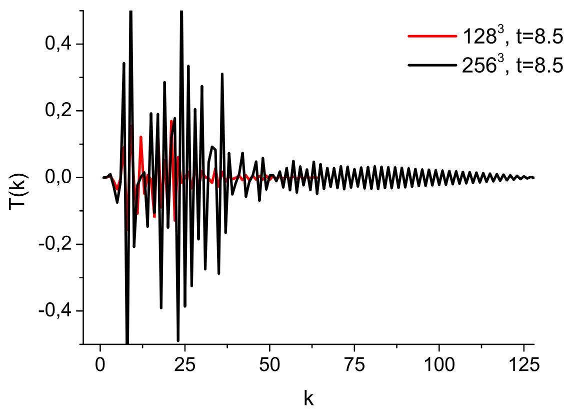
Тогда, для любого $k_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}}$, такого, что $k_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} \leqslant n_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}}/2$ выполняется $p_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} \in [1, n_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}}/2]$, $q_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} = k_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}} - p_{\mathrm{X}\{,\mathrm{Y},\mathrm{Z}\}}$.

Интеграл троичных взаимодействий сводится к суммированию по значениям координат вектора $\vec{p}$ и по повторяющимся индексам:

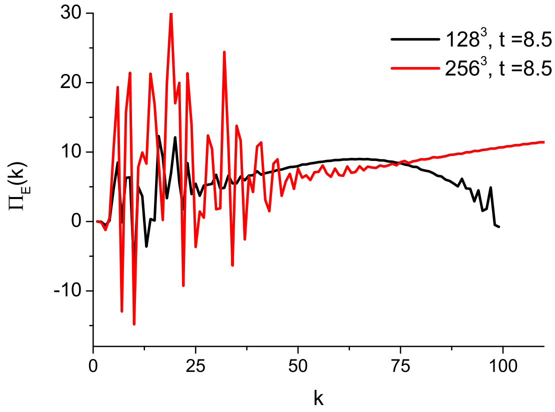
$$\int = -\Im\left[\sum_{p_{\mathrm{X,\,Y,\,Z}}} P_{ijm}(\vec{k}) \hat{u}_i(\vec{k}) \hat{u}_j(\vec{p}) \hat{u}_m(\vec{p}) d\vec{p} d\vec{q}\right], \tag{4.54}$$

где дифференциалы $d\vec{p}$, $d\vec{q}$ — представляют собой единичные кубики. Для каждого $\left(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q} = \vec{q}\left(\vec{k}, \vec{p}\right)\right)$ свертка по трем индексам насчитывает 27 слагаемых. В указанном случае мы не используем предположения о сферической симметрии, так оно предполагает изотропию турбулентности, и в данном случае вряд ли выполняется.

Объяснить полученные результаты (рисунок 4.22) можно, оценив характерные масштабы турбулентности, воспользовавшись соотношениями для изотропного случая. В случае однородной изотропной турбулентности справедлива связь между тейлоровским микромасштабом λ_τ и интегральным масштабом Λ.



(а)



(б)

Рисунок 4.22: Спектральный перенос $T(k)$ (а) и спектральный поток $\Pi_E(k)$ (б) как функции волнового числа, рассчитанные на основе интеграла тройных взаимодействий мод на сетках 128^3 и 256^3 ячеек в момент максимальной скорости диссипации.

Предполагая существование некоторых свойств однородной изотропной турбулентности, получим:

$$\lambda_\tau/\Lambda \sim \sqrt{\frac{15}{\mathrm{Re}}} = \sqrt{\frac{15}{1600}} \approx 0.096. \tag{4.55}$$

Таким образом, масштабы отличаются практически на порядок. При том же предположении рассчитаем тейлоровский микромасштаб по формуле:

$$\lambda_\tau^2 = \frac{15\nu\langle u^2\rangle}{\varepsilon}, \quad \langle u^2\rangle = E/3, \tag{4.56}$$

где E — интегральная кинетическая энергия. Формула (4.56) в безразмерных переменных представляется как

$$\hat{\lambda}_\tau^2 = \frac{15\nu\langle u^2\rangle}{\varepsilon(2\pi L)^2}. \tag{4.57}$$

График этой величины представлен для $\mathrm{Re} = 1600$ и $\mathrm{Re} = 4000$ на рисунке 4.23, его значения следует рассматривать с момента времени установления максимальной скорости диссипации $t \geqslant 9$, когда генерируется развитое турбулентное течение. Зависимость $\lambda_\tau = \lambda_\tau(t)$ для $\mathrm{Re} = 1600$ (рисунок 4.23) показывает, что $\hat{\lambda}_\tau = \lambda_\tau/2\pi L \sim 0.07$ на этапе затухания турбулентности, что в целом согласуется с безразмерной оценкой (4.55).

Согласно ремаркам [2] для того, чтобы получить удовлетворительные спектральные характеристики в диапазоне малых и средних волновых чисел необходимо потребовать $2\pi L > 20\Lambda \to 40\Lambda$. В данном случае мы имеем:

$$\lambda_\tau/\Lambda \sim 0.096, \quad \lambda_\tau/(2\pi L) \sim 0.07, \tag{4.58}$$

что даёт

$$\Lambda/(2\pi L) \sim \frac{0.07}{0.096} \sim 0.7. \tag{4.59}$$

Таким образом, представленные результаты не могут соответствовать теории изотропной турбулентности, т.к. интегральный масштаб Λ сопоставим с размером расчётной области, вероятно, в силу особенностей постановки задачи.

Рассмотрим вопрос о том, сколько ячеек используется для моделирования тейлоровского микромасштаба λ_τ, находящегося «где-то по середине» между интегральным Λ и колмогоровским масштабами турбулентности η.

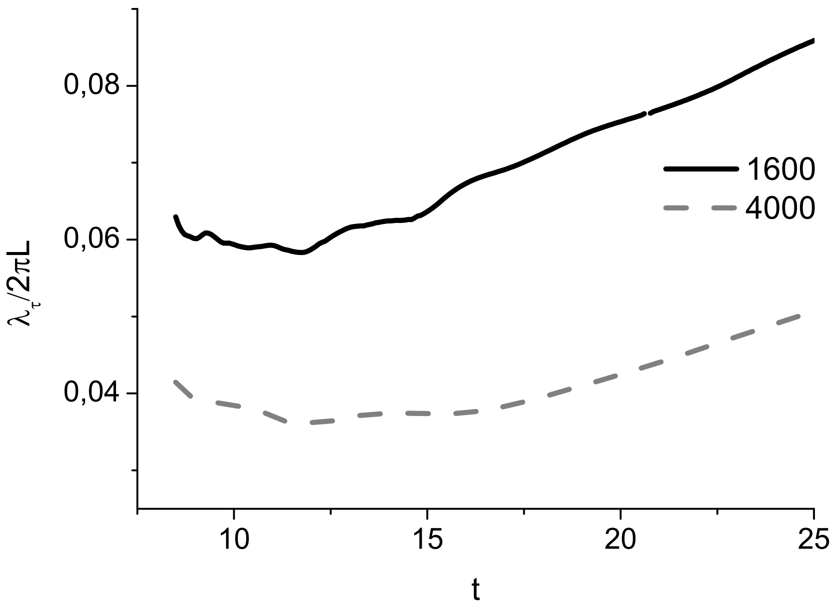


Рисунок 4.23: Зависимость тейлоровского микромасштаба λ_τ, приведённого к размеру расчётной области $2\pi L$, для чисел Рейнольдса, соответствующих турбулентному режиму, сетка 256^3, $t = 8.5$.

Таблица 9: Количество точек, на которых моделируется тейлоровский микромасштаб и интегральный масштаб.

n_X	64	128	256
λ_τ	4	9	18
Λ	46	94	187

Учитывая, что $\lambda_\tau \sim 0.06 \ldots 0.08 \times 2\pi L$, получим характерные количества ячеек (см. таблицу 9).

Скорее всего, такого количества точек совсем не достаточно для набора статистики в вихрях инерционного интервала. Используя формулу (4.55) и данные рисунка 4.23 нетрудно дать более точную оценку количества ячеек, на котором моделируется интегральный масштаб (также см. таблицу 9). Для колмогоровского микромасштаба $\Lambda/\eta = \mathrm{Re}^{3/4} = 1600^{3/4} \approx 253$, таким образом, он не разрешаем на любой из использованных расчётных сеток. В схеме КАБАРЕ сильное демпфирование испытывают вихри размером менее 4–5 ячеек, т.о., в лучшем случае (256^3) качественно разрешается только верхняя часть инерционного интервала.

4.3.8 Заключение

Задача Тейлора–Грина оказывается невероятно полезной, так как даёт возможность проверить численный метод на течении, отличающемся сложной эволюцией вихревого поля, которая сопровождается образованием разномасштабных вихревых структур и их нелинейным взаимодействием. Конечно-разностный явный метод КАБАРЕ, имеющий формально второй порядок точности по времени и по пространству, рассматривается в сравнении с другими типами численных методов, — квазигидродинамическим подходом, спектральным и проекционно-сеточным методом Галеркина, — заведомо имеющими в данной задаче преимущество. Схема КАБАРЕ, отличающаяся значительной универсальностью, не уступает другим подходам, как в части воспроизводства вихревых структур при ламинарном и турбулентном распаде, так и интегральных параметров. Установлено, что на грубых стеках значения скорости диссипации, полученные из энстрофии, существенно ниже результатов непосредственного расчёта. Благодаря простому методу сравнения можно заключить, что механизм численной диссипации не в полной мере повторяет реальный физический процесс. Таким образом, использованный численный метод следует относить к группе ILES-методов, надеясь, что свойство диссипативности позволит не использовать модели подсеточной вязкости на неразрешаемых масштабах. В вопросе разрешения вихревых структур переход на более мелкие сетки может оказаться более результативным в сравнении с использованием усложненных численных методов высокого порядка точности. Рассматривая процесс распада турбулентности можно выявить влияние искусственных (с физической точки зрения) периодических граничных условий: именно они определяют закон убывания турбулентной кинетической энергии на больших временах эволюции, в то время как согласно классическим представлениям такое турбулентное течение должно забывать свое начальное состояние.

Энергетический спектр течения в момент максимума скорости диссипации демонстрирует приближение к асимптотике «-5/3», вместе с тем, имеет место существенное демпфирование высокочастотной части спектра. Рассмотрение пространственных корреляционных функций обосновано пространственной хаотизацией вихревого поля и позволяет установить общую антикорреляционную зависимость между областями сильной завихренности и давления.

В отличие от спектральных методов, где разрешение может достигать нескольких тысяч членов разложения в одном направлении, методы конечных разностей ограничивается существенно меньшим значением. В результате, чтобы реализовать достаточно подробные спектры, необходимо уменьшать толщину сферических оболочек, по которым проводится усреднение. В итоге, мы используем очень тонкие сферические оболочки, которые дают «дрожащие» спектры.

Измельчение толщины (ширины сферических оболочек) Δk не позволяет устранить «паразитные» осцилляции в спектрах: при $\Delta k < \delta k$ — увеличивается число участков спектра, на которые в среднем статистически приходится менее одного слагаемого, тогда как $\Delta k > \delta k$ приводит к изменению асимптотики спектра следствие усреднения [186].

Турбулентность, возникающая при распаде вихря Тейлора–Грина является однородной, но неизотропной. С первым свойством связана эквивалентность усреднений по ансамблю и по пространству. Со вторым — невозможность прямого применения обобщений, развиваемых в изотропной турбулентности (в частности, предположение о сферической симметрии, использованное при усреднении спектра с весовыми коэффициентами [186]).

Расчёт корреляционных функций и величин, которые можно построить на их основе в предложении изотропной турбулентности, вероятно, не даёт сколько-нибудь плодотворных результатов по трем причинам:

1) Периодичность, использованная при задании начальных условий, подразумевает анизотропию на крупных масштабах. Действительно, в случае течения Тейлора–Грина мы имеем набор дискретных одинаковых течений, которые взаимовлияют друг на друга, так как события на одной грани куба оказываются абсолютно коррелированными с событиями на противоположной. Таким образом, турбулентность в кубике не может быть частью «большой» изотропной турбулентности.

2) Размеры расчётной области сопоставимы с интегральным масштабом турбулентности. В результате вряд ли что-либо можно сказать о поведении корреляционной зависимости в области «больших» масштабов r, если $L \leqslant 8\Lambda$ [2].

3) Достаточно малое количество точек сетки по сравнению со спектральными методами приводит к плохому разрешению при больших волновых числах.

Глава 5. Моделирование сдвиговых течений термовязкой жидкости

5.1 Исследование процессов перемешивания в плоском течении термовязкой жидкости

5.1.1 Постановка задачи

Профиль скорости ТВЖ, обладающий точкой перегиба (см. Раздел 2.1) и оказывающийся неустойчивым (см. Раздел 2.3), может иметь решающее влияние на процесс крупномасштабного смешения, причём сам этот процесс будет усиливаться по мере пространственного развития течения и напрямую не связан с генерацией возмущений в пристеночных областях. С целью проверки этого утверждения рассматривается плоскопараллельное течение ТВЖ с заранее установившимся линейным распределением температур. В качестве начального условия используется аналитически найденный профиль продольной скорости, остающийся стационарным благодаря заданию постоянного линейного градиента давления по длине канала. Значение безразмерного параметра α выбиралось таким, чтобы точка перегиба была удалена от стенок, а высокоскоростное ядро потока не слишком сильно приближалось к пристеночной области. Выбор подобной постановки задачи связан с тем, что время установления несимметричного профиля скорости является резкой функцией параметра α и при $\alpha \to 0$ соответствует течению Пуазейля. К сожалению, использование линейного распределения температуры не позволяет избежать многократного рутинного решения задачи установления течения. На боковых стенках канала задаётся условие постоянства температуры и прилипания жидких частиц. В качестве условия на входе задаётся то же известное распределение скорости поперёк канала, а также величина статического давления. По заданным значениям производится расчёт инварианта первого рода, приходящего на граничные потоковые ячейки из бесконечности. Инвариант второго рода, приходящий от выходного сечения, позволяет определить значения потоковых переменных на входной границе. В конце канала ставится условие постоянного статического давления, необходимое для поддержания постоянного перепада. Разность условных температур стенок выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимальный диапазон изменения динамической вязкости поперёк канала с начальным значением μ_0 у холодной стенки. Безразмерный профиль скорости подсказывает характер подобия при изменении перепада давления, размеров канала, константы вязкости.

Таблица 10: Список определяющих параметров для определения изменения картины течения от частоты возмущения ν

Название параметра	Обозначение	Значение	Название параметра	Обозначение	Значение
скорость звука	c	0.03	реперная вязкость	μ_0	0.01
реперная температура	T_0	127.0	показатель экспоненты	β	-2.3
длина канала	L_X	8.0	ширина канала	L_Y	0.4
перепад давления	Δp	5×10^{-4}	реперная плотность	ρ_0	1000.0
теплопроводность	λ	0.3	теплоемкость	c_p	2000.0
число ячеек по оси X	n_X	520	число ячеек по оси Y	n_Y	200
число Куранта	CFL	0.15	относительная амплитуда возмущений	a	0.075
Температура на нижней стенке	T_1	127	Температура на верхней стенке	T_2	273

Расчёты проводятся в размерных переменных, результаты же представляются в безразмерной (или приведённой) форме без потери общности. Это обусловлено удобством постановки задачи и сложностью выбора безразмерной комбинации физических величин, характерные значения которых однозначно связаны со свойствами течения. В дальнейшем мы будем рассматривать семейство подобных профилей скорости с точкой перегиба при числах Рейнольдса Re, соответствующих различным перепадам давления. Данный безразмерный параметр можно определить несколькими различными способами, с учётом того, какая из входящих в него величин зависит от координаты поперёк канала:

– $\mathrm{Re}_1 = \frac{U^* L_Y \rho_0}{\mu^*}$, где U^* — локальная скорость, L_Y — ширина канала, ρ_0 — характерная плотность, $\mu^* = \mu(y)$ — локальная динамическая вязкость.
– $\mathrm{Re}_2 = \frac{U L_\mathrm{Y} \rho_0}{\mu^*}$, где U — среднемассовая скорость, L_Y — см. выше, ρ_0 — см. выше, μ^* — см. выше;
– $\mathrm{Re}_3 = \frac{U^* y^* \rho_0}{\mu^*}$, где U^* — см. выше, μ^* — см. выше, y^* — расстояние от стенки, причём, это число определяется в области $|L_\mathrm{Y} - y^*| \leqslant 0.15$.

В качестве одной из характерных величин выступает толщина слоя смешения, возникающего вследствие распространения колебаний поперечной скорости, распространяющихся от входного сечения вниз по потоку. Возбуждение потока на определённой частоте позволяет управлять процессом развития неустойчивости в пространстве и носит название форсинга (forcing) [180]. Такая постановка позволяет лучше привязать предсказания пространственной теории к результатам экспериментов, в которых частота возбуждения ν — действительное число, а волновой вектор $\vec{k}$ может иметь и комплексную часть. Указанное одномодовое возмущение задаётся для потоковых переменных на входе в виде $v = -aU_\mathrm{max}\sin(2\pi\nu t)$, где ν — частота возмущения, t — расчётное время, a — относительная амплитуда, U_max — максимальное значение продольной скорости в сечении канала. В результате наложения возмущений на основной поток образуются когерентные структуры, рассматриваемые в том смысле, что их время жизни и пространственный размер превосходит интегральный масштаб турбулентности [190]. В выполненных расчётах число Re_2 варьируется в достаточно широких пределах до $\mathrm{Re}_2 \sim 10^5$. Таким образом, на отдельных участках сечения должна наблюдаться некоторая иерархия вихрей различных масштабов, возникающих вследствие эволюции когерентных структур.

Параметризация процесса уноса и смешения слоёв жидкости, обладающих различной температурой, необходима для разработки общих моделей турбулентности [70], и может быть проведена на основе толщины слоя смешения в различных точках по ширине канала. Толщина слоя оказывается функцией числа Рейнольдса, определяемого по одному из трёх перечисленных выше способов, частоты возмущения, его амплитуды, теплопроводности жидкости. Интересно проследить за изменением процесса смешения, наблюдаемым при различных частотах для возмущений с достаточно сильной амплитудой (см. таблицу 11). Следует отметить, что процесс увлечения частиц в слои с другой температурой особенно силен в окрестности токи перегиба (изолиния i^*), а не в точке максимума скорости или в пристеночном слое. Из приведённого описания также следует, что для всякого набора начальных параметров существует частота, соответствующая максимальной скорости процесса смешения. Такую частоту в дальнейшем будем считать резонансной.

Теперь перейдем к описанию поведения течения в случае создания колебаний произвольной частоты для поперечной скорости. Мы будем рассматривать только гидродинамическую моду возмущения, таким образом, частота должна быть ограничена максимумом, за которым уже начинается диапазон акустических колебаний (в размерных величинах, например, — $\nu = 20$ Гц) и влияние конечной сжимаемости $\Delta\rho/\rho \propto 1/\mathrm{M}^2 = 0.01$. При поиске резонансной частоты для набора начальных данных задавалось некоторое произвольное значение ν_1, которое потом корректировалось до ν_2 с учётом процесса распространения возмущений. Было установлено, что, если выбранная частота оказывалась слишком большой, то происходило её затухание на длине $L_\mathrm{Y}/L_\mathrm{X} \approx 5$ калибров. По мере подстройки частоты к резонансной происходит увеличение глубины проникновения возмущений до расстояния $L_\mathrm{Y}/L_\mathrm{X} \approx 8$ калибров, на котором более высокочастотное, а значит мел-

Таблица 11: Зависимость картины смешения в окрестности точки перегиба от частоты при движении к резонансу из низкочастотной области

Значение частоты в долях резонансной	Картина смешения
$1/5\nu_2$	На расстоянии 10 калибров от входа наблюдаются мощные апериодические возмущения, пространственные гармоники наблюдаются слабо.
$2/5\nu_2$	Разрушения потока на середине длины канала носят слабо периодический характер. Пространственная форма возмущений является не гармонической (по крайней мере в зоне перегиба). В оконечности трубы иногда наблюдаются небольшие периодические структуры, на которые накладываются хаотические колебания.
$3/5\nu_2$	Возникают крупные валы с перемешиванием, деформации профиля температуры становятся слабее.
$4/5\nu_2$	Возникают правильные крупномасштабные структуры.
ν_2	Происходит переход к возмущениям гармонической формы, с гребней которых иногда срываются мелкие моли жидкости и уносятся слоями с другой температурой.

комасштабное, возмущение затухает, что, в месте с тем, приводит к генерации более длинной волны, которая соответствует одной из собственных частот. Как показало одномерное преобразование Фурье, проведённое по длине канала в слое с самой сильной амплитудой, все получаемые длины волн соответствуют собственным колебаниям. Таким образом, по длине канала всегда укладывается целое число длин волн. Наиболее сильные из них соответствуют околорезонансной зоне. Генерация гармоник, связанных с размерами расчётной области (но не зависящих от параметров расчётной сетки) является характерным отличием всех численно решаемых задач от лабораторных и натурных экспериментов. Полученные данные позволяют приблизительно определить значение резонансной частоты при данном числе Рейнольдса. Резонансная или квазирезонансная частота позволяет генерировать наиболее сильные возмущения и является некоторой функцией скорости потока, которая в свою очередь зависит от перепада давления по длине канала. По результатам серии запусков была установлено, что резонансная частота есть линейная функция Δp, причём возрастание скорости потока приводит к увеличению числа наблюдаемых мод колебаний.

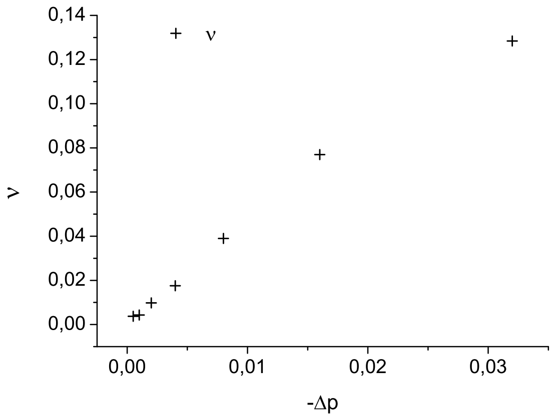
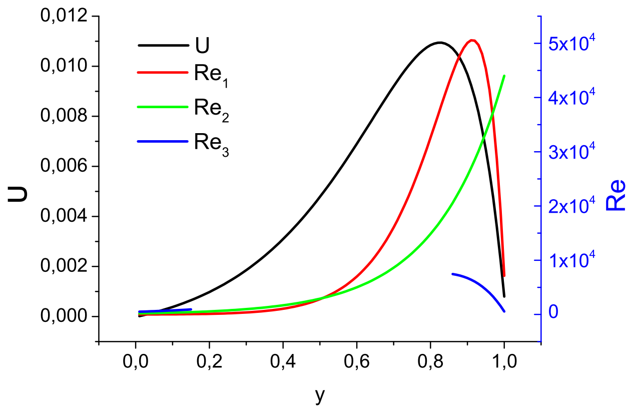


Рисунок 5.1: Зависимость резонансной частоты от перепада давления

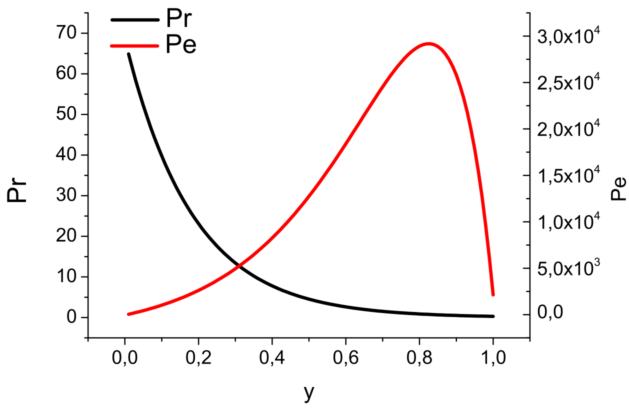
5.1.2 Исследование исследование сеточной сходимости течения

Рассмотрим вопрос о сходимости течения на последовательности сгущаемых сеток. Сделанные выводы помогут определить размер сетки, подходящей для массового счёта при различных амплитудах возмущения и значениях числа Прандтля, сообразуясь с требованием достаточной точности и ограниченности вычислительных ресурсов. Анализ сходимости на последовательно сгущаемых сетках ограничен следующим набором: 512×128 (1), 2048×184 (2), 1024×256 (3), 2048×512 (4).

Результаты серии расчётов, представленные на рисунке 5.3 показывают, что вихревые структуры отличаются на конечном участке канала, причём особенно сильны различия при сгущении сетки от 184 до 256 ячеек поперёк канала. В то время как переход от сетки (3) к сетке (4) происходит не столь радикально. На примере расчёта на сетке 2048×184 ячеек, качество которых, измеряемое соотношением сторон, существенно лучше, показано, что более детального разрешения вихревых структур не достигается. Стоит также отметить, что крупномасштабные вихри не производят окончательного разрушения течения, вероятно, процесс перекачки энергии от основного течения к возмущению происходит не столь интенсивно. При числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 2000$ действительно должен [3] происходить переход к турбулентному течению в трубе, вместе с тем, смесительный переход (mixing transition) имеет место при гораздо больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$ и тейло-



(а)



(б)

Рисунок 5.2: (а) — распределение скорости, чисел Рейнольдса; (б) — Прандтля и Пекле в поперечном сечении канала.

ровском числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\lambda_\tau} = 150$–$200$ [191]. Объяснение этого факта, возможно, стоит искать в особенностях двумерной турбулентности, возбуждаемой под действием низкочастотного форсинга.

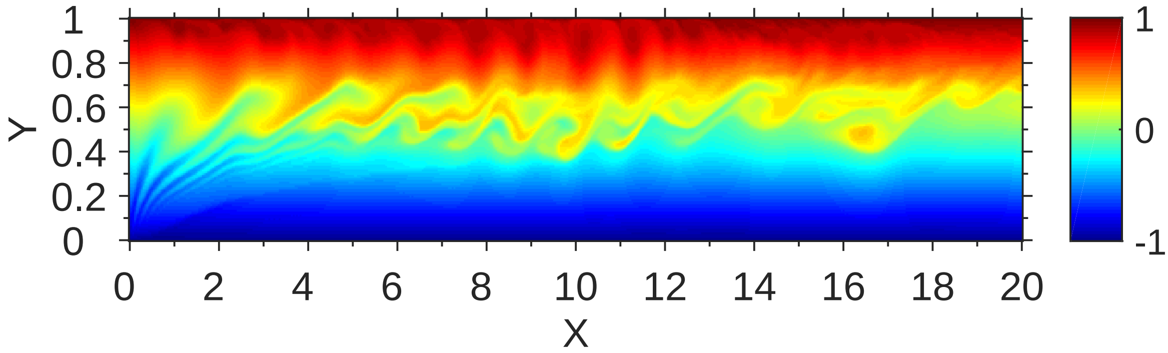
Крупномасштабный захват слоев жидкости с различной температурой происходит на дистанции 10 калибров с образованием больших клубов, что хорошо видно на поле условной температуры. Поперечный перенос T, являющейся «активным» (по воздействию на основное течение) скаляром вследствие резкой температурной зависимости динамической вязкости жидкости, особенно силен в области точки перегиба. Однако и в пристеночной области с большей температурой образуется система вихрей размером, составляющим около 1/3 размера крупномасштабных «клубов». Ниже приведены поля относительных ошибок консервативной переменной T на различных сетках, взятые в момент времени $t = 134.375$. Характерной особенностью является существенная ошибка ε вычисления захваченных молей менее вязкой жидкости, которые скручиваются в спирали (см. рисунок 5.4). Указанная знакопеременная величина определяется как

$$\varepsilon = \frac{[T]_\mathrm{f} - [T]_\mathrm{c}}{[T]_\mathrm{f}}, \tag{5.1}$$

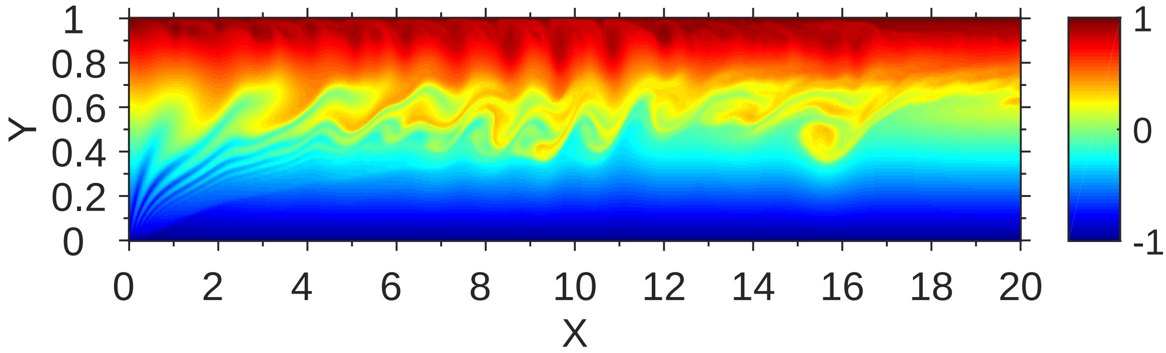
где $[T]_\mathrm{f}$ и $[T]_\mathrm{c}$ — сеточные функции температуры на более мелкой и грубой сетках соответственно.

Задача оказывается достаточно ресурсозатратной, вместе с тем, при переходе к более мелким сеткам появления мелкомасштабных вихревых структур не наблюдается.

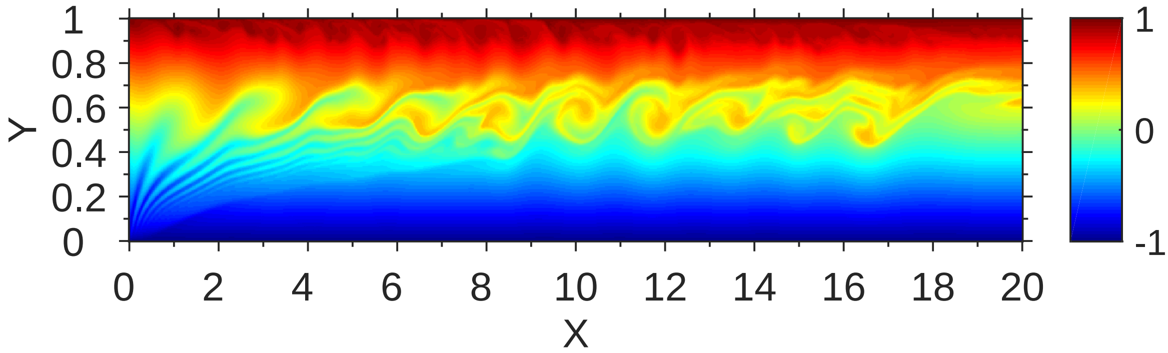
Зависимость относительной ошибки в распределении поля температуры на даёт особого оптимизма в вопросе сходимости: действительно, существенное увеличение количества расчётных ячеек по длине канала не слишком сильно повышает точность расчёта, напротив, большее влияние имеет количество точек поперёк канала, при этом сохраняется достаточно большая ошибка в слое смешения (25%), что объясняется смещением положения слоев с различной температурой на сгущающихся сетках. При сравнении сеток (3) и (4) оказывается, что основное различие связано со степенью закрученности «клубов» (billows) жидкости в слое смешения, однако, существенного увеличения его ширины не происходит. Таким образом, адекватным представляется расчёт на сетке, содержащей порядка 256 ячеек поперёк канала. Это также продиктовано скоростью роста вычислительного объёма задачи как 2^3 при измельчении сетки.



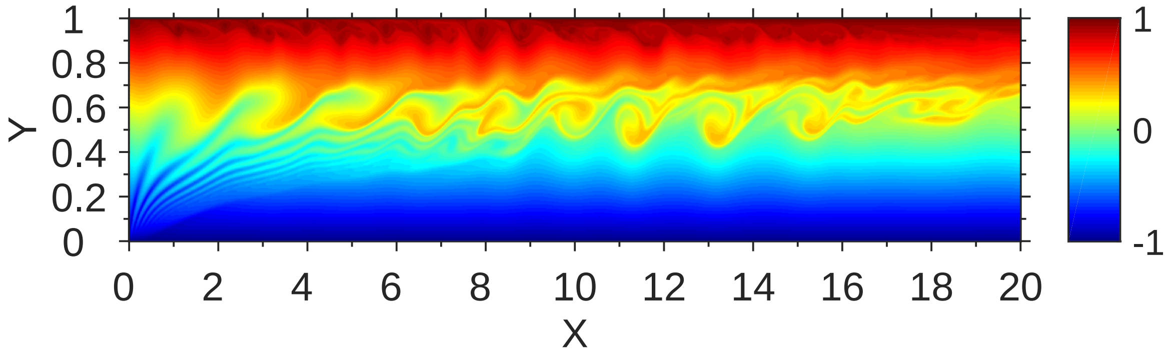
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 5.3: Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени $t = 134.375$. Значение температуры у нижней стенки в безразмерных единицах $T = -1$, у верхней стенки $T = 1$, расчёт на сетке: (а) — 512×128, (б) — 2048×184, (в) — 1024×256, (г) — 2048×512 ячеек.

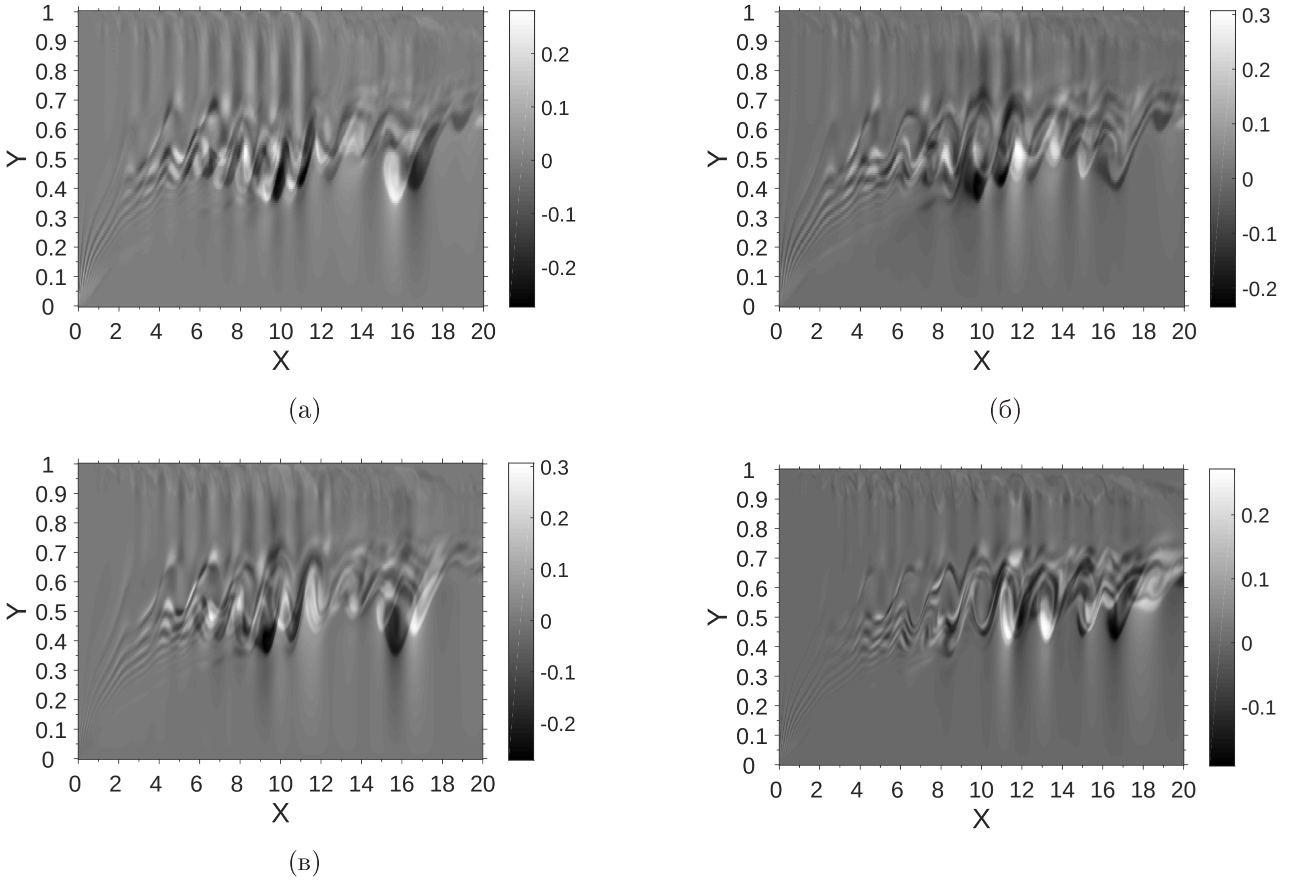


Рисунок 5.4: Поле относительной ошибки температуры в момент времени $t = 134.375$ при расчётах с различным количеством ячеек в поперечном сечении канала: (а) — сетка (1) относительно сетки (2); (б) — сетка (1) относительно сетки (3); (в) — сетка (2) относительно сетки (3); (в) – сетка (3) относительно сетки (4).

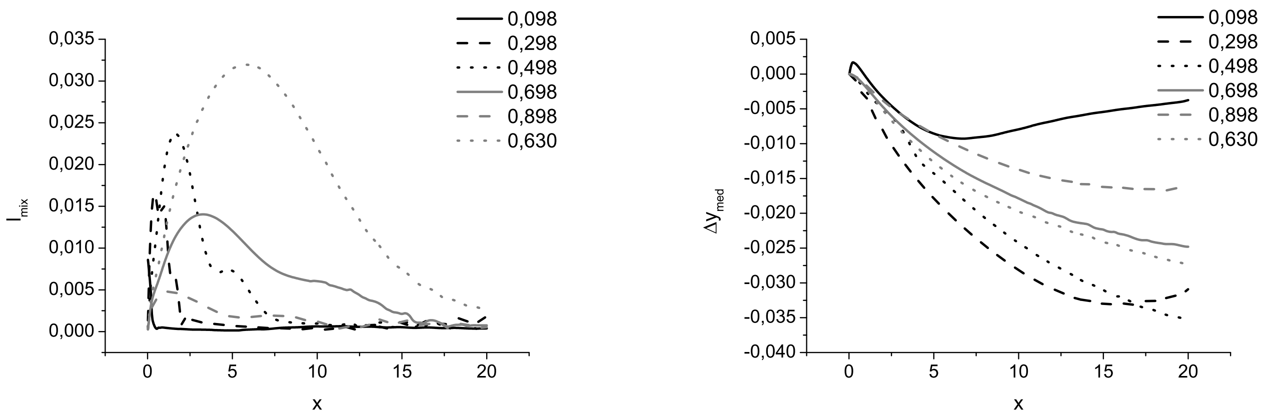
5.1.3 Зависимость картины течения от амплитуды

В проводимой серии расчётов в окрестности точки перегиба реализуется переходный режим течения с числом $\mathrm{Re}_1^{i^*} \approx \mathrm{Re}_2^{i^*} \approx 2000$, таким, что возмущения распространяющиеся слева от точки перегиба должны затухать, а справа – нарастать. Зависимость амплитуды возмущений описывается формулой

$$V(t) = -a \max_{y \in [0,1]} U(y) \sin(2\pi\nu t), \tag{5.2}$$

где $\max_{y\in[0,1]} U(y)$ — максимальное значение продольной компоненты скорости (основной профиль), a — относительная амплитуда возмущения, изменяемая в данной серии расчётов. Всего использовалось четыре значения амплитуды $a = 0.009375$; 0.01875; 0.0375; 0.075. Для получения характеристик о ширине слоя вовлечения производилось осреднение изолиний температуры после завершения процедуры установления течения. Всего использовалось шесть изолиний температуры, пять из которых равноудалены друг от друга $y = 0.098$, 0.298, 0.498, 0.698, 0.898, ещё один контур строится в окрестности точки перегиба (далее обозначается как изолиния i^*).

Для самой малой из исследованных амплитуд $a = 0.09375$ видимое нарастание возмущения происходит только в зоне точки перегиба, оно достигает максимума при $L_\mathrm{X}/L_\mathrm{Y} \approx 2$–$6$, а затем затухает на дистанции $L_\mathrm{X}/L_\mathrm{Y} \approx 8$–$16$. Вследствие вязкой стратификации средние линии контуров температуры несколько отклоняются в сторону более холодной стенки. Этот процесс особенно заметен на среднем участке течения, относительное смещение средней линии в данном случае не превышает $\Delta y_{\text{med}} = 0.04$. Наиболее сильное нарастание толщины слоя крупномасштабного смешения соответствует $y = 0.63$ (серый точечный график на рисунке 5.5), причём интенсивность вовлечения в слоях $y = 0.63$, $y = 0.698$, $y = 0.898$ обладает некоторым подобием. В зоне высоковязких слоев происходит быстрое гашение амплитуды возмущения, несмотря на резкий начальный рост. При описании развития неустойчивости в слое смешения, можно использовать понятия абсолютной



(а) (б)

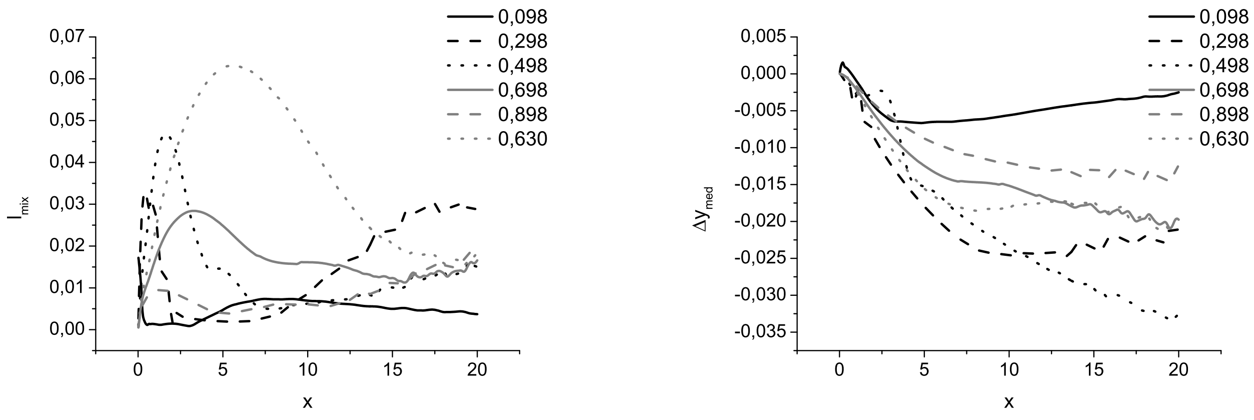
Рисунок 5.5: Осреднённый значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $a = 0.009375$.

неустойчивости и конвективной неустойчивости [133], которые реализуются в свободных сдвиговых течениях при различном соотношении скоростей $R = \Delta U / 2\bar{U}$, где ΔU есть разность скоростей между двумя спутными потоками, $\bar{U}$ — их средняя скорость. Для абсолютно неустойчивых течений развитие возмущения во времени в некоторой точке потока приводит к экспоненциальному росту во всей расчётной области. Напротив, в конвективно неустойчивых течениях перенос возмущения синхронизирован с ростом его амплитуды, в результате чего основной поток остаётся невозмущенным [180]. Действительно, в окрестности точки перегиба, для которой происходит сначала рост амплитуды слоя смешения, а затем её последовательный спад, выполняется условие существования конвективной неустойчивости $R < 1.1315$.

Для промежуточной амплитуды ($a = 0.01875$) видимое нарастание возмущения происходит только в зоне точки перегиба и имеет тоже самое поведение, что и для меньшей амплитуды. Однако на дистанции ($L_X/L_Y \approx 12$–18) происходит рост слоя вовлечения при $y \approx 1/3$ и $y \approx 0.9$ калибра, находящий слое отражение на графиках рисунка 5.6.

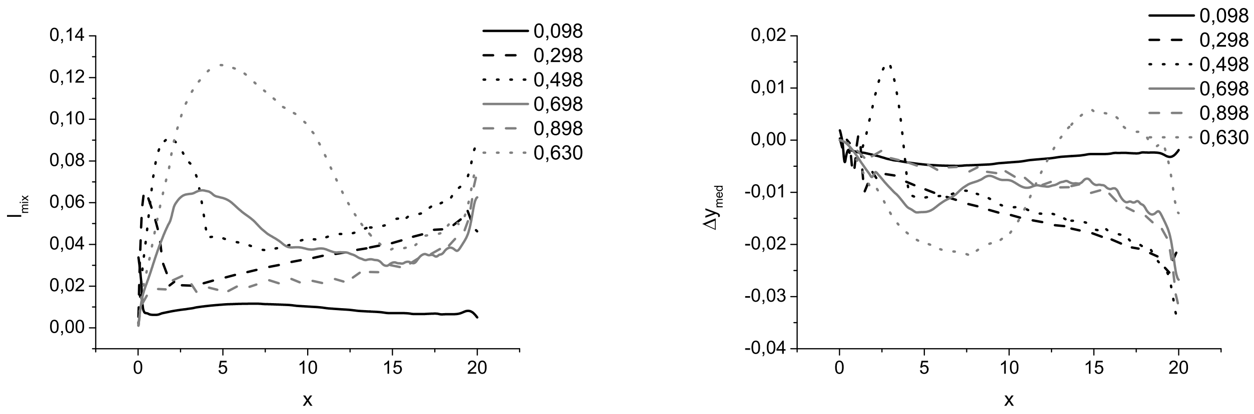
При увеличении амплитуды до $a = 0.0375$ свертывания возмущения в регулярные «клубы» не происходит: при $L_X/L_Y \approx 2$ наблюдается рост амплитуды возмущения с сохранением гармонической формы, затем высота гребня (ribbon) остаётся практически постоянной без вовлечения новых слоёв жидкости на отрезке $L_X/L_Y \approx 3$–8; в оконечности канала ($L_X/L_Y \approx 9$–20) возмущение затухает, что выражается в практически полном рассеянии гребня. При $a = 0.0375$ в момент времени $t = 244.0$ (см. рисунок 5.7) начинается развитие смешения в слое $y \approx 0.3$ и в пристеночной области у горячей стенки, где на дистанции 14–20 калибров ко времени $t = 272.548$ начинается сворачивание «клубов» неустойчивости. Это приводит к усилению возмущения во всех слоях и к появлению немонотонности на всех графиках с $L_X/L_Y \approx 3$–8, несмотря на то, что возмущения изолинии i^* к этому моменту ослабевают.

Усреднённое по времени поведение температурных изолиний имеет разную динамику: пристеночная «холодная» изолиния никуда не смещается, линии слева от точки перегиба сильнее всего вовлекаются в холодное течение $\Delta y_{\text{med}} \approx -0.04$, справа — подобным же образом, но до $\Delta y_{\text{med}} \approx -0.03$. отклонение изолинии i^* имеет сильную немонотонность — сначала поток втягивается в область холодного течения, а затем — в область горячего. При росте амплитуды



(а) (б)

Рисунок 5.6: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $a = 0.01875$.

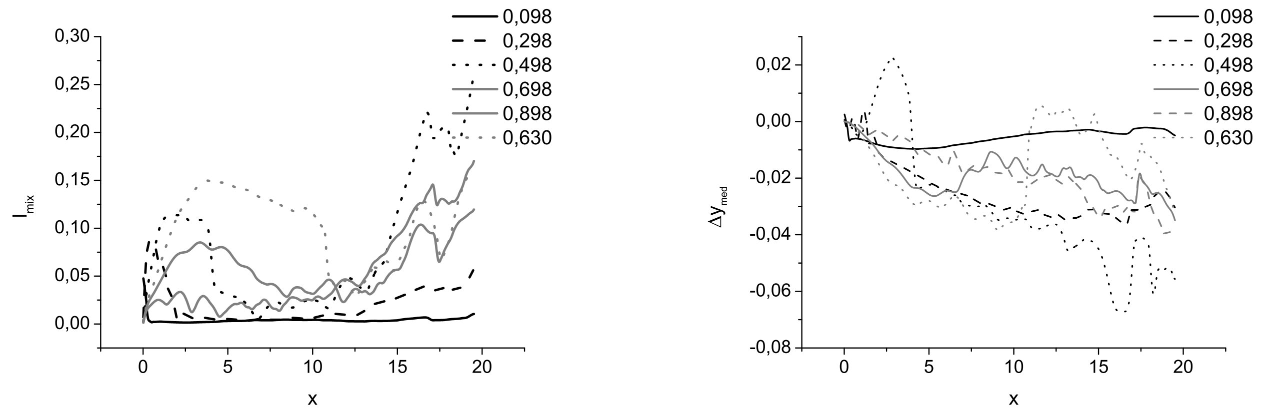


(а) (б)

Рисунок 5.7: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $a = 0.0375$.

возбуждения до $a = 0.05$ на участке 6 калибров начинается сворачивание клубов более горячей и менее вязкой жидкости. Вовлечения более холодной жидкости в ядро потока практически не происходит. На половине длины канала начинается возвратное движение клуба к ядру потока, который при $L_X/L_Y \approx 12$–15 практически сливается с жидкостью той же температуры. Одновременно моли холодной жидкости медленно «выдавливаются», в целом же, это приводит к уширению слоя смешения в оконечности канала. Изолинии слоя смешения (см. рисунок 5.8) обладают поведением, схожим с предыдущим случаем, однако, значения l_{mix} практически для всех кривых увеличиваются в два раза на дистанции $L_Y/L_Y > 12$. В области 10 калибров спад становится ещё более резким, вследствие более быстрого возвратного движения. Графики средних значений изолиний Δy_{med} отличаются схожим поведением, но более подвержены осцилляциям.

При наложении квазирезонансной частоты картина течения после завершения переходных процессов при ($a = 0.075$) имеет следующий характер: на расстоянии $L_X/L_Y \approx 1$–2 происходит рост амплитуды возмущений температурного поля. Чем дальше поперёк канала продвигаются слои маловязкой жидкости, тем с меньшей скоростью они движутся в продольном направлении. На участке $L_X/L_Y \approx 3$ горячая часть гребня, расположенная ближе к основному ядру потока, начинает обгонять его вершину, что приводит к вытягиванию и искривлению структуры вдоль по потоку. Одновременно при $L_X/L_Y \approx 4$ нижележащие слои медленно движущейся жидкости оказываются в состоянии «противофазы», что приводит к началу возвратного движения. Такой же процесс происходит и в высокоскоростном ядре потока, там более холодные слои жидкости также

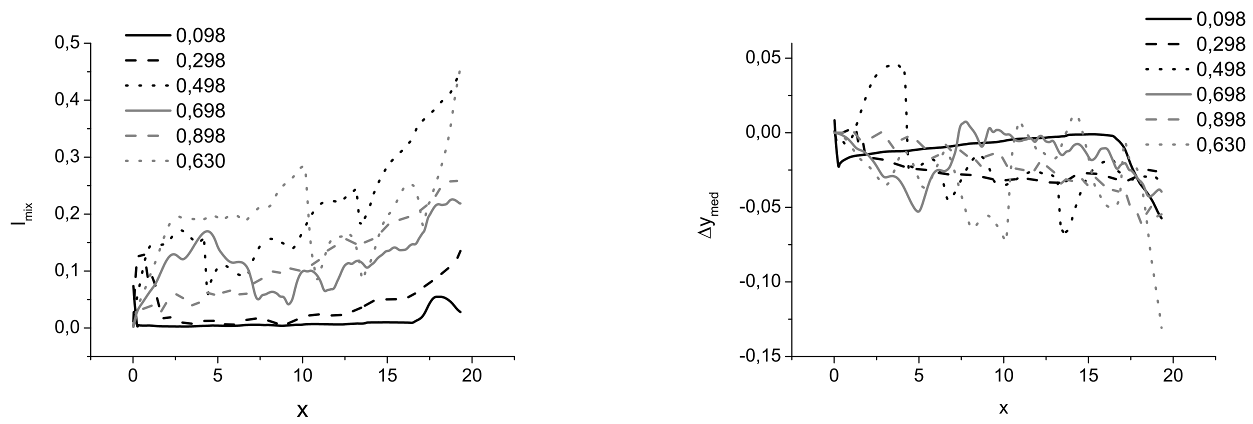


(а) (б)

Рисунок 5.8: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $a = 0.05$.

начинают смещаться в обратном направлении, однако, несколько позже из-за большей вязкости ($L_X/L_Y \approx 8$–10). На дистанции $L_X/L_Y \approx 9$–11 горячие слои движутся в обратном направлении, приближаясь к ядру потока, и одновременно выдавливают более холодные, давно вовлеченные слои в область медленного течения. На второй половине канала образуется система медленно сворачивающихся вихрей с характерным размером, равным длине волны основного возмущения. Основная зона смешения при этом составляет 1/3 калибра и располагается не в пристеночной зоне и не в ядре потока, а в окрестности точки перегиба.

Для самой мощной из исследованных амплитуд в пристеночной области происходит сильнейшее демпфирование толщины слоя смешения (см. рис. 5.9) на дистанции $L_X/L_Y \approx 0.5$ калибра, в то время как соседний слой ($y = 0.298$) после подавления начинает медленно возрастать. Совершенно противоположное поведение наблюдается у горячей стенки, где смешение по своей скорости не уступает ядру потока, однако, осциллирует гораздо меньше. Возможно, это объясняется более мелким масштабом вихревых образований в пристеночной области. Поведение в слоях $y = 0.498$ и $y = 0.063$ отличается крайней немонотонностью, осцилляциями и выбросами с амплитудой порядка $l_{\text{mix}} \approx 0.15$. Такие падения l_{mix} происходят в момент совершения слоями с соответствующей температурой, изначально захваченных холодной жидкостью, быстрого возвратного движения к ядру потока (например на дистанции 10 калибров).



(а) (б)

Рисунок 5.9: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $a = 0.075$.

Выполнение пространственного преобразования Фурье (см. рисунок 5.10) в произвольный момент времени $t = 276.8$ для полей завихренности, энстрофии, кинетической энергии потока, а также кинетической энергии возмущений относительно невозмущённого стационарного профиля $1/2((u - u_{\mathrm{prof}}(y))^2 + v^2)$, демонстрирует наличие некоторых закономерностей, соответствующих свойствам двумерного турбулентного течения. В частности, на уверенно разрешаемом участке спектра ω^2 имеется область, напоминающая асимптотику k^{-2}. Рассматривая спектр завихренности, можно исходить из предположения о том, что в процессе развития течения существуют области [192], в которых основную роль играет тензор деформаций (гиперболическая область) и те, в которых поведение определяется тензором вращений (эллиптическая область). Гиперболическая область связывается с развитой (однородной и изотропной) турбулентностью, в то время как эллиптические области должны соответствовать когерентным структурам (см. Раздел 5.1.5). Здесь мы сталкиваемся с двояким толкованием термина «когерентные структуры»: с одной стороны, им обозначаются образования, имеющие размер больший интегрального масштаба турбулентности, с другой — уединённые сгустки завихренности, слабо взаимодействующие с вихрями других масштабов [174]. Так или иначе, эти структуры живут достаточно долго $t \gtrsim 100u/\Lambda$, выживая в процессе филаментации. Многие исследователи считают, что появление когерентных структур связано со специфическими свойствами начальных условий.

Наклон спектра завихренности в логарифмических координатах на рисунке 5.10-а с некоторой точностью соответствует асимптотике «k^{-2}», представляющей собой вклад эллиптических областей [192]. Отсутствие асимптотики k^{-1}, соответствующей турбулентной пелене, скорее всего связано с недостаточным сеточным разрешением. Напротив, наклон спектра кинетической энергии возмущений хорошо согласуется с классической моделью турбулентности — по крайней мере, в относительно небольшом интервале разрешаемых масштабов. «В полях» активного скаляра не наблюдается процесса быстрого разрушения мелких вихрей, в отличие от трёхмерного случая, где их эволюция происходит очень быстро. Действительно, ведь размерные оценки их времени жизни в двумерном,

$$\frac{u\tau}{\Lambda} \sim 1, \tag{5.3}$$

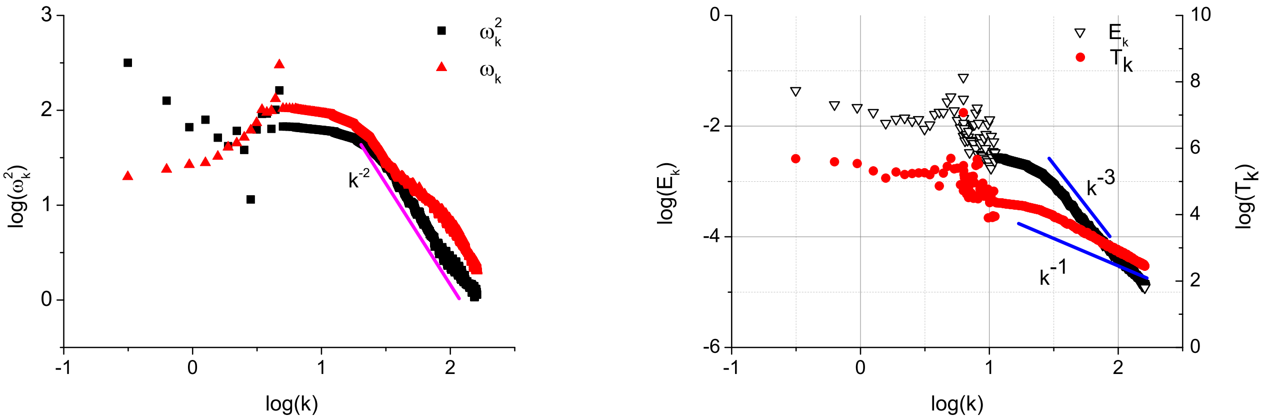
и трёхмерном случаях,

$$\frac{u\tau}{\Lambda} \sim \mathrm{Re}^{-1/2}, \tag{5.4}$$

принципиально различаются.

5.1.4 Зависимость толщины слоя смешения от числа Прандтля

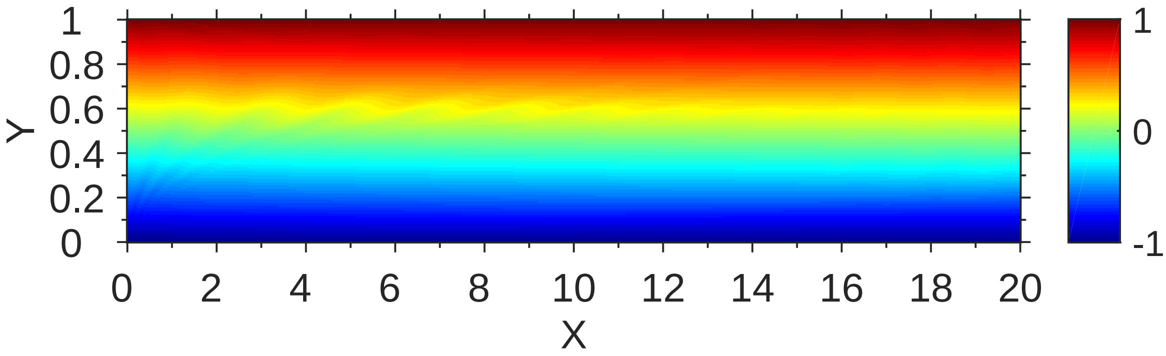
В серии расчётов для разных чисел Прандтля использовалось течение с самым большим числом Рейнольдса из всех рассмотренных, в нём числа Рейнольдса Re_1 и Re_2 на основных участках потока соответствуют течению с развитой турбулентностью. Минимальное число Прандтля, определяемое по максимальной вязкости у холодной стенки μ_0 в приводимой серии расчётов, имело значение $\mathrm{Pr} = 66.67$, 1.334, 6.67×10^{-2}, 3.34×10^{-3}, что не является достаточно показательным в силу резкого изменения вязкости поперёк канала. Для самого большого $\mathrm{Pr} = 66.67$ на дистанции 2 калибра происходит резкое вовлечение горячего гребня в холодный поток, а затем ($L_{\mathrm{Y}}/L_{\mathrm{X}} \approx 6$) резкое сворачивание «клуба». На расстоянии 6 калибров начинается возвратное движение горячего моля, приводящее к его растяжению (шнурованию) и сдваиванию. Ниже зоны i^* образуется слоистое течение вытянутых молей жидкости с разной температурой, смещающихся к ядру потока. На расстоянии 10 калибров от входа образуется регулярная система крупномасштабных «клубов», состоящих из образований разной температуры и формы. Для этого же режима характерны самые



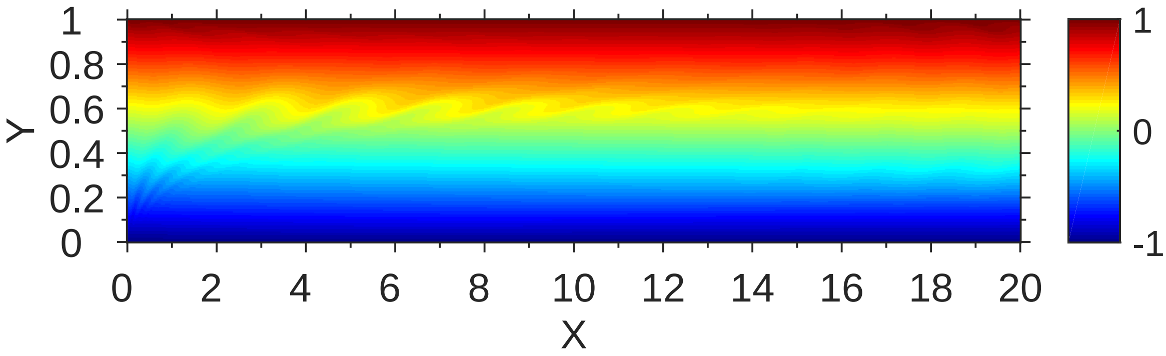
(а) (б)

Рисунок 5.10: Спектры преобразования Фурье: (а) — энстрофии ω^2 (■) и завихренности ω (△), малиновая линия указывает наклон асимптотики k^{-2}; (б) — кинетической энергии возмущений основного профиля скорости (▽) и активной примеси (температура T) (•), синие линии указывают наклон асимптотик k^{-1} и k^{-3}. Для $k > 1.05$ проводилась фильтрация спектров по методу Савицкого–Голея [193].

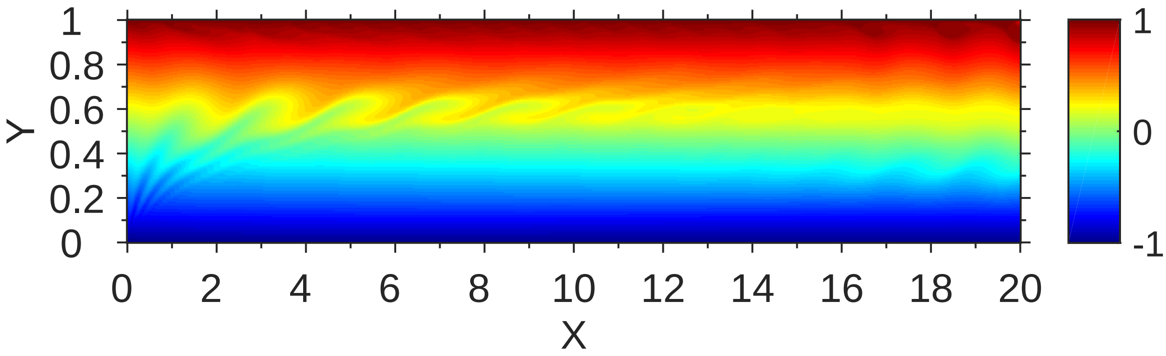
большие значения слоя вовлечения, в отдельных слоях ($y = 0.63$, $y = 0.49$) достигающие 0.25–0.4 калибров, что свидетельствует об очень мощном процессе смешения. Причём l_{mix} в этом случае на первой половине канала практически не убывает, а на второй постепенно растет, что приводит к удвоению значения l_{mix} на выходе. В отличие от меньших чисел Pr рассматриваемое семейство графиков оказывается гораздо меньше подвержено пространственным осцилляциям. При $\text{Pr} = 1.334$ на дистанции 2–4 калибра происходит увеличение высоты маловязкого гребня; при $L_{\text{Y}}/L_{\text{X}} \approx 4$ начинается сворачивание гребня в вихрь, что уже при $L_{\text{Y}}/L_{\text{X}} \approx 6$ становится малозаметным вследствие тепловой диффузии. Горячие слои жидкости не совершают возвратного движения (как в случае числа $\text{Pr} = 66.67$ — см. раздел о сходимости), в результате в центральной части потока образуется дорожка молей более теплой жидкости в окружении холодной. На дистанции $L_{\text{Y}}/L_{\text{X}} \approx 10$–$20$ происходит рассеяние основания горячего гребня и потеря регулярности формы. Вовлечения холодной жидкости в ядро потока практически не наблюдается. При уменьшении числа Прандтля до $\text{Pr} = 6.67 \times 10^{-2}$ рост слоя смешения происходит крайне немонотонно, осцилляции становятся особенно сильными в пристеночной области возле горячей стенки ($y = 0.898$), в ядре потока ($y = 0.898$), в окрестности изолинии i^* — $y = 0.693, 0.498, 0.298$. Максимальная интенсивность смешения опять приходится на зону i^*, однако, в оконечности канала ($L_{\text{X}}/L_{\text{Y}} \approx 15$) ей совершенно не уступает ($l_{\text{mix}} \approx 0.15$) горячий пристеночный слой. Вследствие более сильного теплообмена образования высоких вихрей не происходит, их амплитуда остаётся практически постоянной по длине канала; кроме того, поле температуры мало отражает процесс эволюции завихренности вследствие быстрого рассеяния температурных неоднородностей. Практически все температурные изолинии отклоняются в область холодной стенки, подвергаясь при этом воздействию сильных осцилляций. При наименьшем $\text{Pr} \approx 3.34 \times 10^{-3}$ высокая теплопроводность приводит к уменьшению толщины слоя вовлечения по сравнению с $\text{Pr} = 6.67 \times 10^{-2}$ до 0.015–0.03 на дистанции 1–15 калибров с резким ростом в 4 раза в оконечности трубы. Связи между полем завихренности и температуры практически не наблюдается.



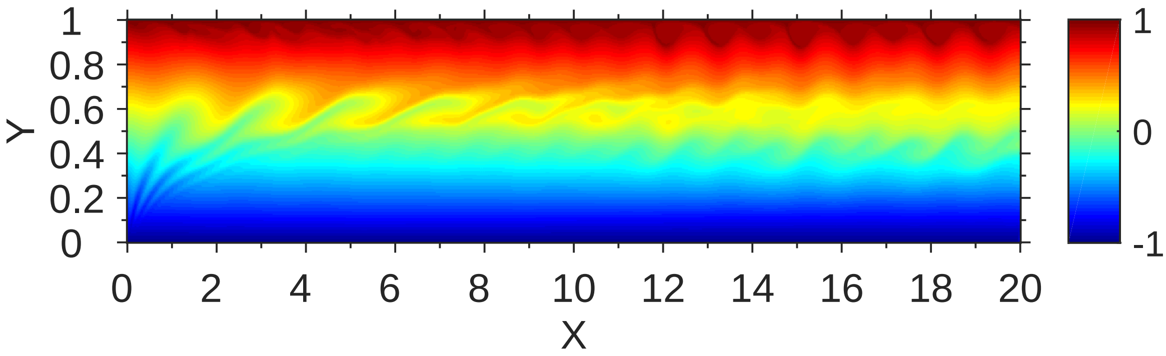
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 5.11: Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени $t = 134.375$ при различных амплитудах: (а) — $a = 0.009375$, (б) — $a = 0.01875$, (в) — $a = 0.0375$, (г) — $a = 0.05$, значение температуры у нижней стенки в безразмерных единицах $T = -1$, у верхней стенки $T = 1$, расчёт на сетке 1024×256 ячеек.

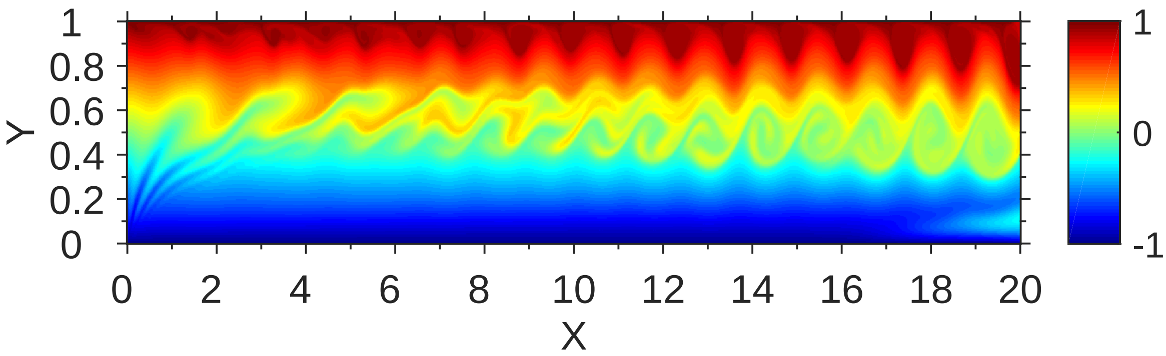
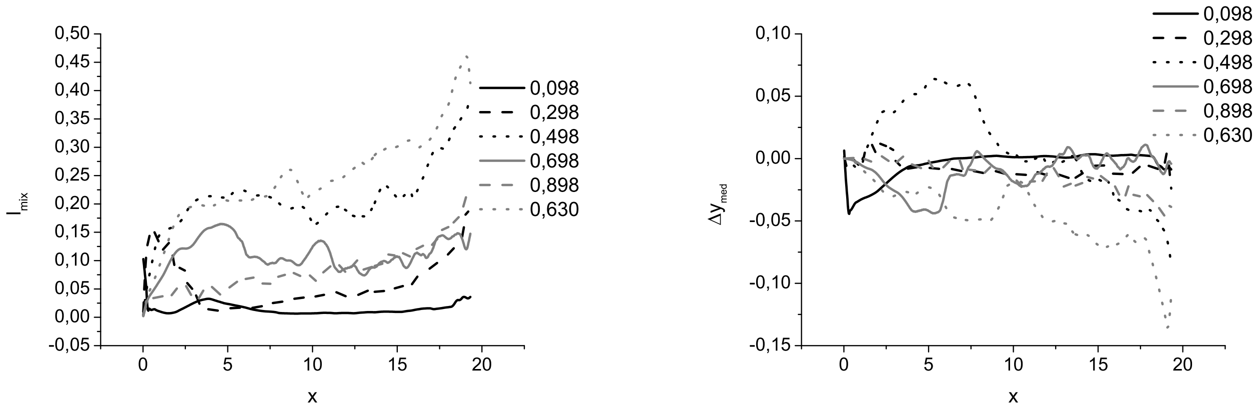


Рисунок 5.12: Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени $t = 134.375$ при $a = 0.075$.



(а) (б)

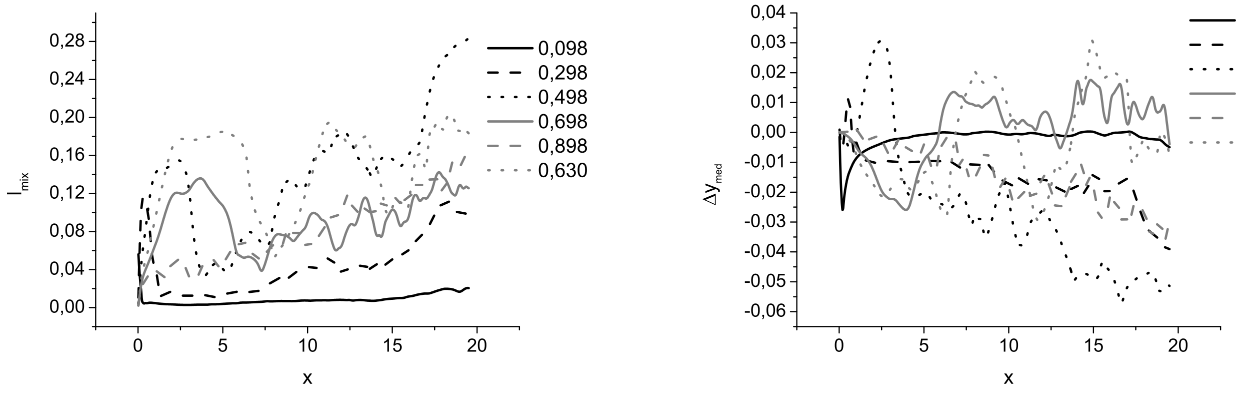
Рисунок 5.13: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для Pr $= 66.67$.

5.1.5 Метод Вейса

Разработка теорий двумерной турбулентности начала активно вестись в 60 гг. XX века результатом чего стало появление известных работ Бэтчелора (Batchelor) [88] и Крейчнана (Kraichnan) [89]. Первая работа основывается на том, что двумерная турбулентность обладает [2] прямым каскадом энстрофии от больших масштабов к малым, автомодельным энергетическим спектром и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим. Обе работы определили основной круг вопросов теории двумерный турбулентности, остающихся актуальными и поныне. Реализованная схема КАБАРЕ построена в переменных u, v, ρ, тогда как основные уравнения теории турбулентности зачастую представляются в форме, содержащей в себе величину, производную от поля скорости — завихренность ω

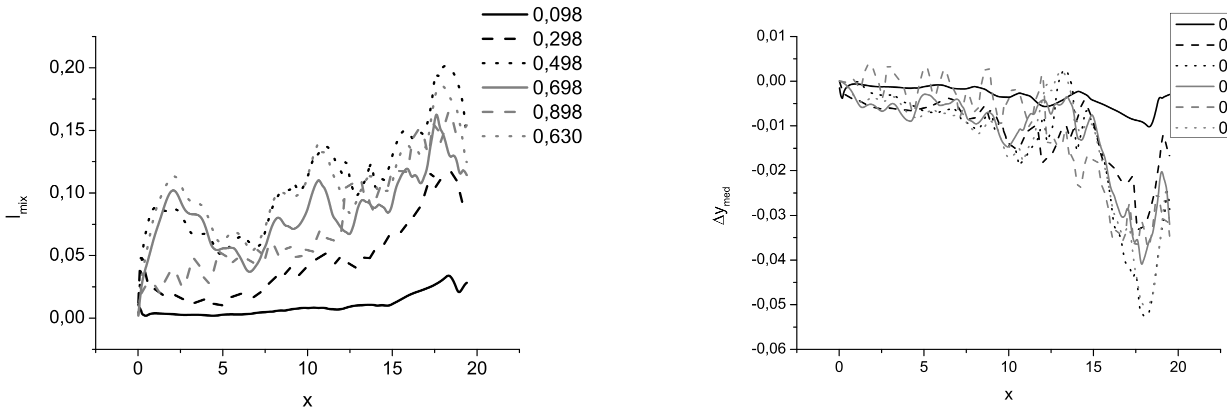
В предыдущих разделах процесс смешения анализировался на основе полей активного скаляра (температуры). Любопытным является вопрос об асимптотике каскада энстрофии в инерционном интервале и реализацией когерентных структур (если таковые имеются). Рассмотрим поведение линий завихренности в предельном случае $\nu \to 0$, тогда завихренность оказывается вмороженной в жидкость и для неё выполняется соотношение

$$\frac{D}{Dt}\omega = 0, \tag{5.5}$$



(а) (б)

Рисунок 5.14: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $\mathrm{Pr} = 1.334$.



(а) (б)

Рисунок 5.15: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $\mathrm{Pr} = 6.67 \times 10^{-2}$.

где D/Dt обозначает конвективную производную

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{5.6}$$

Тогда, проводя вывод в индексных обозначениях, получим для градиента вертикальной компоненты завихренности ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{5.7}$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right] = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{5.8}$$

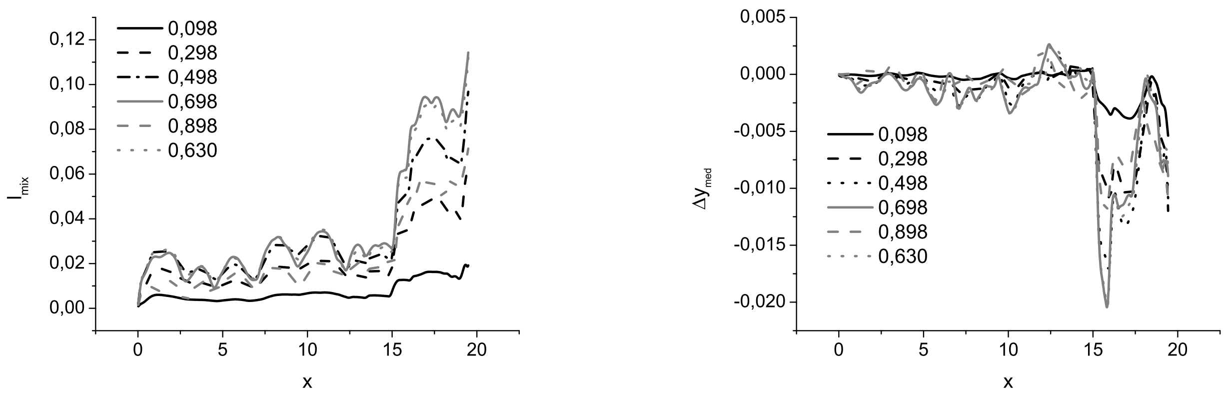
$$\frac{D^2}{Dt^2}\left[\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right] = -\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] = -\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_l}. \tag{5.9}$$

Первый член в правой части даёт

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{D}{Dt}\left[S_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk=3}\omega\right]\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{5.10}$$

где ε_{ijk} — символ тензора Леви–Чивиты. Рассмотрим второй член в правой части одной из компонент градиента завихренности

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{1}{4}\omega^2 - S_{11}^2 - S_{12}^2\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \tag{5.11}$$



(а) (б)

Рисунок 5.16: Усреднённые значения: (а) — толщины слоя вовлечения, (б) — смещения среднего значения изолинии относительно начальной ординаты для $\mathrm{Pr} \approx 3.34 \times 10^{-3}$.

где введены обозначения $S_{11} = \partial u/\partial x$, $S_{12} = 1/2(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$ для компонент тензора скоростей деформации. Таким образом, все сводится к уравнению вида [2]

$$\frac{D^2}{Dt^2}[\nabla\omega] + \left(\frac{1}{4}\omega^2 - S_1^2 - S_2^2\right)\nabla\omega = O\left(\frac{DS_1}{Dt}\nabla\omega, \frac{DS_2}{Dt}\nabla\omega, \frac{D\omega}{Dt}\nabla\omega\right), \tag{5.12}$$

Результаты многих численных исследований показывают [2], что Лагранжевы скорости изменения ω, S_{11}, S_{12} значительно меньше $\nabla\omega$. Таким образом, в качестве эмпирического факта можно принять, что

$$\frac{D^2}{Dt^2}[\nabla\omega] + \left(\frac{1}{4}\omega^2 - S_{11}^2 - S_{12}^2\right)\nabla\omega \approx 0. \tag{5.13}$$

Необходимое условие выживания вихрей в процессе филаментации определяет так называемый критерий Окубо–Вейса:

$$\frac{1}{4}\omega^2 > S_{11}^2 + S_{12}^2 \tag{5.14}$$

Неравенство является результатом анализа численного моделирования и не относится к строгой теории.

Можно разделить гиперболические и эллиптические зоны, выполнив преобразование:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathrm{OW}}^2 > 0 \Rightarrow \lambda_{\mathrm{OW}}^2 = 1, \\ \lambda_{\mathrm{OW}}^2 \leqslant 0 \Rightarrow \lambda_{\mathrm{OW}}^2 = -1, \end{aligned} \tag{5.15}$$

где $\lambda_{\mathrm{OW}}^2 = 1/4\omega^2 - S_{11}^2 - S_{12}^2$. Применение критерия Окубо–Вейса позволяет рассмотреть эволюцию активного скаляра T несколько по-иному. Действительно, при достаточно сильных амплитудах $a = 0.075$ и $a = 0.05$ можно выделить четыре наиболее интересных области течения:

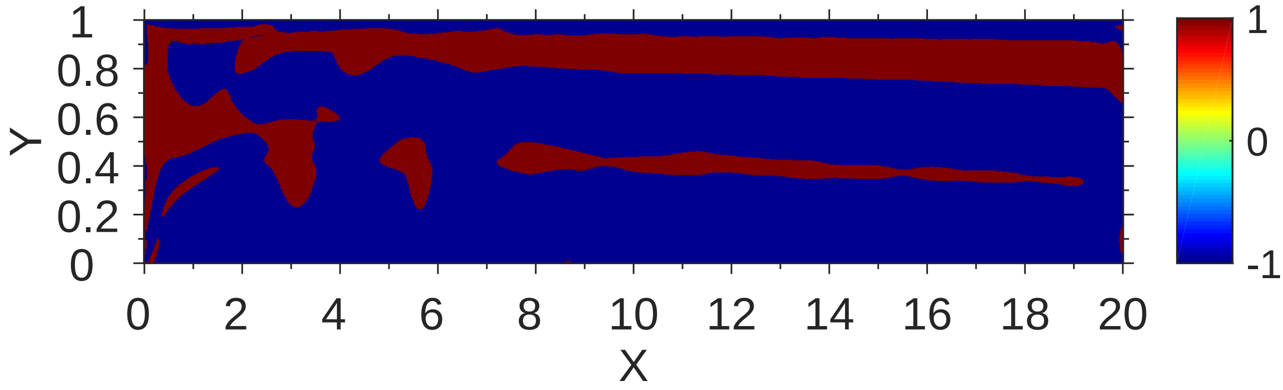
– пристеночный слой (синий), в котором должна преобладать филаментация и активно эволюционируют мелкие вихри;
– средний слой (ядро потока), где выживают когерентные структуры, имеющие на рисунке;
– зона окрестности точки перегиба i^*, в которой $1/4\omega^2 < S_1^2 + S_2^2$ и в крупномасштабных клубах превалирует растяжение вовлеченных слоев жидкости разной температуры несмотря на наличие крупномасштабных вихревых структур.
– несколько ниже точки перегиба также имеется узкий участок, где могут существовать когерентные структуры. Вероятно, он соответствует зоне начала возвратного движения жидкости.

Возможно, что именно возвратно-поступательное движение «нитей» горячей и холодной жидкости, вызванное «противофазным» движением более быстрого ядра сверху и холодного «крыла» снизу, и приводит к активному росту $\nabla\omega$, филаментации, которой низкочастотное возбуждение придаёт характер «клубов». При более мелких амплитудах $a \leqslant 0.0375$ происходит чередование гиперболических и эллиптических областей вследствие форсинга, без каких-либо выраженных участков. Осреднение проводится при различных амплитудах на числе шагов $n = 1$–2×10^6 по 600–2000 временным слоям уже после установления характерного режима течения. Сетка, использованная при интерполяции, насчитывала $n_X \times n_Y = 1024^2$ ячеек. Картина для амплитуды $a = 0.009375$ приведена отдельно на рисунке 5.18. Теперь проследим за изменением расположения гиперболических и эллиптических зон при изменении числа Прандтля. В этом случае для серии расчётов использовался больший перепад давления и диапазон чисел Рейнольдса Re_1, Re_2 при амплитуде $a = 0.075$. Картины распределения знака λ^2_{OW} имеют те же четыре зоны, которые не меняют своего положения при уменьшении Pr.

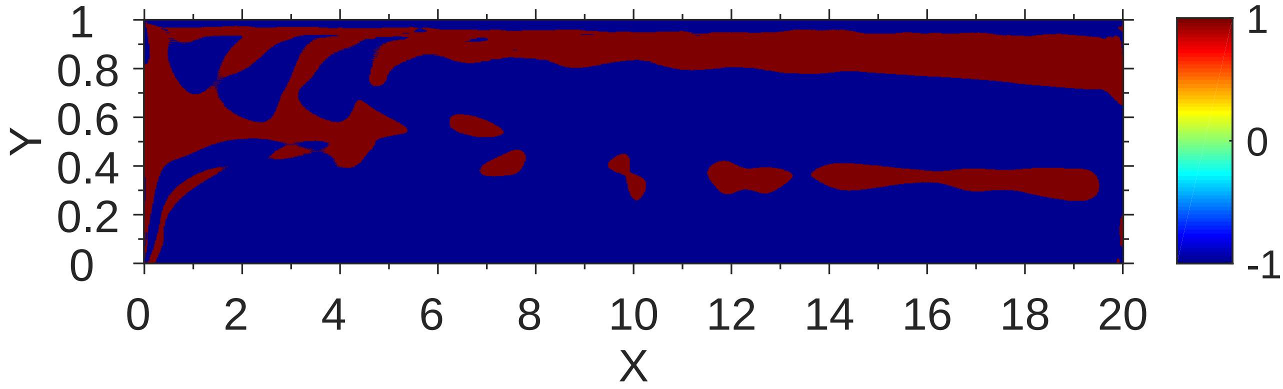
При анализе временной эволюции поля завихренности строились контурные графики в диапазоне $\omega \in [0.04, 0.07]$, чтобы лучше разрешить область относительно слабо закрученных вихревых образований в окрестности точки i^*. При переходном числе Рейнольдса в зоне i^* характер образующихся вихрей, очевидно, оказывается зависящим от амплитуды a: в нижней точке отрезка $0.05 \leqslant a \leqslant 0.075$ уединённые вихри практически сохраняют округлую форму, постепенно теряя интенсивность, вероятно, вследствие диффузии завихренности, в то время как в верхней части интервала, начиная с расстояния 5–6 калибров, происходит активная деформация вихря, «пятна» (patches) завихренности растягиваются в нити в середине слоя $y \approx 0.4$–6 и сжимаются у его границ. В этом случае влияние вязкой диффузии начинает сказываться на $L_Y/L_X \geqslant 13$.

Ядру потока, а также точке перегиба соответствуют зоны чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_{1,2}$, характерные для развитого турбулентного течения, что позволяет говорить о проявлении «вмороженности» линий завихренности в поток, противоположный процесс наблюдается для температуры T при последовательном увеличении Pr. Как уже отмечалось выше, связь между полями завихренности и температуры теряется. Диапазоны завихренности в зоне i^* практически совпадают. Процесс деформации вихрей оказывается независящим от числа Pr, если $\mathrm{Pr} \geqslant 1.334$: филаментация ядра вихря происходит во второй половине канала с образованием большого числа мелких «пятен» завихренности, так же подверженных растяжению. Зачастую шнурование вихря оказывается достаточно сильным, что, однако, не приводит к его разрушению. При увеличении Pr происходит уширение контуров завихренности, соответствующих нижней части диапазона ($\omega \approx 0.3$).

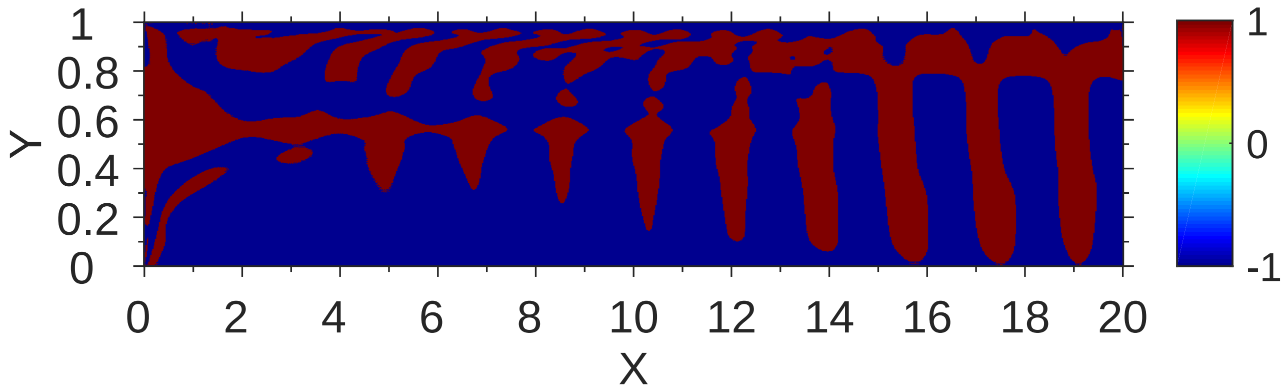
Связь между образующимся каскадом энстрофии и когерентными структурами остаётся не до конца выясненной. Так, иногда предполагается, что образование обратного каскада энергии может быть связано со слиянием вихрей одинакового знака (по-другому — одинаково закрученных вихрей), а их филаментация — с механизмом образования прямого каскада ω^2. Однако эта идея не оказалась сколько-нибудь плодотворной [194]. Возможность существования когерентных структур на различных масштабах также является вопросом. В случае уравнения Эйлера для достаточно больших чисел Рейнольдса можно связать тензорные величины в критерии Вейса (ω, S, $\nabla\vec{v}$) со свойствами Якобиана матрицы для градиента давления. Таким образом, критерий Вейса оказывается применим только в тех областях, где поле давления имеет существенную пространственную кривизну (в расчётах [194] эта зона не превышала 30% от всей области). К зонам течения, где гипотеза Вейса верна, следует относить ядра крупных вихрей, а также окрестность седловых точек между одинаково закрученными вихрями. Подобная картина наблюдается и в рассматриваемом течении в зоне i^*: здесь имеется система одинаково закрученных вихрей с достаточно устойчивыми ядрами, которые затем деформируются ниже по течению.



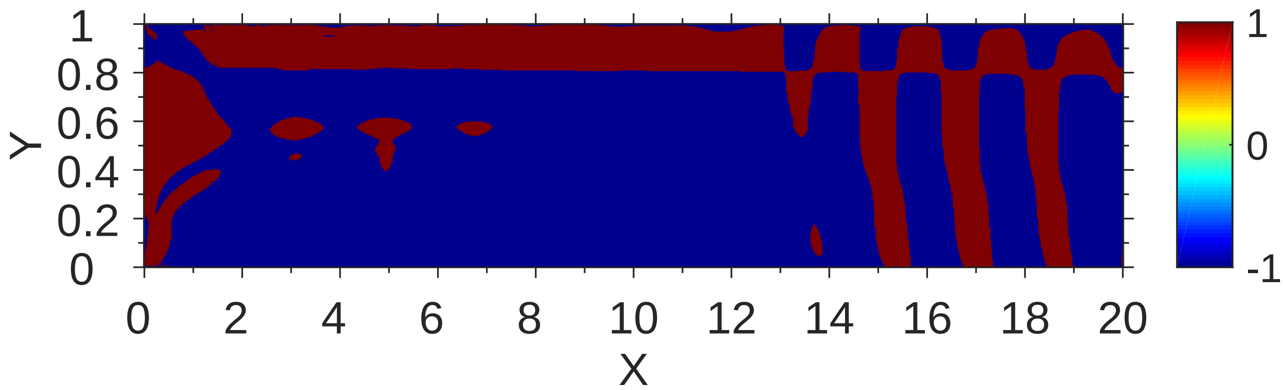
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 5.17: Гиперболические и эллиптические зоны в усреднённом течении при различных амплитудах возмущения: (а) — $a = 0.075$, (б) — $a = 0.05$, (в) — $a = 0.0375$, (г) — $a = 0.01875$. Множество значений λ^2_{OW} сведено к значению «-1» для отрицательного подмножества и к «1» для положительного нижней стенки в безразмерных единицах $T = -1$, у верхней стенки $T = 1$.

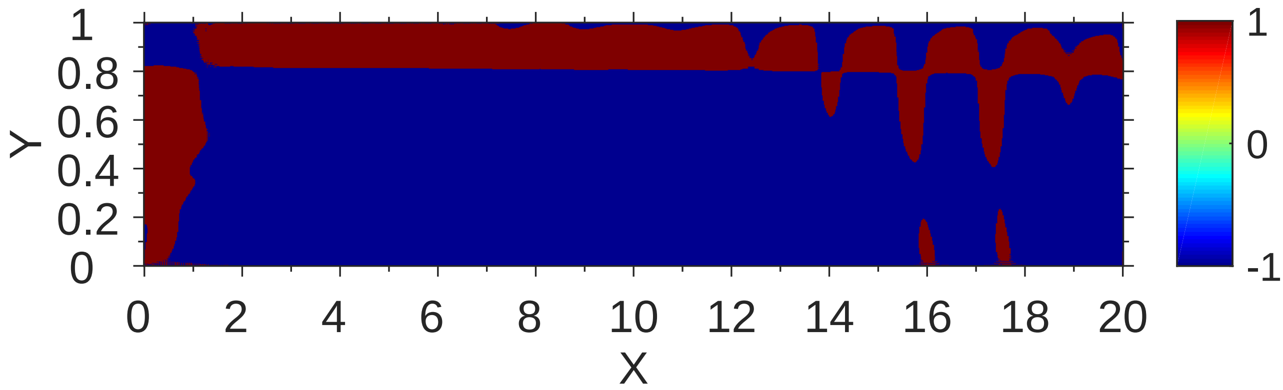
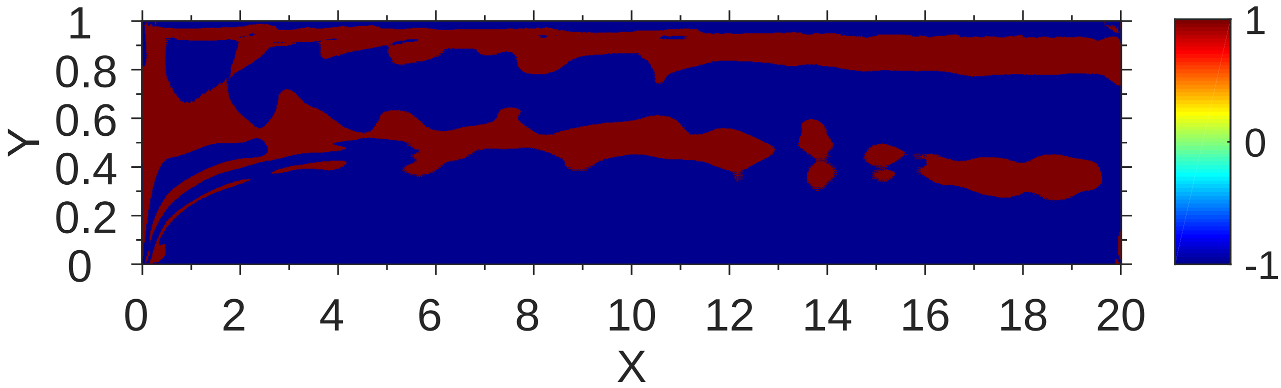


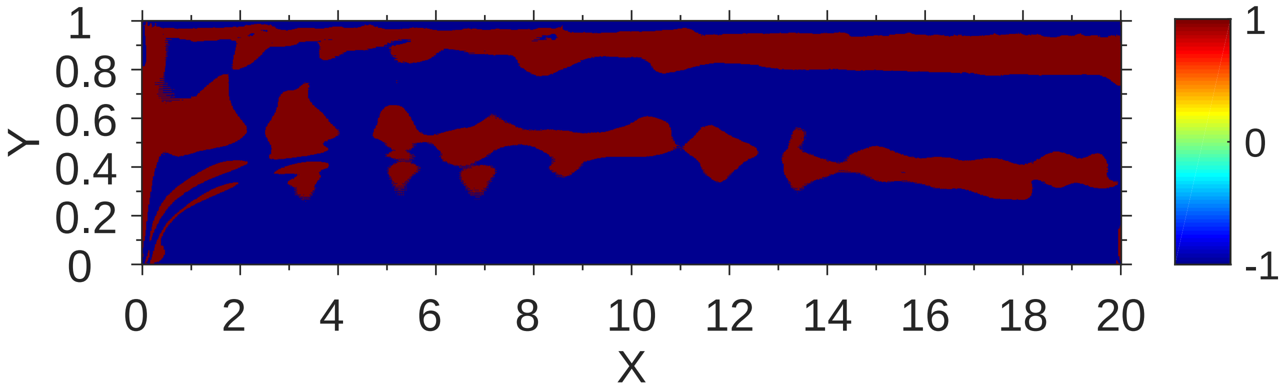
Рисунок 5.18: Расположение гиперболических и эллиптических в осредненном течении при $a = 0.009375$, цветовая схема аналогична рисунку 5.17г.

5.1.6 Заключение

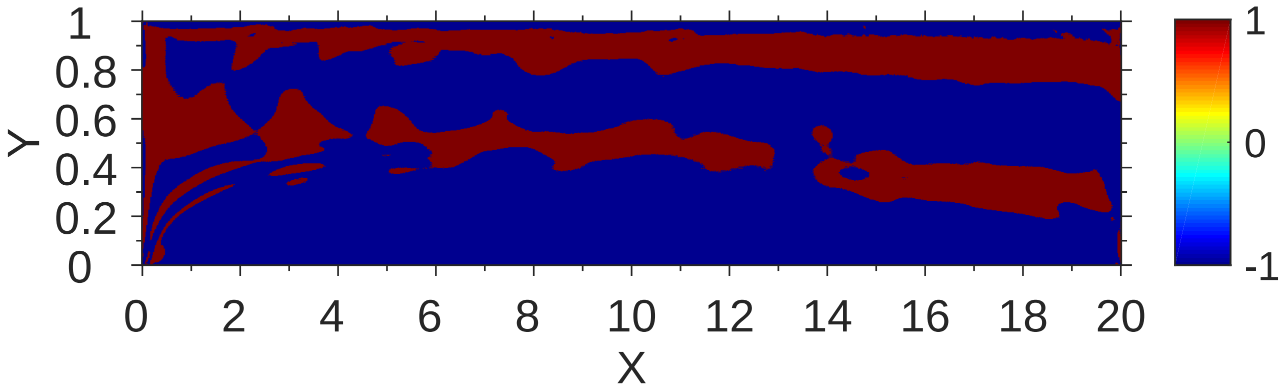
Профиль скорости ТВЖ, обладающий точкой перегиба, оказывает решающее влияние на процесс крупномасштабного смешения, причём сам этот процесс будет усиливаться по мере пространственного развития течения и напрямую не связан с генерацией возмущений и завихренности в пристеночном слое. Резонансная (квазирезонансная) частота оказывается линейной функцией перепада давления. Получение картин полей гидродинамических переменных является ресурсозатратной задачей, это связано с ошибками вычисления положения жидких молей с различной температурой, а также медленностью процесса установления стационарного режима течения. Слой вовлечения оказывается зависящим в большей степени от амплитуды возмущения a, чем от числа Pr. Причём, при увеличении амплитуды происходит переход от режима конвективной неустойчивости к режиму абсолютной неустойчивости, изменение числа Pr приводит к тому, что процесс эволюции активного скаляра становится независящим от поля завихренности. Применение критерия Окубо–Вейса позволяет выделить характерные зоны в течении, связанные с тем, какой из тензоров — тензор деформации или завихренности — преобладает в потоке, что может приводить к активной филаментации турбулентной пелены или к сохранению когерентных структур некоторого масштаба.



(а)



(б)



(в)

Рисунок 5.19: Гиперболические и эллиптические зоны в усреднённом течении при различных значениях минимального числа Pr в поперечном сечении канала: (а) — $\mathrm{Pr} = 1.334$, (б) — $\mathrm{Pr} = 6.67 \times 10^{-2}$, (в) — $a = 3.34 \times 10^{-2}$. Множество значений λ^2_{OW} сведено к значению «-1» для отрицательного подмножества и к «1» для положительного нижней стенки в безразмерных единицах $T = -1$, у верхней стенки $T = 1$.

5.2 Моделирование процесса крупномасштабного смешения в двойном сдвиговом слое термовязкой жидкости

5.2.1 Постановка задачи

Задача о временной эволюции слоя смешения относится к классу свободных турбулентных течений, начало изучения которых было положено в работе [195]. Течение организуется таким образом, что градиенты продольной скорости и вязкости оказываются противоположно направленными: верхняя и нижняя части течения являются покоящимися с большей кинематической вязкостью ν_{high}, центральная часть потока имеет скорость U_0 и меньшую вязкость ν_{low}, тем самым имитируется процесс смешения в затопленной ламинарной струе (см. рисунок 5.20). Разрыв продольной скорости сглаживается с помощью функции tanh:

$$u = U_0/2 \left(1 + \tanh\left(r\left(y - \frac{1}{4}L_{\text{Y}}\right)\right)\right), \quad y \in [0, L_{\text{Y}}/2], \tag{5.16}$$

$$u = U_0/2 \left(1 + \tanh\left(r\left(\frac{3}{4}L_{\text{Y}} - y\right)\right)\right), \quad y \in (L_{\text{Y}}/2, L_{\text{Y}}]. \tag{5.17}$$

Начальная толщина слоя смешения управляется параметром r и выбрана очень малой $r = 1280$, что в 16 раз превышает значение использовавшееся в [175]. Начальное условие для продольной скорости дополняется гармоническим возмущением в поперечном направлении

$$v = a\sin(2\pi m x), \quad x \in [0, L_{\text{X}}], \quad m = 6 \tag{5.18}$$

Использование шестой гармоники, являющейся самой быстрорастущей в классической задаче об

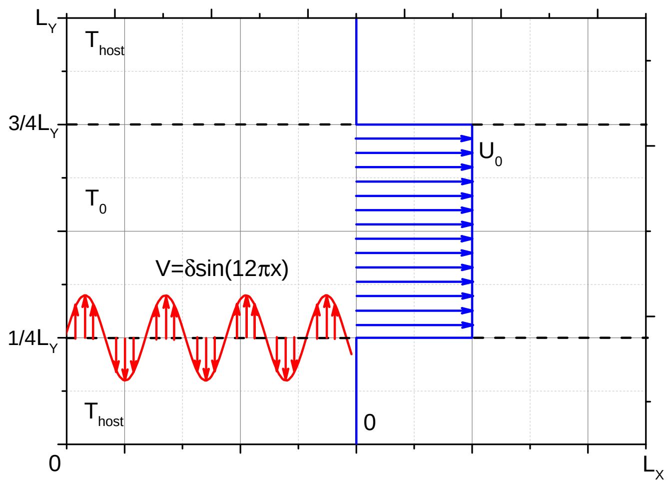


Рисунок 5.20: Распределение продольной скорости U, а также эпюра поперечного возмущения V в расчетной области.

эволюции двойного сдвигового слоя [179], позволяет уменьшить необходимый временной расчётный интервал. На всех границах расчетной области устанавливаются периодические граничные условия.

Рассматриваемая жидкость является термовязкой, поэтому разрыв вязкости на границе слоя смешения является следствием низкой температуры окружающей жидкости и более высокой температуры затопленной струи. Иными словами, в данной задаче в холодный резервуар покоящейся жидкости подаётся поток той же жидкости, но с более высокой температурой. Во всех расчётах скорость струи остаётся неизменной, меняется только её реперная вязкость μ_0 и температура холодной

Таблица 12: Список определяющих параметров для расчёта

Название параметра	Обозначение	Значение
скорость звука	c	10.0
реперная вязкость	μ_0	1
реперная температура	T_0	127.0
показатель экспоненты	β	-2.3
длина канала	L_X	1.0
ширина канала	L_Y	1.0
реперная плотность	ρ_0	1000.0
теплопроводность	λ	0.3
теплоемкость	c_p	2000.0
число ячеек по оси X	n_X	512/1024/(2048/4096)
число ячеек по оси Y	n_Y	512/1024/(2048/4096)
число Куранта	CFL	0.15
относительная амплитуда возмущений	a	0.001
номер гармоники	m	6

жидкости. Предполагая известным закон изменения вязкости от температуры

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta\frac{T-T_0}{T_0}}, \tag{5.19}$$

а также считая температуру струи равной реперному значению T_0, получим значение температуры покоящейся жидкости

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{1}{\beta}\ln R_\nu\right). \tag{5.20}$$

Тогда поперечное распределение температур можно задать как

$$T = \frac{1}{2}\left((T_1 + T_0) + (T_0 - T_1)\tanh\left(r\left(y - \frac{3}{4}L_Y\right)\right)\right), \quad y \in [0, L_\mathrm{Y}/2]; \tag{5.21}$$

$$T = \frac{1}{2}\left((T_1 + T_0) + (T_0 - T_1)\tanh\left(r\left(\frac{3}{4}L_\mathrm{Y} - y\right)\right)\right), \quad y \in (L_\mathrm{Y}/2, L_\mathrm{Y}]. \tag{5.22}$$

Профиль скорости обладает точкой перегиба, таким образом, как в случае постоянной вязкости, так и при вязкой стратификации будет происходить развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Численный расчёт проводился с помощью схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости, список характерных параметров приведен в таблице 12. Использовались сетки 512^2 (1), 1024^2 (2), 2048^2 (3), 4096^2 (4) ячеек, основная масса вычислений выполнена на сетках (1) и (2), в отдельных случаях для проверки сходимости использовались сетки (3) и (4).

Как уже отмечалось выше, число Рейнольдса Re и отношение вязкостей можно скомбинировать в один универсальный параметр $k_t = U_0 L/\nu_{\mathrm{high}} = U_0 L/(R_\nu \nu_{\mathrm{low}}) = \mathrm{Re}/R_\nu$, где в качестве характерного размера L можно использовать ширину затопленной струи $L = L_\mathrm{Y}/2$, – как это делается в экспериментальных работах, или характерный поперечный размер расчётной области $L = L_\mathrm{Y}$. Само число Рейнольдса, как правило, определяется по толщине начального слоя завихренности $\delta_{\omega,0}$ или по толщине начальной потери импульса, в рассматриваемом случае имеющей значение $\delta_{\theta,0} \approx 3.86 \times 10^{-4}$, что даёт $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}} \approx 0.386$. По мнению автора, определение Re, данное в [126] и часто используемое в подобных задачах, не всегда оказывается подходящим, если рассматривать процесс смешения с точки зрения теории пограничного слоя.

5.2.2 Расчёт инкремента неустойчивости

Согласно экспериментальным данным [112], ниже некоторого порога k_t процесс смешения полностью подавляется, а при $k_t \approx 7$–70 вовлечение и последующее смешение сильно зависит от R_ν. В настоящем разделе инкремент неустойчивости, являющийся одной из основных величин линейной теории и позволяющий установить характерные области устойчивости, будет определяться из решения системы уравнений Навье–Стокса и теплопроводности методом конечных разностей.

Способ определения инкремента неустойчивости [175], основанный на измерении временного сдвига кривой энстрофии, получаемой при двух различных амплитудах возмущения a_1 и a_2 $(a_2 > a_1)$ по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{a_2}{a_1} \tag{5.23}$$

в рассматриваемой задаче оказывается безрезультатным, т.к. спад интеграла энстрофии происходит очень быстро при всех $a_2/a_1 = 10$–10^4, что не позволяет удовлетворительно определить временной сдвиг Δt. В качестве экономичной альтернативы можно построить кривую скорости роста амплитуды начально накладываемого возмущения (5.18), которую легко вычислить с помощью одномерного преобразования Фурье.

По результатам расчётов установлено, что максимальная скорость роста возмущения приходится на слой смешения двух жидкостей, имеющий ординаты $y \approx L_\mathrm{Y}/4$ и $y \approx {}^3/_4 L_\mathrm{Y}$, таким образом, приведённую амплитуду в последующие моменты времени можно определить по формуле

$$\hat{v}_6(t) = \max_{\substack{y \in [{}^1/_5 L_\mathrm{Y}, {}^3/_{10} L_\mathrm{Y}]; \\ y \in [{}^7/_{10} L_\mathrm{Y}, {}^4/_5 L_\mathrm{Y}]}} \frac{\mathfrak{F}_6[V(t)]}{\mathfrak{F}_6[V(0)]}, \tag{5.24}$$

где $\mathfrak{F}_6[V(0)]$ — фурье-образ гармоники $m = 6$, задаваемой в начальных условиях; $\mathfrak{F}_6[V(t)]$ — его же значение, определённое в произвольный момент времени.

В подобных задачах число Рейнольдса определяется по начальной толщине слоя завихренности

$$\delta_{\omega,0} = \frac{\Delta U}{(\partial U/\partial y)_{\max,0}}, \tag{5.25}$$

и, таким образом, при больших градиентах может зависеть от качества сеточного разрешения, в частности, для сетки 512^2 ячеек $\delta_{\omega,0} = 4 \times 10^{-3}$, а для сетки 1024^2 — $\delta_{\omega,0} = 7.8 \times 10^{-3}$. Опираясь на последнее значение, можно сопоставить диапазоны чисел Рейнольдса, рассчитанные по характерному размеру области $\mathrm{Re}_{L_\mathrm{Y}} = 10^3$–$10^5$ и начальной толщине завихренности $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}} = 7.81$–781 для течения с постоянной вязкостью, а также $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}} = 0.15$–520 — для течений с разрывом вязкости.

Кривые роста амплитуды на начальных стадиях имеют совершенно различное поведение. В частности, на некоторых режимах наблюдается обычный экспоненциальный рост, предсказываемый линейной теорией, который в некоторый момент начинает ускоряться. Участок роста, согласующийся с линейной теорией, может иметь различную протяженность во времени, что затрудняет его аппроксимацию. Иногда в последовательности рассчитываемых режимов наблюдается отклонение от предсказаний теории: происходит задержка нарастания амплитуды, а также (в широкой окрестности кривой нейтральной устойчивости) рост нормированной амплитуды $\hat{v}_6(t)$ оказывается параболическим или линейным. Эти обстоятельства предопределили использование трёх различных аппроксимаций $\hat{v}_6 = \hat{v}_6(t)$ — экспоненциальной

$$\hat{v}_6 = \exp(\gamma t); \tag{5.26}$$

(значения инкремента неустойчивости в слое смешения, полученные таким образом, приведены в таблице 13, где отмечены индексом «1». Кроме того, используются два последовательных разложения основной зависимости в ряд Тейлора — квадратичной

$$\hat{v}_6 = 1 + \gamma t + (\gamma t)^2/2 + O((\gamma t)^3); \tag{5.27}$$

(отмечена индексом «2») и линейной (индекс «3»):

$$\hat{v}_6 = 1 + \gamma t + O((\gamma t)^2). \tag{5.28}$$

Из набора функций всегда выбиралась та, которая наилучшим образом приближает зависимость амплитуды от времени на начальном участке. В таблице 13 также используются буквенные индексы: «a», обозначающий, что расчёт параметра производился на сетке 1024^2 ячеек; индекс «b» – расчёт при скорости звука $c = 20$; индекс «c» – расчёт при скорости звука $c = 40$.

На кривой зависимости $\gamma = \gamma(R_\nu, \mathrm{Re})$ (см. рисунок 5.21a) можно выделить следующие участки: область резко отрицательных значений инкремента неустойчивости (1), окрестность кривой нейтральной устойчивости (2), зону резкого увеличения скорости роста возмущения (набор скорости роста) (3), область асимптотических значений при $\mathrm{Re} \gtrsim 50000$ (4). В переходных режимах может наблюдаться ограниченный рост слоя смешения, что иногда сопровождается появлением вихрей овальной формы, «зажатых» в слое смешения. Изолинии завихренности в этом случае похожи на фазовые траектории нелинейного маятника, сжатые по вертикали (сепаратриса и «кошачий глаз» [1]). В области быстрого роста инкремент неустойчивости является двухпараметрической функцией числа Рейнольдса Re_{L_Y} вида $\gamma = a_1 \mathrm{Re}^{b_1}$, в таблице 14 приведены значения коэффициентов, полученных из аппроксимации, а также стандартные ошибки ε_{a_1} по коэффициенту A_1 и ε_{b_1} — по коэффициенту b_1.

При увеличении отношения вязкостей R_ν происходит смещение участка резкого роста γ в область более высоких чисел Re, сама эта область становится все более растянутой, а значения показателя степени увеличиваются с $b_1 \approx 4.0$ до $b_1 \approx 7.0$. В диапазоне $\mathrm{Re} \gtrsim 50000$ происходит выполаживание всех дисперсионных кривых с некоторым уменьшением γ. Общая зависимость $\gamma = \gamma(R_\nu)$ при $\mathrm{Re} = const$ подтверждает экспериментальные наблюдения [112]: при росте $R_\nu = 1$–100 происходит резкое подавление γ на начальном участке эволюции, описываемом линеаризованными уравнениями. Вместе с тем, построенные дисперсионные зависимости относятся исключительно к начальному интервалу $t \gtrsim 0.05$–0.01, после которого начинается нелинейная стадия, выражающаяся в отклонении от закона $\hat{v}_6 \propto e^{\gamma t}$.

Следует заметить, что результаты исследований развития возмущения в широком диапазоне параметров R_ν, Re носят ограниченный характер: во многих случаях возмущение, «успешно развивающееся» на линейной стадии, затем подавляется при $t \sim 1$. Кроме того, из формулы (5.24) следует, что мы рассматриваем максимально нарастающее ($\gamma > 0$) и минимально убывающее ($\gamma < 0$) возмущение для одной выделенной гармоники. Наиболее сложное поведение $\gamma = \gamma(t)$ имеет в окрестности кривой нейтральной устойчивости: во-первых, здесь рост амплитуды возмущения скорости может иметь не экспоненциальный, а параболический или линейный характер; во-вторых, на основную зависимость могут накладываться периодические колебания малой амплитуды $\gamma \sim 0.001$, оказывающиеся независящими от расчётной сетки и скорости звука в уравнении состояния для слабосжимаемой жидкости. Вероятно, эти колебания могут быть связаны с влиянием членов более высокого порядка малости, отбрасываемых при анализе линеаризованной системы уравнений.

Полезно провести сравнение полученных значений γ с результатами классической линейной теории неустойчивости Кельвина–Гельмгольца для невязких течений и результатами работ других авторов. Асимптотические значения γ на всех кривых рисунок 5.21a соответствуют $\gamma \sim 10$, а согласно линейной теории [1]:

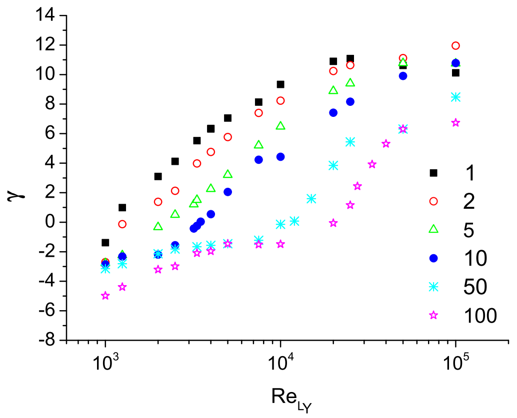
$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{U_0}{2} = \frac{2\pi}{L_X/6}\frac{U_0}{2} \approx 18, \tag{5.29}$$

Таблица 13: Сводная таблица значений инкремента неустойчивости с погрешностями

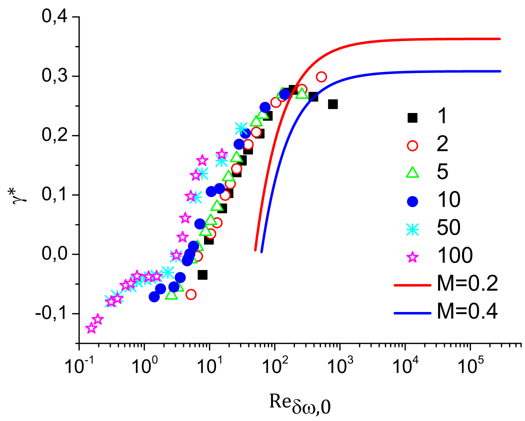
Re	$R_\nu = 1$		$R_\nu = 2$		$R_\nu = 5$	
	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$
1000	−1.38238[1]	0.02294	−2.70396[1]	0.03735	−2.77723[1]	0.0351
1250	0.98729[2]	0.01126	−0.12794[2]	0.02367	−2.2394[2]	0.0458
2000	3.10038[1]	0.03526	1.38306[2]	0.049	−0.33859[1]	0.01997
2500	4.12163[1]	0.04672	2.12947[2]	0.0577	0.5012[2]	0.02931
3200					1.20906[2]	0.01844
3333	5.52718[1]	0.06268	3.98119[2]	0.04808	1.51055[1]	0.04642
4000	6.3494[1,a]	0.07154				
4000	6.31697[1]	0.07148	4.75765[1]	0.09528	2.24988[2]	0.05005
5000	7.05887[1]	0.08445	5.77166[1]	0.07323	3.2023[1]	0.03803
7500	8.13872[1]	0.09954	7.40258[1]	0.08397	5.19958[1]	0.05932
10000	9.33177[1]	0.10737	8.23522[1]	0.1304	6.47985[1]	0.07986
20000	10.90065[1]	0.12262	10.24236[1]	0.11507	8.88738[1]	0.09993
25000	11.08353[1]	0.12486	10.64426[1]	0.11961	9.3984[1]	0.10561
50000	10.62441[1]	0.13341	11.11822[1]	0.13014	10.77832[1]	0.13038
100000	9.29375[1]	0.12597	10.3004[1]	0.12136	10.7489[1]	0.16274
Re	$R_\nu = 10$		$R_\nu = 50$		$R_\nu = 100$	
	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$	γ	$\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$
1000	−2.86004[1]	0.03924	−3.15049[2,b]	0.17594	−4.97966[1,c]	0.34538
1250	−2.32546[2]	0.04251	−2.81156[3,b]	0.04721	−4.39131[2,c]	0.08528
2000	−2.19628[3]	0.03094	−2.140356[3]	0.04017	−3.20681[2,c]	0.0521
2500	−1.56209[2]	0.04009	−1.8164[3]	0.02797	−2.98685[2,3]	0.05161
3200	−0.42675[1]	0.02848				
3333	−0.24681[1]	0.02529	−1.66091[3]	0.0214	−2.09033[2,c]	0.02679
3500	0.03543[1]	0.02119				
4000	0.54738[3]	0.02849	−1.56824[3]	0.01957	−1.96331[3,c]	0.02399
5000	2.05286[2]	0.05174	−1.45362[3]	0.03599	−1.4651[2]	0.04586
7500	4.23513[2]	0.04904	−1.22183[3]	0.03853	−1.51544[2]	0.03063
10000	4.43028[1]	0.0521	−0.14255[1]	0.0016	−1.48792[2]	0.02319
12000			0.07783[1]	0.02884		
15000			1.59414[3]	0.07035		
20000	7.41991[1]	0.08361	3.8493[2]	0.07071	−0.06072[3]	0.02918
25000	8.16224[1]	0.09185	5.44202[2]	0.08517	1.15411[2]	0.04319
27500					2.43861[2]	0.091
33333					3.91757[2,c]	0.05737
40000					5.31285[2,c]	0.06642
50000	9.90842[1]	0.11273	6.3129[1]	0.07645	6.31233[3]	0.07239
100000	10.78088[1]	0.13586	8.48206[1]	0.23413	6.73798[1]	0.07611

Таблица 14: Значения коэффициентов аппроксимации и стандартных ошибок

R_ν	a_1	b_1	ε_{a_1}	ε_{b_1}
1	-27.0141	3.97301	1.3701	0.16654
2	-30.7015	4.2545	1.33918	0.16279
5	-31.32983	4.06273	1.01099	0.12519
10	-34.55038	4.24771	1.4177	0.16207
50	-69.27686	7.37913	1.33152	0.13638
100	-72.63924	7.32748	4.73742	0.45765



(а)



(б)

Рисунок 5.21: (а) — зависимость действительной части инкремента неустойчивости γ от числа Рейнольдса при различных R_ν в переменных $(\gamma, \mathrm{Re}_{L_Y})$. Цифры в легенде указывают отношение вязкостей R_ν. (б) — зависимость инкремента неустойчивости при различных отношениях вязкости, построенная в переменных $(\gamma^*, \mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}})$. Расчёт на сетке (1). Сравнение данных с результатами работы [179]: синяя кривая — расчёт при числе Маха $\mathrm{M} = 0.2$, красная кривая — при $\mathrm{M} = 0.4$. Цифры в легенде указывают значения параметра R_ν.

что почти в два раза превосходит все полученные значения. Вероятно, в выбранном диапазоне $\mathrm{Re}_{L_Y} \lesssim 10^5$ вязкость оказывается существенной, подавляя скорость роста возмущения. Для сравнения полученных данных с результатами работы [179], можно построить зависимости $\gamma = \gamma(\mathrm{Re}_{L_Y})$ согласно [126] от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}}$.

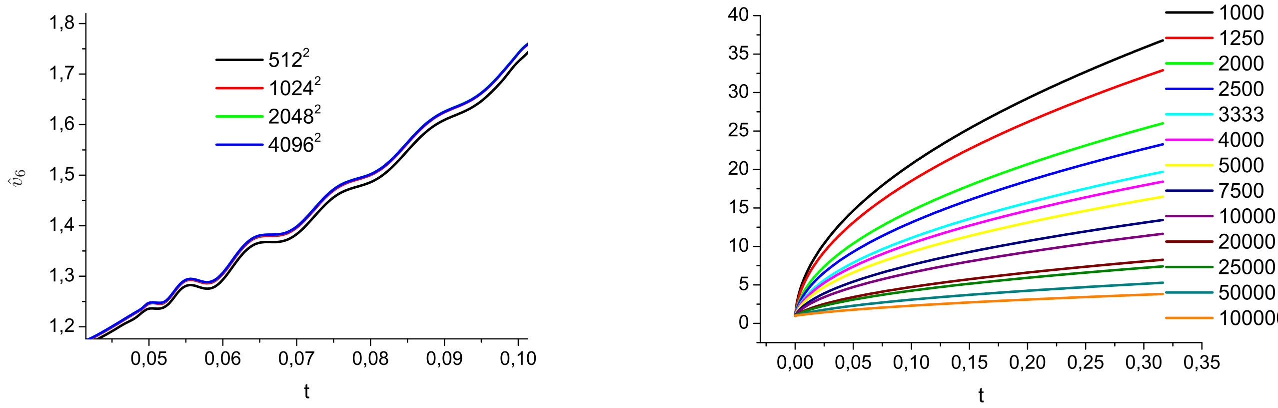
$$\mathrm{Re}_{\delta_{\omega,0}} = \frac{U_0 \delta_{\omega,0}}{\nu_{\mathrm{ref}}} \tag{5.30}$$

и масштабированной шкалы времени $t^* = tU_0/\delta_{\omega,0}$ (см. рисунок 5.21б). Синяя кривая показывает инкремент γ при числе Маха $\mathrm{M} = 0.2$ для возмущения произвольной формы (двумерная собственная функция для невязкого предела (inviscid eigenfunction)), красная кривая показывает аналогичную величину для $\mathrm{M} = 0.4$. Видно, что неустойчивость, посчитанная по формуле (5.24) наступает раньше, чем в линейной теории. В итоге не совсем очевидной является процедура определения начальной толщины слоя завихренности: должна ли она получаться путём численного дифференцирования сеточных значений профиля скорости или поиском максимума производной аналитического профиля скорости. В последнем случае семейство кривых сдвинется в область меньших $Re_{\delta_{\omega,0}}$.

5.2.3 Сеточная сходимость и точность значений инкремента неустойчивости

С вычислительной точки зрения особенностью данной задачи является то, что сходимость значений рассматриваемых величин — инкремента неустойчивости γ и толщины потери импульса $\delta_{\theta,0}$ — достигается на сетках с разным числом узлов. Так, для определения γ оказывается достаточно сетки 512^2 ячеек (см. рисунок 5.22а), в то время как для интегрирования $\delta_{\theta,0}$ требуется сетка с числом ячеек не меньше, чем 1024^2 (см. рисунок 5.26а).

Оценку точности определения зависимости $\hat{v}_6 = \hat{v}_6(t)$ и γ в слое смешения будем проводить на основе расчётов для последовательности сеток 512^2 (1), 1024^2 (2), 2048^2 (3), 4096^2 (4) при $R_\nu = 1$, $\mathrm{Re}_{L_Y} = 4000$. При переходе к сетке (2) наблюдается ускорение развития возмущения на $\delta_\gamma \approx 0.0051$, в дальнейшем имеет место полное совпадение кривых скорости роста возмущения в слое смешения, к тому же более точные значения $\hat{v}_6 = \hat{v}_6(t)$ никак не влияют на значение γ в пределах погрешности



(а) (б)

Рисунок 5.22: (а) — участок зависимости $\hat{v}_6 = \hat{v}_6(t)$ полученный на последовательности сгущаемых сеток (1)–(4); (б) — зависимость нормированной толщины потери импульса от времени при $R_\nu = 1$ для различных чисел Рейнольдса. Результаты расчётов на сетке (2).

аппроксимации. Общую погрешность $\varepsilon_\gamma^{\text{total}}$ установленных значений γ можно определить как совокупность трёх относительных погрешностей — $\sigma_\gamma^{\text{grid}} \approx 0.0051$, определяемой незавершенной сеточной сходимостью, $\sigma_\gamma^{\text{comp}} \approx 0.01$, определяемой точностью модели слабосжимаемой жидкости, а также стандартной ошибкой аппроксимации StErr значения коэффициента γ:

$$\varepsilon_\gamma^{\text{total}} = \sqrt{\left(\left(\sigma_\gamma^{\text{grid}}\right)^2 + \left(\sigma_\gamma^{\text{comp}}\right)^2\right)\gamma^2 + \text{StErr}^2} \tag{5.31}$$

Значение $\sigma_\gamma^{\text{comp}}$ оценивается [28] по значению числа Маха M как

$$\sigma_\gamma^{\text{comp}} = \text{M}^2 = \left(\frac{\max\limits_{t\in[0,t_{\text{final}}]}\{u,v\}}{c}\right)^2, \tag{5.32}$$

где t_{final} — время окончания расчёта. Так как во многих режимах зависимость $\gamma = \gamma(t)$ в начальный момент времени $t \lesssim 0.2$ действительно оказывается линейной (или параболической), то ошибка вследствие разложения в ряд Тейлора по формулам (5.27, 5.28) не рассматривается.

5.2.4 Расчёт толщины потери импульса

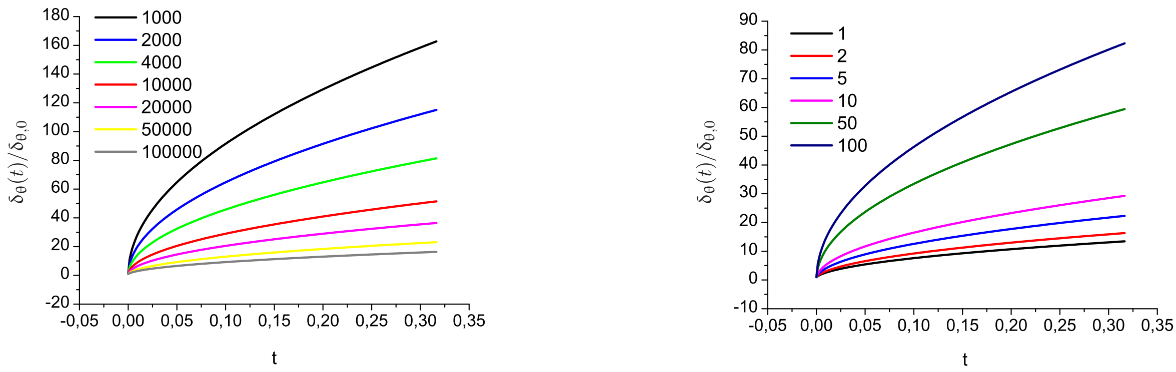
Исторически использование толщины потери импульса δ_θ связано с возможностью простого определения силы сопротивления F_X цилиндрического тела произвольной формы [196] при его внешнем обтекании:

$$F_\text{X} = \rho U_\infty^2 \delta_\theta, \tag{5.33}$$

где U_∞ — скорость на бесконечном удалении от тела, а толщина потери импульса рассчитывается по формуле

$$\delta_\theta(t) = \frac{1}{U_0^2}\int_0^{L_\text{Y}} (U_0 - U(t,y))\,dy. \tag{5.34}$$

В настоящей работе δ_θ рассматривается как количественная мера скорости взаимодействия (взаимного вовлечения) пограничных слоев горячей и холодной жидкости. По условиям алгоритма



(а) (б)

Рисунок 5.23: (а) — зависимость нормированной толщины потери импульса $\delta_\theta(t)/\delta_{\theta,0}$ от времени при $R_\nu = 50$ для различных чисел Рейнольдса; (б) — зависимость нормированной толщины потери импульса от времени при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_{L_Y} = 7500$ для различных отношений вязкости покоящейся и движущейся жидкости. Результаты расчётов на сетке (2).

расчёт δ_θ производится до тех пор, пока в ядре струи сохраняются слои (трубки тока), в которых продольная скорость не отличается от начальной, т.е. торможение не захватывает полностью всю струю. Первое значение интеграла (5.34) используется для нормировки толщины потери импульса, полученной в последующие моменты времени. Для сохранения устойчивости расчёта при различных R_ν, Re скорость звука изменялась в диапазоне $c = 10.0$–80.0. Более высокие значения использовались в случае более резких начальных сеточных градиентов μ при относительно малых числах Re $\gtrsim 1000$. Основная масса расчётов проводилась при $c = 10.0$.

На начальном участке развития процесса смешения δ_θ монотонно возрастает как $\sqrt{t}$, причём скорость нарастания достаточно резко убывает при росте Re_{L_Y}, как это показано на рисунке 5.22б для жидкости без разрыва вязкости. Такой же характер поведения (см. рисунок 5.23а) наблюдается и при существовании скачка μ, образующегося вследствие разности температур движущейся и покоящейся жидкости. Интересной особенностью является подавление толщины потери импульса при увеличении R_ν (см. рисунок 5.23б), ведь из-за больших вязких напряжений на границе обмен импульсами должен происходить гораздо быстрее. В действительности рост R_ν приводит к ускорению подавления поперечных гармонических возмущений (5.18), и, по прошествии некоторого времени, горячая маловязкая жидкость начинает скользить вдоль контактной границы с холодной средой. Таким образом, при смешении моли более вязкой жидкости выступают в роли препятствий, которые тормозят течение затопленной струи, что в нашем случае приводит к ускоренному росту толщины δ_θ, а для турбулентного течения, рассмотренного в работе [126], — к усилению поперечных флуктуаций скорости, ускорению «перекачки» энергии от усреднённого течения к турбулентности, и, одновременно, быстрому спаду турбулентной кинетической энергии после некоторого момента времени. В той же работе показано, что влияние вариации вязкости сводится к увеличению градиента средней скорости со временем, что и оказывает основной дестабилизирующий эффект.

На основе представления $\delta_\theta = \delta_\theta(t)$ в логарифмических координатах можно подобрать однопараметрическую аппроксимирующую функцию, удовлетворяющую асимптотике $\lim\limits_{t\to 0} = 1$, а также имеющую наклон «$1/2$» в логарифмических координатах. Подходящей зависимостью для аппроксимации является $\delta_\theta = A\sqrt{t + 1/A^2}$, где коэффициент A может быть функцией $A = A(\mathrm{Re}, R_\nu, c)$. Предполагая такую зависимость, представим графики значений A в виде $A = A(\mathrm{Re})$ при различных значениях R_ν и c (см. рисунок 5.24).

Из регулярности зависимостей $A = A(\mathrm{Re})$ следует, что скорость роста δ_θ практически не зависит от скорости звука (см. малиновые звёздочки при $R_\nu = 100$ на рисунок 5.24 а также колонку «$R_\nu = 100$» в таблице 15). Кроме того, представляя данные зависимости в логарифми-

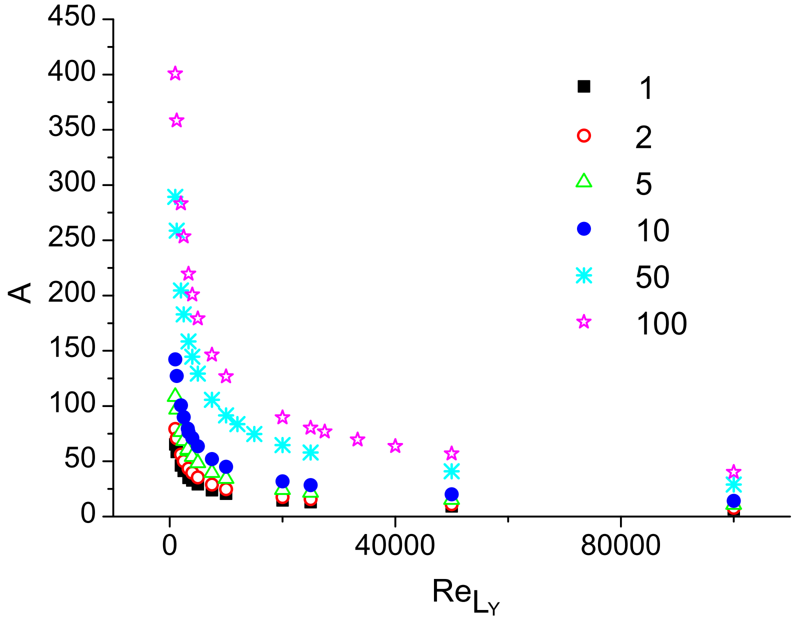


Рисунок 5.24: Зависимость коэффициента A от числа Re_{L_Y} при различных R_ν.

ческих координатах, можно установить, что для аппроксимации подходит семейство функций вида $A = \bar{B}/\sqrt{\mathrm{Re}}$.

Указанное семейство графиков можно также перестроить в переменных $(A, k_t^{-1/2})$, при этом оказывается, что $A = A(\mathrm{Re}, R_\nu)$ имеют вид линейных функций $A = Bk_t^{-1/2}$ (см. рисунок 5.25а). Все они с некоторой точностью проходят через точку (0,0) ($\mathrm{Re} \to \infty$), однако, приближение к началу координат происходит под разными углами. Полезно рассмотреть зависимость наклона линейной функций от R_ν: при $R_\nu \to \infty$ ($R_\nu = 100$) наблюдается $B \to 1$, в то же время, при $R_\nu \to 1$ (или при $R_\nu \to 0$, — этот случай, однако, не рассматривался) B должна быть ограниченной функцией. Сама зависимость $B = B(R_\nu)$ представлена на рисунок 5.25б. В качестве функции, хорошо аппроксимирующей точки и имеющей соответствующую асимптотику можно выбрать

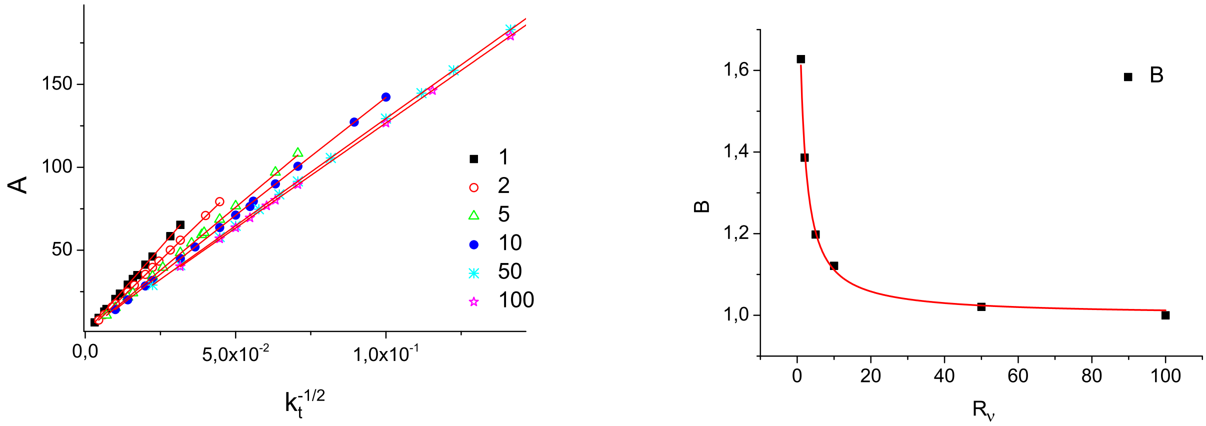
$$B = 1 + \frac{C}{1 + R_\nu}, \tag{5.35}$$

где C – некоторая константа. Таким образом, вся зависимость толщины потери импульса $\delta_\theta = \delta_\theta(t, \mathrm{Re}, R_\nu)$ хорошо параметризуется и в итоговом виде может быть представлена как

$$\delta_\theta = \sqrt{\left(\frac{C_1 + R_\nu}{1 + R_\nu}\right)^2 \frac{t}{k_t} + 1}, \tag{5.36}$$

где $C_1 = C + 1$.

Асимптотика $\delta_\theta \propto \sqrt{(t)}$ сохраняется лишь начальных стадиях ($t \lesssim 0.3$–0.4), в дальнейшем происходит выход на постоянное значение, что может говорить об ограниченности процесса смешения на некоторых режимах. Наличие коэффициента $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ в окончательной зависимости (5.36) связано с тем, что рассматриваемая задача оказывается подобной задачам теории пограничного слоя, — здесь роль стенки играет жидкая граница с неподвижной средой. Данный коэффициент является общим масштабом поперечных длин в общей теории погранслоя [196]. По характеру начальных условий рассмотренная задача относится к нестационарным [197], в то время как эволюция вязкой покоящейся жидкости является разгонным течением. Таким образом, результирующая зависимость $\delta_\theta \propto \sqrt{t}$ имеет аналогию с плоской стенкой, внезапно приводимой в движение (первая



(a) (б)

Рисунок 5.25: (а) — зависимость коэффициента A от безразмерного комплекса k_t для групп точек при различных R_ν; (б) — Зависимость коэффициента B (значения приведены к $B = B(R_\nu = 100)$) от отношения вязкостей R_ν. Красная линия показывает подобранную аппроксимирующую функцию.

задача Стокса). В этом случае уравнения Навье–Стокса сводятся к уравнению диффузии скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.37}$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость, решением которого является функция $u = U_0 \operatorname{erf} \eta$, где $\eta = y/(2\sqrt{t})$ – безразмерный комплекс. Таким образом, профили скоростей оказываются подобны между собой. В общей теории за толщину погранслоя принимается $u = 0.01U_0$, что даёт $\eta \approx 2$ и, следовательно, $\delta \propto \sqrt{\eta t}$.

5.2.5 Сеточная сходимость и точность значений толщины потери импульса

На рисунке 5.26а показан участок зависимости $\delta_\theta = \delta_\theta(t)$, рассчитанной на последовательности квадратных сеток с различным числом ячеек по одному направлению – 512, 600, 768, 1024, 2048, 4096. При увеличении количества ячеек зависимость несколько смещается вниз, однако, оказывается, что для вычисления δ_θ с точностью $\varepsilon_A^{\text{grid}} \approx 0.01187$ (относительно сетки (4)) достаточно сетки (2). Для сравнения в таблице 15 приведены значения δ_θ, полученные на сетке (1), достаточной для сходимости по γ (столбцы, отмеченные как «512^2»). При переходе к сетке (2) значения коэффициента A уменьшаются приблизительно в 0.72 раза для всех режимов. Предполагая последнее, ошибку полученных значений коэффициента A можно оценить как

$$\varepsilon_A = \sqrt{\left(\left(\sigma_A^{\text{grid}}\right)^2 + \left(\sigma_A^{\text{comp}}\right)^2\right) + \text{StErr}^2}, \tag{5.38}$$

где $\sigma_A^{\text{comp}} \lesssim 0.01$ — точность приближения слабосжимаемой жидкости, StErr – стандартная ошибка аппроксимации значений A.

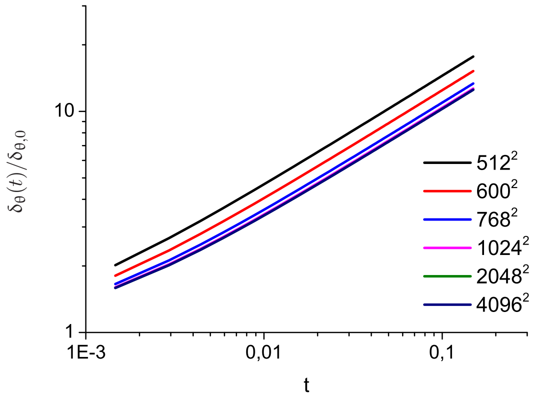
Таблица 15: Зависимость коэффициента A в аппроксимации толщины потери импульса от отношения вязкостей R_ν числа Рейнольдса, полученная сетке (1) и (2) с соответствующими погрешностями

Re	$R_\nu = 1$				$R_\nu = 2$			
	512^2		1024^2		512^2		1024^2	
	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A
1000	91.41493[a]	26.06611	65.36486[a]	1.01452	110.90377[a]	31.62757	79.29565[a]	1.23074
1250	81.76527[a]	23.31731	58.4623[a]	0.90739	99.19678[a]	28.29016	70.92402[a]	1.1008
2000	64.64977[a]	18.46294	46.19815[a]	0.71704	78.42688[a]	22.371	56.06963[a]	0.87025
2500	57.83217[a]	16.50669	41.33561[a]	0.64156	70.15149[a]	20.01381	50.14998[a]	0.77837
3333	50.0819[a]	15.1029	34.98731[a]	1.33467	60.76147[a]	17.34292	43.4292[a]	0.67406
4000	45.75446[a]	13.05431	32.70818[a]	0.50766	55.4768[a]	15.85661	39.6299[a]	0.61572
5000	41.16085[a]	11.95679	29.21118[a]	0.45339	49.64528[a]	14.19795	35.45601[a]	0.55031
7500	33.62824[a]	9.81269	23.82132[a]	0.36973	40.84957[a]	11.9101	28.94648[a]	0.44928
10000	28.91384[a]	8.29647	20.62246[a]	0.3201	35.31522[a]	10.50099	24.82026[a]	0.61977
20000	20.38389[a]	5.79373	14.59378[a]	0.22653	24.13015[a]	6.42414	17.71124[a]	0.27491
25000	18.22086[a]	5.17049	13.05363[a]	0.20262	22.30906[a]	6.46902	15.84405[a]	0.0026
50000	12.86251[a]	3.64867	9.21751[a]	0.14306	15.75132[a]	4.55507	11.19963[a]	0.17385
100000	9.15126[a]	2.60749	6.54768[a]	0.10164	11.20625[a]	3.2836	7.92644[a]	0.12304
	$R_\nu = 5$				$R_\nu = 10$			
	512^2		1024^2		512^2		1024^2	
	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A
1000	151.60034[a]	43.22315	108.40378[a]	1.68252	198.35126[a]	56.06405	142.32242[a]	2.20897
1250	135.6131[a]	38.67734	96.95955[a]	1.50489	177.81418[a]	50.59515	127.25029[a]	1.97786
2000	107.21749[a]	30.58227	76.65402[a]	1.18974	140.74717[a]	40.1582	100.61364[a]	1.56161
2500	95.89917[a]	27.35325	68.56274[a]	1.06415	125.90308[a]	35.91072	90.01444[a]	1.3971
3200	83.0568[a]	24.17893	60.59861[a]	0.94054	111.29918[a]	31.75547	79.56322[a]	1.23489
3333	84.76268	23.69233	59.37904[a]	0.92161	109.05541[a]	32.73652	76.33706[a]	1.18715
4000	75.82505[a]	21.63556	54.20278[a]	0.84127	99.56153[a]	28.41446	71.16452[a]	1.10453
5000	67.8279[a]	19.3626	48.47718[a]	0.75241	89.07455[a]	25.43678	63.65337[a]	0.98795
7500	55.40906[a]	15.82419	39.59457[a]	0.61454	72.73114[a]	20.76983	51.97405[a]	0.80668
10000	48.05396[a]	13.78296	34.27938[a]	0.53205	62.99895[a]	17.99643	45.01355[a]	0.69865
20000	34.19863[a]	9.97531	24.22919[a]	0.37607	44.77122[a]	12.94447	31.8345[a]	0.4941
25000	30.83207[a]	9.15143	21.68587[a]	0.33659	40.00434[a]	11.53598	28.4753[a]	0.44196
50000	21.49875[a]	6.16958	15.33314[a]	0.23799	28.25696[a]	8.16191	20.10003[a]	0.33049
100000	15.22329[a]	4.44305	10.78356[a]	0.16746	19.98217[a]	5.75499	14.23097[a]	0.22091
	$R_\nu = 50$				$R_\nu = 100$			
	512^2		1024^2		512^2		1024^2	
	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A	A	ε_A
1000	400.08368[b]	110.86519	289.2953[c]	3.50927	557.34062[c]	156.77092	400.67124[e]	3.45292
1250	360.64313[b]	101.95284	258.75413[c]	3.1388	499.3759[c]	141.14005	358.32429[d]	3.09072
2000	286.19029[a]	81.66935	204.5711[b]	2.6349	391.20899[c]	107.99496	283.28509[d]	2.44353
2500	256.09376[a]	73.16137	182.97722[b]	2.35677	354.06027[c]	100.75053	253.37197[c]	2.18559
3333	216.47037[a]	58.04453	158.4665[a]	2.45954	306.77711[c]	87.29576	219.53528[e]	1.89282
4000	199.906[a]	55.28509	144.65714[a]	2.2452	280.3198[c]	79.65515	200.71399[e]	1.72787
5000	180.1464[a]	50.79532	129.38325[a]	2.00814	250.82434[a]	71.70644	179.16178[b]	1.66647
7500	147.87754[a]	42.26504	105.63838[a]	1.6396	204.86655[a]	58.60586	146.29671[b]	1.36063
10000	128.16632[a]	36.69802	91.49069[a]	1.42002	176.41868[a]	49.76782	126.68215[a]	1.96622
12000	116.95569[a]	33.27902	83.69723[a]	1.29917				
15000	104.64049[a]	29.94479	74.71399[a]	1.15963				
20000	90.65687[a]	25.93204	64.74068[a]	1.00486	125.53906[a]	35.96454	89.59644[a]	1.39064
25000	81.07016[a]	23.10807	57.97632[a]	0.89988	112.46732[a]	32.29297	80.19394[a]	1.24476
27500					107.15724[a]	30.3682	76.80795[a]	1.19214
33333					97.83806[c]	28.27773	69.57728[b]	1.07997
40000					89.13486[c]	25.58467	63.56573[e]	0.98663
50000	57.44657[a]	16.47842	40.97817[a]	0.63603	79.444[a]	22.51844	56.93958[a]	0.88379
100000	41.00628[a]	12.01115	29.00222[a]	0.45029	56.41837[a]	16.27801	40.15014[a]	0.62412

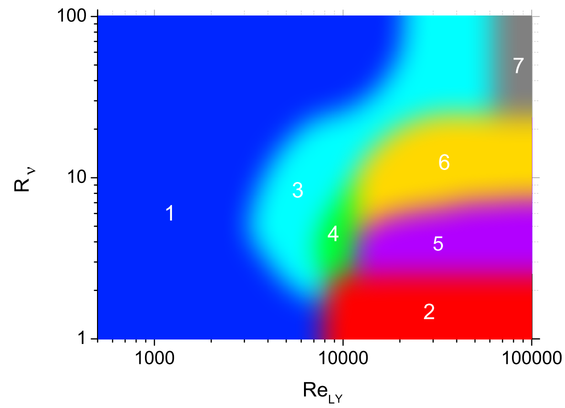
5.2.6 Феноменологическое описание процесса смешения

Всю совокупность различных исходов взаимодействия маловязкой струи с неподвижной жидкостью можно свести к ограниченному количеству сценариев. Эволюция процессов смешения определяется членами конвективного переноса и диффузии завихренности, генерации 6-й и иногда 12-й гармоник, каскадным слиянием вихрей вследствие двумерной природы течения, а также генерации крупномасштабной гармоники $m = 2$ в процессе смешения. Всего можно выделить несколько областей в пространстве параметров (R_ν, Re), которым соответствуют различные варианты эволюции сдвигового течения. Долговременный расчёт проводился для ограниченного числа случаев, отмеченных в дальнейшем описании и указывающих приблизительные диапазоны областей (см. рисунок 5.26б).

Случай 1. Область малых чисел Рейнольдса, при росте R_ν расширяющаяся в сторону больших Re и включающая в себя режимы $1 \lesssim R_\nu \lesssim 100$, $\mathrm{Re} = 1000$; $5 \lesssim R_\nu \lesssim 100$, $\mathrm{Re} = 5000$; $50 \lesssim R_\nu \lesssim 100$, $\mathrm{Re} = 10000$. В зависимости от отсутствия или наличия разрыва в распределении вязкости, диффузия



(а)



(б)

Рисунок 5.26: (а) — зависимость нормированной толщины потери импульса от времени при различном числе узлов расчётной сетки. Данные представлены в логарифмическом масштабе. (б) — условное расположение областей, в которых процесс смешения развивается сходным образом. Номер области соответствует варианту эволюции процесса.

завихренности происходит либо с одинаковой, либо с различной скоростью в поперечном к разрыву направлении. Скорость диффузии завихренности в высоковязкую жидкость будет приблизительно в R_ν раз быстрее, чем в маловязкую. При этом генерация системы вихрей не наблюдается, а возмущения поперечной скорости оказываются погашенными.

Случай 2. Случай без стратификации (или с малой стратификацией) вязкости при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_{LY} \gtrsim 10000$, где процессы конвективного переноса завихренности преобладают над процессом диффузии. В силу достаточно малой вязкости начальная завихренность представляет собой два тонких вихревых листа, которые при относительно медленном уширении начинают сворачиваться в вихри при $t = t_1$, этот вихревой слой имеет толщину $l_{\mathrm{mix}} \approx 0.1$. Скорость процесса дальнейшего слияния вихрей, по-видимому, зависит от числа Рейнольдса: при его повышении каскадное слияние вихрей ускоряется. При новом слиянии толщина слоя смешения практически удваивается ($l_{\mathrm{mix}} \approx 0.2$), третье слияние увеличивает слой смешения до $l_{\mathrm{mix}} \approx 0.8$. Четвёртое слияние (vortex merger) сопровождается разрушением центральной зоны струи. На рисунке 5.27а представлен момент распада вихревого листа с образованием вихрей от гармоник $m = 6$ и $m = 12$.

Случай 3. Умеренные числа Рейнольдса и разрывы вязкости относятся к промежуточной области с не до конца определёнными границами, связывающая режимы (2,5000) и (10,10000). Динамика процесса в этом диапазоне наблюдается совершенно различная, тем не менее можно выделить несколько стадий: в зависимости от перепада вязкости происходит резкое или не очень вовлечение маловязкой жидкости. В случае более сильного разрыва наблюдается меньшая глубина вовлечения, и, соответственно, меньший слой смешения $l_{\mathrm{mix}} \approx 0.005$–$0.02$. В момент времени $t = t_1$ происходит замыкание клубов от струи маловязкой жидкости в образовавшемся слое происходит активное перемешивание. Однако дальнейшего слияния вихревых образований не происходит — эволюция определяется исключительно диффузией завихренности. Образование промежуточного слоя смешения, возмущаемого гармоникой $m = 2$ представлено на рисунке 5.27б.

Случай 4. Развитое смешение слоев жидкости с разной вязкостью реализуется в достаточно узкой зоне включающей в себя точки (2,10000), (5, 10000). При $t = t_1$ происходит активное вовлечение (engulfment) с последующим замыканием клубов при $t = t_2$. При этом образуется слой активного перемешивания толщиной $l_{\mathrm{mix}} \approx 0.007$–$0.025$ (см. рисунок 5.27в). В момент времени $t = t_3$ начинается деформация перемешанного слоя гармоникой $m = 2$ вследствие слияния вихрей, что приводит к развитию крупномасштабного смешения, замыканию клубов гармоники $m = 2$ и росту толщины слоя до $l_{\mathrm{mix}} \approx 0.02$–$0.025$, в котором действуют вихри эллиптической формы. На начальном этапе происходит диффузия вихревого листа в обе стороны от разрыва, при этом при падении завихренности в диффундирующем слое начинают наблюдаться вихри эллиптической формы, которые в момент времени $t = t_4$ начинают «сматывать» изначальный вихревой лист, при этом размер нового вихря увеличивается до $r \approx 0.08$. В момент времени $t = t_5$ создаётся регулярный слой завихренности постоянной толщины $l_{\text{mix}} \approx 0.06$–$0.08$, состоящий из вихрей эллиптической формы. При $t = t_6$ наблюдается начало слияния вихрей в слое завихренности и его деформация появившимся вихрем. Этот большой вихрь от гармоники $m = 2$ «сматывает» оставшийся слой завихренности, что вновь приводит появлению системы регулярных вихрей при $t = t_7$. В конце, в момент времени $t = t_8$ — происходит слияние оставшихся пар вихрей.

Случай 5. Быстрое многокаскадное слияние с появлением гармоники $m = 12$ относится к области умеренных R_ν и больших Re: $2 \lesssim R_\nu \lesssim 10$, $\text{Re} \lesssim 10^5$. В момент времени $t = t_1$ начинается мелкомасштабное вовлечение маловязкой струи в неподвижную жидкость, а также свертывание клубов шестой гармоники, в этот момент свертывание вихря обгоняет диффузию, $t = t_2$ — свертывание клубов 12 гармоники. В момент времени $t = t_3$ — происходит сдваивание вихрей и переход только к гармонике $m = 6$, при $t = t_4$ — повторное сдваивание с образованием регулярного слоя перемешивания, при $t = t_5$ — третье слияние, начало крупномасштабного смешения (см. рисунок 5.27г). При $t = t_6$ — четвёртое слияние, начало активного разрушения центральной зоны струи.

Случай 6 реализуется при больших разрывах вязкости $50 \lesssim R_\nu \lesssim 100$ и $\text{Re} \sim 50000$. Формирование тонкого слоя смешения, который подвергается воздействию гармонических колебаний. При $t = t_1$ наблюдается «опрокидывание» гармоник $m = 6$, затем происходит замыкание клубов, формирование слоя смешения некоторой толщины. Дальнейшая эволюция определяется диффузией завихренности, поле которой представлено на рисунке 5.27д.

Случай 7 относится к области максимальных разрывов вязкости $50 \lesssim R_\nu \lesssim 100$ и $\text{Re} \sim 10^5$. Вихри маловязкой жидкости скользят по поверхности высоковязкой. В начальный момент времени имеется тонкий слой завихренности, который быстро диффундирует в неподвижную жидкость и возмущается при этом со стороны маловязкой струи. При $t = t_1$ происходит опрокидывание гребней маловязкой жидкости в высоковязкую. В момент времени $t = t_2$ — происходит замыкание клубов слое смешения, гомогенизация, а затем последующая деформация слоя гармоникой $m = 2$, $t = t_3$ — происходит повторное разрушение вихрей. По мере диффузии завихренности в слое смешения сохраняются сгустки завихренности со стороны маловязкой жидкости (см. рисунок 5.27е). Таким образом, мелкие вихри движутся со стороны маловязкой жидкости по контактной границе без активного перемешивания.

5.2.7 Заключение

В настоящем разделе были представлены результаты моделирования смешения жидкостей с различными вязкостями на основе расчёта слоистого плоскопараллельного течения термовязкой жидкости, который позволил выявить некоторые интересные особенности. Оказывается, что затопленная горячая струя, проникающая в холодную окружающую жидкость, имеет тесную связь с явлениями в пограничных слоях [3]. В начальный момент времени торможение захватывает только внешние области струи, затем вязкость приводит к замедлению частиц жидкости, расположенных все ближе и ближе к центральной оси. Наконец, вся струя превращается в пограничный слой, в котором начинают развиваться процессы перемешивания. Увеличение отношения вязкостей R_ν при прочих равных подавляет скорость роста неустойчивости. Несмотря на то, что используемый метод расчёта несколько завышает значение инкремента неустойчивости, он способен правильно определить характер роста возмущений на линейной стадии.

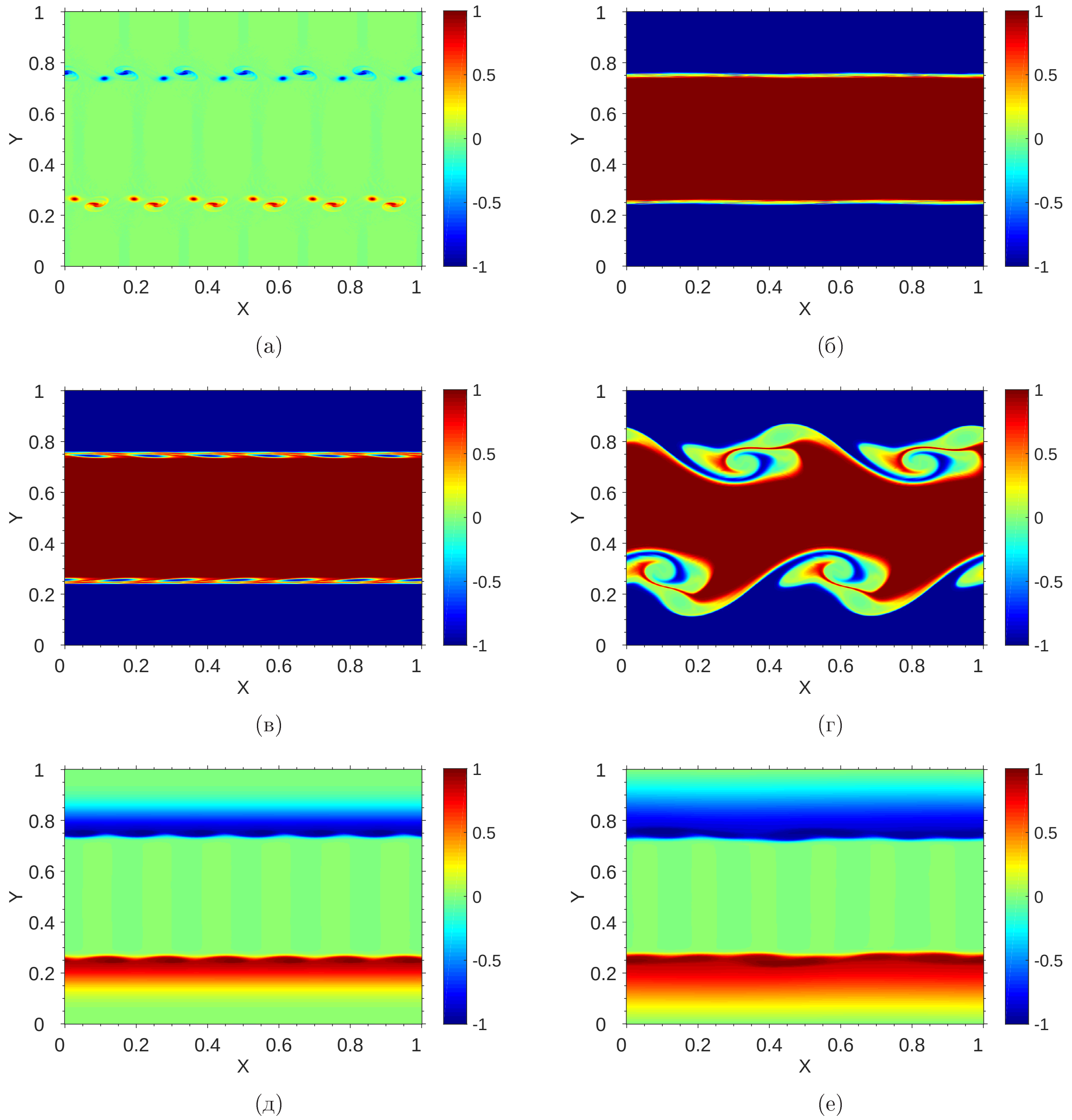


Рисунок 5.27: (а) — поле завихренности ($t = 0.54$) при $R_\nu = 1$, $\mathrm{Re} = 100000$; (случай 2); (б) — поле температуры ($t = 4.71$) при $R_\nu = 2$, $\mathrm{Re} = 5000$; (случай 3); (в) — поле температуры ($t = 2.63$) при $R_\nu = 5$, $\mathrm{Re} = 10000$ (случай 4); (г) — поле температуры ($t = 2.98$) при $R_\nu = 2$, $\mathrm{Re} = 50000$ (случай 5); (д) — поле завихренности ($t = 2.51$) при $R_\nu = 50$, $\mathrm{Re} = 50000$ (случай 6); (е) — поле завихренности ($t = 6.63$) при $R_\nu = 100$, $\mathrm{Re} = 100000$ (случай 7).

Толщина потери импульса, являющаяся удобным способом описания процесса смешения, обычно является функцией одного параметра, определяемого экспериментально. Увеличение отношения вязкостей и числа Рейнольдса обеспечивает подавление возмущений на границе двух слоёв, ограничивая рост δ_θ и препятствуя дальнейшему смешению, так что при больших отношениях вязкости центральный слой маловязкой жидкости просто скользит вдоль границы контакта.

С феноменологической точки зрения существует приблизительно 7 режимов смешивания, которые сменяют друг друга при различных R_ν, Re. В действительности такое разнообразие объясняется соотношением между членами уравнения завихренности. Сценарий эволюции потока в данный момент времени (свертывание вихревого слоя или медленная диффузия) определяется либо конвективным переносом завихренности, либо её диффузией. Другой особенностью, которая отличает обсуждаемый двумерный расчёт от экспериментальной практики, является наблюдаемый обратный каскад энстрофии, выражающийся в последующем слиянии мелких вихрей в более крупные. Стоит отметить, что численные значения гидродинамических величин анализируются в данной статье обладают различными скоростями сеточной сходимости. Тем не менее, опыт показывает, что при увеличении количества ячеек сетки, в целом, наблюдаются одинаковые этапы эволюции потока, развивающиеся с несколько более медленной скоростью (что видно из зависимости δ_θ от числа ячеек) при переходе от сетки 512^2 к сетке 1024^2. Последнее утверждение справедливо лишь в этом случае, если при свертывании слоя (листа) завихренности [198] не образуется паразитного вихря.

5.3 Турбулентное смешение в напорном течении термовязкой жидкости в трёхмерной прямоугольной области, периодически продолженной в двух направлениях

5.3.1 Постановка задачи

Расчёт течения термовязкой жидкости, динамическая вязкость которой является резкой функцией температуры T:

$$\mu = \mu_0 e^{\beta(T-T_0)/T_0}, \tag{5.39}$$

где μ_0 и T_0 — реперные значения вязкости и температуры, проводится в трёхмерной кубической области размером $L_X = L_Y = L_Z = L$, периодически продолженной в направлениях X и Y, в направлении Z она ограничена стенками с различной температурой — T_0 (на нижней стенке) и $T_0 + \Delta T$ (на верхней стенке), на которых устанавливается условие прилипания жидких частиц. Профиль скорости основного течения [199]

$$u_{prof}(z) = -\frac{Ce^{-\alpha z/L}}{\alpha(e^{\alpha}-1)}\left(L - Le^{\alpha z/L} - z + ze^{\alpha}\right), \quad z \in [0, L], \tag{5.40}$$

где $\alpha = \Delta T\beta/T_0$ — безразмерный комплекс,

$$C = \frac{L^2}{\mu_0}\frac{\Delta p}{L}, \tag{5.41}$$

является согласованным с перепадом давления Δp, поддерживаемым в дальнейшем в направлении X, а также с линейным распределением температуры:

$$T(z) = \frac{\Delta T}{L}z + T_0. \tag{5.42}$$

Значение безразмерного параметра α выбиралось таким, чтобы точка перегиба была удалена от стенок, а высокоскоростное ядро потока не слишком сильно приближалось к пристеночной области (рисунок 5.28a). При данной конфигурации в начальный момент времени вязкость между стенками отличается на два порядка.

Давление и плотность связаны соотношением для слабосжимаемой жидкости:

$$p = c^2(\rho - \rho_0), \tag{5.43}$$

где c — скорость звука, ρ — плотность жидкости в некоторой точке, ρ_0 — характерная (реперная) плотность. Скорость звука c выбирается таким образом, чтобы число Маха M во всей расчётной области удовлетворяло соотношению

$$\mathrm{M}^2 = \left(\frac{\max[u,v,w]}{c}\right)^2 \leqslant 0.01. \tag{5.44}$$

В свободных сдвиговых течениях безразмерное время t можно определить по характерной (среднемассовой) скорости U_0, по толщине начальной потери импульса $\delta_{\theta,0}$ как $t = \frac{\tilde{t}U_0}{\delta_{\theta,0}}$, где $\tilde{t}$ — физическое время [124]. В настоящей работе вместо толщины потери импульса будет использоваться длина канала L (протяженность расчётной области в направлении X). Помимо характерного времени $t_0 = L/U_0$, по аналогии с расчётами плоскопараллельного течения можно ввести набор чисел Рейнольдса Re:

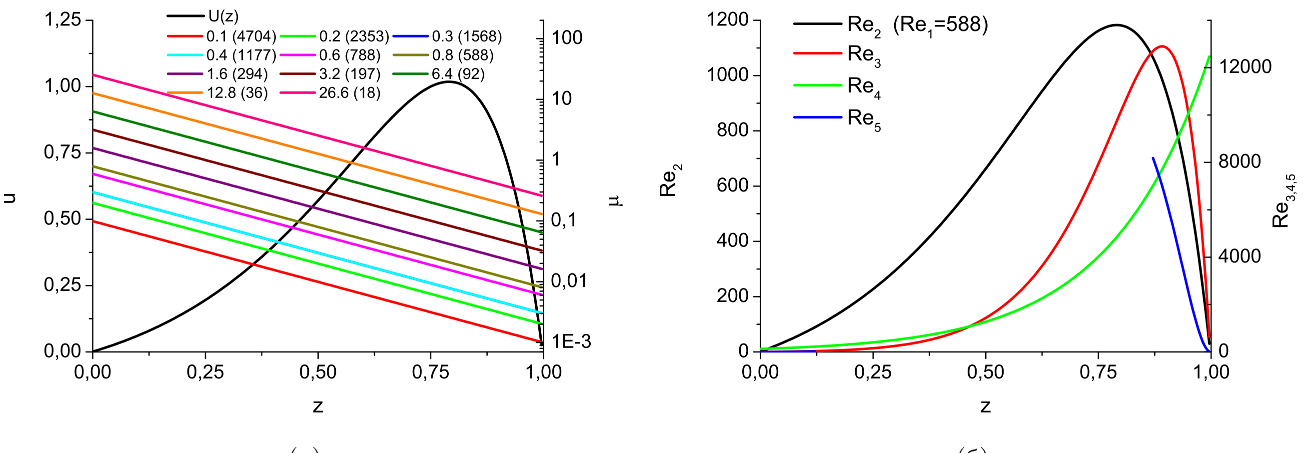
- $\mathrm{Re}_1 = \frac{U_0 L \rho_0}{\mu_{\mathrm{mean}}}$, где U_0 — среднемассовая скорость, L — высота канала, ρ_0 — характерная плотность, μ_{mean} — среднемассовая вязкость;

– $\mathrm{Re}_2 = \frac{u^* L \rho_0}{\mu_{\mathrm{mean}}}$, где $u^* = u(z)$ — локальная скорость основного течения, L — см. выше, ρ_0 — см. выше, μ_{mean} — см. выше;
– $\mathrm{Re}_3 = \frac{u^* L \rho_0}{\mu^*}$, где $u^* = u(z)$ — локальная скорость основного течения, L — см. выше, ρ_0 — характерная плотность, $\mu^* = \mu(z)$ — локальная динамическая вязкость, являющая функцией ширины канала;
– $\mathrm{Re}_4 = \frac{U_0 L \rho_0}{\mu^*}$, где U_0 — см. выше, L — см. выше, ρ_0 — см. выше, $\mu^* = \mu(z)$ — см. выше;
– $\mathrm{Re}_5 = \frac{u^* y^* \rho_0}{\mu^*}$, где $u^* = u(z)$ — см. выше, $\mu^* = \mu(z)$ — см. выше, z^* — расстояние от стенки, определяемое в области

$$|z^*| \leqslant 0.15 \cup |L - z^*| \leqslant 0.15.$$

Множественность определения Re вызвана резким изменением, как профиля скорости, так и вязкости поперёк канала, так что среднемассовые показатели могут дать неверное представление о поведении течения в различных слоях, особенно на этапе развития неустойчивости.

Действительно, достаточно сильная вариация вязкости поперёк канала подразумевает возможность существования различных режимов течения, возникающих в слоях с различной температурой, что, очевидно, связано с величиной работы вязких напряжений, играющих важную роль в развитии сдвиговых неустойчивостей. В частности, на рисунке 5.28б приведены характерные профили локальных чисел Рейнольдса Re_2–Re_5 для среднемассового $\mathrm{Re}_1 = 588$, демонстрирующие серьезные затруднения при анализе свойств течения на основе безразмерных параметров, так как, во-первых, априори неизвестно, может ли хотя бы один из перечисленных параметров являться критерием, однозначно определяющим будущую эволюцию течения, и, во-вторых, какое из чисел Re_1–Re_5 наилучшим образом подходит для описания картины течения. В-третьих, можно заметить, что во многих теоретических работах число Рейнольдса используется для оценки пространственно-временных масштабов течения, качества их сеточного разрешения, а также общей вычислительной сложности проведения расчётов. Рассматривая рисунок 5.28б, можно убедиться в том, что, с одной стороны, значение среднемассового Re_1 позволяет отнести течение к устойчивым ламинарным движениям, с другой, — максимальные значения Re_2 в ядре потока говорят о возможности развития возмущений в этой области и появлении периодических движений.



(а) (б)

Рисунок 5.28: (а) — распределение профиля скорости $u = u(z)$ (левая шкала), а также динамической вязкости $\mu = \mu(z)$ при различных значениях μ_0, отмеченных в цветовой легенде, поперёк канала (правая шкала в логарифмическом масштабе); рядом со значением вязкости в скобках указано среднемассовое число Re_1; (б) — распределение безразмерных чисел Рейнольдса Re_2–Re_5 при среднемассовом $\mathrm{Re}_1 = 588$.

Число Re_3, взятое по переменной вязкости и скорости, демонстрирует на порядок большие значения, которые, начиная с $z \gtrsim 0.5$ соответствуют числам перехода к турбулентности ($\mathrm{Re} \approx 2300$

в трубе), а в окрестности своего максимума $z \approx 0.9$, смещённого к горячей стенке, и вовсе соответствуют значениям смесительного перехода ($\mathrm{Re} \approx 10000$ — [191]). Числа Рейнольдса ниже 2000 зачастую рассматриваются как переходные, однако, некоторые специфические типы турбулентности [200] могут поддерживаться и при $\mathrm{Re} \sim 1000$, а крупномасштабная перемежаемость исчезает при $\mathrm{Re} \approx 1800$.

Число Re_4, взятое по переменной вязкости, монотонно возрастает по направлению к горячей стенке со значениями, подразумевающими возможность турбулентного перехода в диапазоне $z \approx 0.5$–0.6. Использование этого параметра позволяет потенциально разделить течение на два слоя, — в одном из них ламинарный характер течения будет сохраняться, а в другом — будет происходить его турбулизация. Впрочем, завышенные значения в области горячего пристенка позволяют усомниться в значимости Re_4.

«Пристеночное» число Рейнольдса Re_5 необходимо для оценки развития турбулентности в пограничных слоях и в области своего определения имеет диапазон значений, сравнимый с $\mathrm{Re}_{3,4}$, что с формальной точки зрения говорит о возможности существования развитого турбулентного течения в пристеночном слое.

5.3.2 Постановка начальных условий в расчётной области

Корректность результатов моделирования физического явления обеспечивается не только свойствами математического метода, но и правильным заданием начальных и граничных условий. При моделировании турбулентности вычислитель сталкивается с «порочным кругом» [201], когда для адекватного моделирования необходимо задать её основные характеристики. Для успешного воспроизводства характеристик турбулентности используется несколько подходов, включающих в себя постановку периодических граничных условий, задание условий на входе путём масштабирования поля скорости [202] из областей, находящихся ниже по потоку (выделение мгновенных случайных полей скоростей), задание кармановского энергетического спектра в фурье-пространстве [21], а также проведение вспомогательного моделирования. Последний способ часто используется при исследовании ламинарно-турбулентного перехода, когда в качестве начальных или граничных условий используются характеристики наиболее неустойчивых мод, полученных из решения уравнения Орра–Зоммерфельда [203].

Наиболее простым методом задания турбулентных течений является наложение случайных флуктуаций на средний профиль скорости. В силу того, что энергетический спектр случайной величины, получаемой с помощью стандартных псевдослучайных методов генерации, равномерно распределен во всем диапазоне значений (волновых чисел — в случае спектрального подхода) [204], то нехватка энергии в длинноволновой области приводит либо к замедленной турбулизации течения, либо к быстрому затуханию турбулентности и ламинаризации потока [201]. Данный факт был подтвержден авторами в собственных расчётах, однако, специальному изучению он не подвергался.

В общем случае задание гауссова распределения для автокорреляционной функции может оказаться достаточным для имитации свойств однородной изотропной турбулентности. Кроме того, возможна генерация искусственных входных данных с предзаданными (экспериментально определяемыми) статистическими свойствами — средними значениями, автокорреляционными и взаимными корреляционными функциями, а также моментами высших порядков.

Общий алгоритм модификации белого шума связан с установлением длины затравочной последовательности процессора (1); модификацией её на значений (2) и генерацией нового случайного распределения чисел в области значений $[-1,1]$ (3), которое в дальнейшем подвергается обработке другими фильтрами.

Далее приведено краткое описание цифрового фильтра с компактным носителем (compact support) случайного поля [201], использовавшегося при задании начальных данных, и определяющего двухточечную корреляцию, на основе случайной последовательности x'_m такой, что $\overline{x'}_m = 0$, $\overline{x'_m x'_m} = 1$, где черта обозначает усреднение по членам последовательности. Следующая свертка определяет цифровой линейный нерекурсивный фильтр:

$$x''_m = \sum_{n=-W_f^{\mathrm{X}}}^{W_f^{\mathrm{X}}} b_n x'_{m+n}, \tag{5.45}$$

где b_n — коэффициенты фильтра, W_f^{X} — база, полуширина или носитель фильтра. Так как $\overline{x'_m x'_n} = 0$ при $m \neq n$, то

$$\frac{\overline{x''_m x''_{m+k}}}{\overline{x''_m x''_n}} = \sum_{j=-W_f^{\mathrm{X}}+k}^{W_f^{\mathrm{X}}} b_j b_{j-k} / \sum_{j=-W_f^{\mathrm{X}}}^{W_f^{\mathrm{X}}} b_j^2, \tag{5.46}$$

представляет собой соотношение между коэффициентами фильтра и автокорреляционной функцией для x''_m. Процедура фильтрации обобщается на случай трёхмерного случайного поля и представляет собой свертку трёх одномерных фильтров:

$$b_{ijk} = R_S b_x(i) \cdot b_y(j) \cdot b_z(k), \tag{5.47}$$

где R_S (random span) — дополнительный параметр, позволяющий изменять амплитуду при фильтрации. Для обращения (5.46) необходимо знать автокорреляционную функцию $R_{x''x''}(\vec{x}, \vec{r})$, где $\vec{x}$ — радиус-вектор положения исходной точки, или (и) воспользоваться понятием длины корреляции. Из предположения об однородности турбулентности следует, что корреляционная функция зависит от расстояния между точками $r = |\vec{r}|$, тогда эта функция примет вид

$$R_{x''x''}(r,0,0) = \exp\left(\frac{-\pi r^2}{4\,(l_c^{\mathrm{X}})^2}\right), \quad R_{x''x''}(0) = 1, \quad \lim_{r\to\infty} R_{x''x''}(r) = 0, \tag{5.48}$$

При фильтрации сеточного множества с пространственным шагом Δx таким, что $l_c^{\mathrm{X}} = n_c^{\mathrm{X}} \Delta x$, тогда автокорреляционная функция примет вид:

$$\frac{\overline{x''_m x''_{m+k}}}{\overline{x''_m x''_m}} = R_{x''x''}(k\Delta x) = \exp\left(-\frac{\pi (k\Delta x)^2}{4((n_c^{\mathrm{X}}\Delta x)^2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi k^2}{4\,(n_c^{\mathrm{X}})^2}\right), \tag{5.49}$$

а коэффициенты фильтрации примут вид

$$b_k \approx \hat{b}_k / \left(\sum_{j=-W_f^{\mathrm{X}}}^{W_f^{\mathrm{X}}} \hat{b}_j^2\right)^{1/2}, \quad \hat{b}_k = \exp\left(-\frac{\pi k^2}{2\,(n_c^{\mathrm{X}})^2}\right). \tag{5.50}$$

Точность аппроксимации (5.50) определяется из соотношения

$$\max_k \left| \exp\left(-\frac{\pi k^2}{4\,(n_c^{\mathrm{X}})^2}\right) - \sum_{j=-W_f^{\mathrm{X}}+k}^{W_f^{\mathrm{X}}} b_j b_{j-k} / \sum_{j=-W_f^{\mathrm{X}}}^{W_f^{\mathrm{X}}} b_j^2 \right| \leqslant 0.001, \tag{5.51}$$

при $W_f^{\mathrm{X}} \geqslant 2n_c^{\mathrm{X}}$, $n_c^{\mathrm{X}} = 2, \ldots, 100$. Из неравенства (5.51) следует, что носитель фильтра должен быть больше удвоенной корреляционной длины.

Для фильтрации необходимо задать корреляционные длины по соответствующим пространственным направлениям $l_c^{\mathrm{X}} = n_c^{\mathrm{X}} \Delta x$, $l_c^{\mathrm{X}} = n_c^{\mathrm{X}} \Delta y$, $l_c^{\mathrm{Z}} = n_c^{\mathrm{Z}} \Delta z$, полуширины цифрового фильтра W_f^{X}, W_f^{Y}, W_f^{Z}.

Фильтрованное поле скорости находится с помощью свертки:

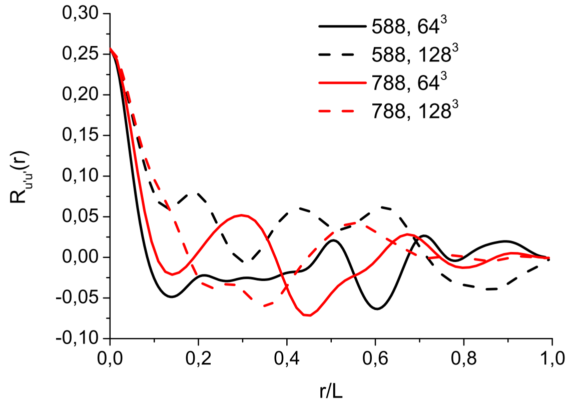
$$u(i,j,k) = \sum_{i'=-n_X}^{n_X} \sum_{j'=-n_Y}^{n_Y} \sum_{k'=-n_Z}^{n_Z} R_S b(i')b(j')b(k')A(i+i',j+j',k+k'), \tag{5.52}$$

где исходный массив случайных данных A имеет следующий размер:

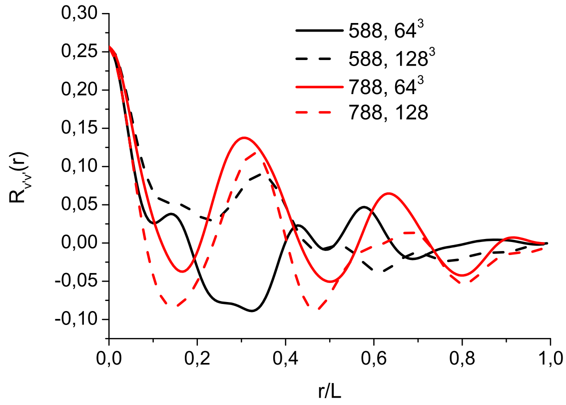
$$A = \left[-n_c^X + 1 : n_X + n_c^X, -n_c^Y + 1 : n_Y + n_c^Y, -n_c^Z + 1 : n_Z + n_c^Z\right]$$

Результирующее поле турбулентных пульсаций может иметь ненулевую дивергенцию, по крайней мере, это не гарантируется разработчиками метода [201]. На рисунке 5.29 в качестве примера приведены графики автокорреляционных функций скорости в направлениях X и Y — $R_{u'u'}(r/L)$ и $R_{v'v'}(r/L)$ от безразмерного расстояния между точками корреляции r/L. Так как при свертке случайного поля скорости с коэффициентами фильтра не использовалось предположение о периодичности расчетной области, то количество точек, участвующих в выборке, уменьшается с увеличением r. Таким образом, при $r/L \gtrsim 0.5$ этого числа явно не достаточно для получения достоверных значений. Тем не менее, в обоих направлениях виден резкий спад корреляционной зависимости вплоть до небольших отрицательных значений на участке 0.1–0.2, что, в принципе, соответствует характерной длине корреляции, устанавливаемой фильтром ($L/8$ — см. таблицу 16, 17) таким образом, что на неё приходится не менее 6 ячеек расчетной сетки.

Следует заметить, что хотя корреляционная статистика и служит руководством при выборе соотношения между размером расчетной области и длиной корреляции для прямого численного моделирования, однако, не существует [69] общепризнанных (обязательных) требований касательно размера расчетной области для надежного устранения влияния периодичности вдоль основного течения.



(а)



(б)

Рисунок 5.29: Автокорреляционная функция $R_{u'u'} = R_{u'u'}(r/L)$ в направлении X (а) и $R_{v'v'} = R_{v'v'}(r/L)$ — в направлении Y (б), рассчитанная на сетках 64^3 и 128^3.

5.3.3 Фильтр соленоидального поля

В рассматриваемой задаче сжимаемость может оказать существенное влияние на основное течение, так как при развитии турбулизации могут появляться области достаточно сильной завихренности, создающие градиенты давления, сопоставимые с градиентом основного течения. Таким образом, необходимо минимизировать влияние начальной недивергентности поля скорости с учётом пространственной периодичности по направлениям X и Y.

Особенно просто задание соленоидального поля выглядит при использовании спектральных методов. В этом случае оказывается достаточным равенство нулю скалярного произведения волнового вектора $\vec{k}$ и Фурье-компонент скорости $\mathfrak{F}[\vec{u'_k}]$ [205]:

$$\left(\vec{k}, \mathfrak{F}[\vec{u'_k}]\right) = 0. \tag{5.53}$$

Добиться требуемого результата можно также путём задания случайных функций f и g, а затем, по правилам векторной алгебры, задать трёхмерное поле $\nabla f \times \nabla g$ [206], обладающее свойством соленоидальности; с использованием разложения Гельмгольца, или же с применением итерационных методов получения соленоидальной составляющей поля скорости [207] (гауссова линейная регрессия).

Для целей настоящей работы авторами был реализован алгоритм схемы коррекции дивергенции [208] (соленоидальности — divergence correction scheme) в изложении [209], который реконструирует соленоидальное поле путём минимизации расстояния до исходных данных методом наименьших квадратов при условии сохранения массы, что даёт следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \min\left\{\sum\limits_{i,j,k=1}^{n_\mathrm{X},n_\mathrm{Y},n_\mathrm{Z}} (u^{ijk}_\mathrm{init} - u^{ijk}_\mathrm{corr})^2 + (v^{ijk}_\mathrm{init} - v^{ijk}_\mathrm{corr})^2 + (w^{ijk}_\mathrm{init} - w^{ijk}_\mathrm{corr})^2\right\}, \\ \sum\limits_{i'=1}^{n_\mathrm{X}} d^{ii'}_{n_\mathrm{X}} u^{i'jk}_\mathrm{corr} + \sum\limits_{j'=1}^{n_\mathrm{Y}} d^{jj'}_{n_\mathrm{Y}} v^{ij'k}_\mathrm{corr} + \sum\limits_{k'=1}^{n_\mathrm{Z}} d^{kk'}_{n_\mathrm{Z}} w^{ijk'}_\mathrm{corr} = 0, \end{cases} \tag{5.54}$$

где u^{ijk}, v^{ijk}, w^{ijk} — обозначают компоненты скорости, начальные (*init*) и скорректированные (*corr*); $d^{ii'}_{n_\mathrm{X}}$, $d^{jj'}_{n_\mathrm{Y}}$, $d^{kk'}_{n_\mathrm{Z}}$ — одномерные сеточные (дискретные) дифференциальные операторы в направлениях X, Y, Z, определяемые разностной схемой. Для центральных разностных аппроксимаций с учётом граничных условий прилипания одномерный сеточный дифференциальный оператор имеет вид:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \vdots & \vdots \\ \dots & 1/2 & 0 & 1/2 & \vdots \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ & \dots\dots & & \ddots & \vdots \\ & \dots\dots & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

в то время как для периодических граничных условий первая и последняя строки матрицы модифицируются, так как в этом случае используются значения на противоположной границе:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1/2 & 0 & 1/2 & \vdots \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ & \dots\dots & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \dots & & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Существует также реализация этого метода с весовыми коэффициентами [209]:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i,j,k=1}^{n_\mathrm{X},n_\mathrm{Y},n_\mathrm{Z}} \alpha_1(u^{ijk}_\mathrm{init} - u^{ijk}_\mathrm{corr})^2 + \alpha_2(v^{ijk}_\mathrm{init} - v^{ijk}_\mathrm{corr})^2 + \alpha_3(w^{ijk}_\mathrm{init} - w^{ijk}_\mathrm{corr})^2, \\ \text{так что} \sum\limits_{i'=1}^{n_\mathrm{X}} d^{ii'}_{n_\mathrm{X}} u^{i'jk}_\mathrm{corr} + \sum\limits_{j'=1}^{n_\mathrm{Y}} d^{jj'}_{n_\mathrm{Y}} v^{ij'k}_\mathrm{corr} + \sum\limits_{k'=1}^{n_\mathrm{Z}} d^{kk'}_{n_\mathrm{Z}} w^{ijk'}_\mathrm{corr} = 0. \end{cases} \tag{5.55}$$

Весовые коэффициенты α_1–α_3 позволяют определить степень корректировки каждой компоненты скорости. Чем меньше коэффициент, тем больше изменение соответствующей компоненты.

Алгоритм оптимизационной задачи включает в себя несколько этапов:

1. решение задачи на собственные значения для матриц $d_{n_X}d_{n_X}^T$, $d_{n_Y}d_{n_Y}^T$, $d_{n_Z}d_{n_Z}^T$. Разложение на собственные значения формулируется как:

$$\begin{aligned} d_{n_X}d_{n_X}^T &= \Phi_{n_X}\Lambda_{n_X}\Phi_{n_X}^T, \\ d_{n_Y}d_{n_Y}^T &= \Phi_{n_Y}\Lambda_{n_Y}\Phi_{n_Y}^T, \\ d_{n_Z}d_{n_Z}^T &= \Phi_{n_Z}\Lambda_{n_Z}\Phi_{n_Z}^T, \end{aligned} \tag{5.56}$$

Φ_{n_X},Φ_{n_X},Φ_{n_Z} —матрицы левых собственных векторов.

2. Расчёт дивергентной невязки (divergence residue):

$$S_{init}^{ijk} = \sum_{i'=1}^{n_X} d_{n_X}^{ii'} u^{i'jk} + \sum_{j'=1}^{n_Y} d_{n_Y}^{jj'} v^{ij'k} + \sum_{k'=1}^{n_Z} d_{n_Z}^{kk'} v^{ijk'}; \tag{5.57}$$

$$\Gamma^{ijk} = \frac{\Lambda_{n_X}^i}{\alpha_1^2} + \frac{\Lambda_{n_Y}^j}{\alpha_2^2} + \frac{\Lambda_{n_Z}^k}{\alpha_3^2}. \tag{5.58}$$

3. Расчёт множителей Лагранжа:

$$\mu^{ijk} = \sum_{l,m,n=1}^{n_X,n_Y,n_Z} \Phi_{n_X}^{il}\Phi_{n_Y}^{jm}\Phi_{n_Z}^{kn}/\Gamma_{lmn} \sum_{i',j',k'=1}^{n_X,n_Y,n_Z} \Phi_{n_X}^{i'l}\Phi_{n_Y}^{j'm}\Phi_{n_Z}^{k'n} S_{init}^{i'j'k'}. \tag{5.59}$$

4. Обновление значений скорости:

$$\begin{aligned} u_{\text{corr}}^{ijk} &= u_{\text{init}}^{ijk} - \sum_{i'=1}^{n_X} \alpha_1^{-2} d_{n_X}^{i'i} \mu^{i'jk}, \\ v_{\text{corr}}^{ijk} &= v_{\text{init}}^{ijk} - \sum_{j'=1}^{n_Y} \alpha_2^{-2} d_{n_Y}^{j'j} \mu^{ij'k}, \\ w_{\text{corr}}^{ijk} &= w_{\text{init}}^{ijk} - \sum_{k'=1}^{n_Z} \alpha_3^{-2} d_{n_Z}^{k'k} \mu^{ijk'}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

В настоящей работе в качестве начальных условий задаётся двумерный вырожденный шум, связанный с заданием пульсаций скорости в двух направлениях периодичности, и удовлетворяющий более жёсткому условию, нежели чем обычная соленоидальность

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \tag{5.61}$$

то есть требуя

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \tag{5.62}$$

мы заранее предполагаем

$$u'(0,y) = u'(y), \quad v'(0,y) = v'(x) \tag{5.63}$$

при этом $w' = 0$. Тогда дивергенция будет автоматически тождественна нулю, а по росту скорости между стенками w можно будет судить об интенсивности процесса возбуждения турбулентности и развития трёхмерного течения.

Указанное упрощение, в частности, позволяет избежать применения описанного выше фильтра коррекции дивергенции в трёхмерной реализации, к числу недостатков которого относится использование 9 (!) вложенных циклов при расчёте множителей Лагранжа. Однако для двумерного недивергентного шума описанный фильтр демонстрирует высокую эффективность и быстроту работы.

Очевидно, что задаваемый шум является далеко не физичным явлением и может применяться при том предположении, что трёхмерная турбулентность имеет сравнительно короткую историю.

5.3.4 Постановка граничных условий

В рассматриваемой постановке предлагается в качестве начальных условий задать на стационарном профиле скорости мелкомасштабные турбулентные пульсации и проследить их временную эволюцию в периодическом канале. Будем также предполагать, что расчётная сетка имеет $(n_{\mathrm{X}},n_{\mathrm{Y}},n_{\mathrm{Z}})$ расчётных ячеек в соответствующих пространственных направлениях. В этом случае для поддержания постоянного значения перепада давления Δp и переноса значений скорости локальные инварианты Римана, по которым определяются граничные условия, терпят разрыв на границе.

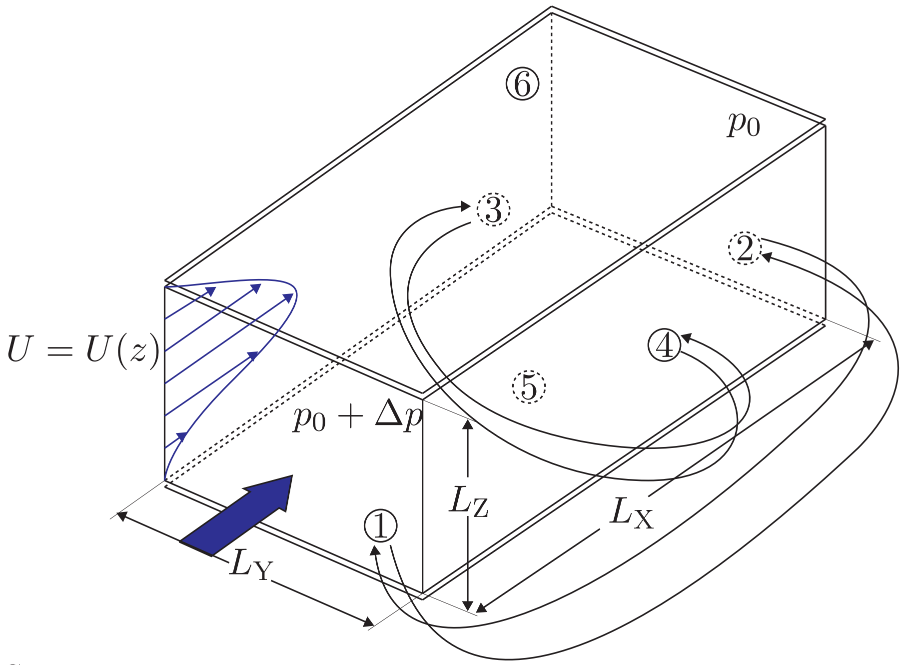


Рисунок 5.30: Схема расчетной области: границы отмечены номерами 1 – 6, периодические граничные условия, связанные друг с другом показаны двойными стрелками, синяя толстая стрелка показывает общее направление потока, тонкие стрелки показывают проекцию плоского профиля скорости на границу 3.

Основываясь на инвариантах Римана для слабосжимаемой жидкости (см. Раздел 3.2), отвечающих за перенос возмущений в координатных направлениях построим граничные условия (ГУ) для расчетной области, изображенной на рисунке 5.30, в составе квазипериодического граничного условия (грани 1 и 2), периодических граничных условий на передней (3) и задней гранях (4), условия прилипания для значений потоковых переменных на стенках 5 и 6. Использование квазипериодических условий даёт возможность организовать пространственно-периодическое течение, на концах которого имеется фиктивный разрыв плотности. Указанный прием позволяет избежать решения задач установления требуемого профиля скорости и линейного распределения температур; а также распространения турбулентных пульсаций, переносимых основным потоком от входной границы, что должно позволить существенно сократить процесс счёта. Использование «квазипериодических» граничных условий позволяет задавать пространственное поле турбулентных пульсаций по длине канала и множество раз «прокачивать» его по одному и тому же участку.

Граничные условия для скоростей дополняются условием постоянства температуры на нижней $T(i,j,n_{\mathrm{Z}}+1/2) = T_0$ и верхней стенках $T(i,j,n_{\mathrm{Z}}+1/2) = T_0 + \Delta T$.

В расчётах использовались прямоугольные сетки с числом ячеек, одинаковым по трем пространственным направлениям 64^3, 128^3, 256^3. Так как схема КАБАРЕ относится к классу явных численных методов, то по условию устойчивости шаг по времени определяется минимальным размером шага по пространству, относящимся к размеру канала L. Данное обстоятельство существенно

Таблица 16: Таблица основных расчётных параметров

Название параметра	Обозначение	Значение
Реперная температура	T_0	127
Температура на нижней стенке	T_1	127
Температура на верхней стенке	T_2	273
Показатель экспоненты	β	-4
Реперная плотность	L	0.2
Теплопроводность	ρ_0	0.3
Теплоемкость	c_p	2000
Число Куранта	CFL	0.15

увеличивает трудоемкость расчётов при измельчении сетки поперёк канала, особенно при длительных временах установления течения. Таким образом, используемые сетки позволяют в основном разрешить крупномасштабные движения. Полный список параметров, определяющих расчётную конфигурацию, приведен в таблицах 16, 17.

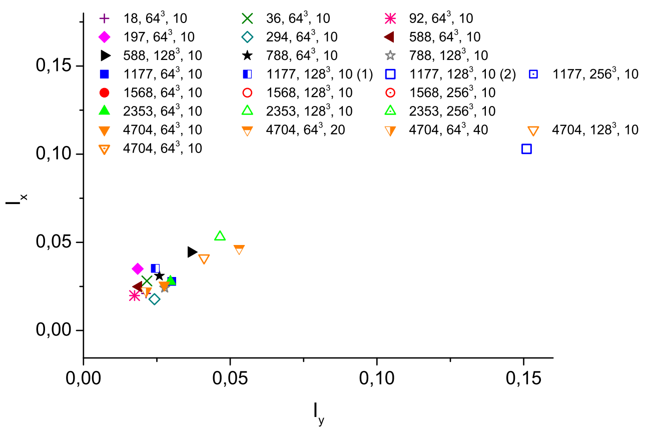


Рисунок 5.31: Диаграмма интенсивностей начальных возмущений по направлениям X и Y.

5.3.5 Замечания о программной реализации

Алгоритм численного метода КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости был реализован на языке высокого уровня Fortran F90 с применением гибридного распараллеливания на основе технологий OpenMP и MPI. Для генерации случайного поля скорости и его последующей фильтрации используется мастер-процесс, который затем проводит рассылку полученного случайного поля другим процесса группы. Декомпозиция по пространству осуществлялась в направлении X. Расчёты проводились на ЭВМ ОИВТ РАН, ЭВМ МВС-10п МСЦ РАН, ЭВМ ЦОД МФТИ. Детали текущей реализации в части моделирования изотермических течений обсуждались в работе [182].

Таблица 17: Таблица параметров, изменяемых в расчётах

<table>
<tr><th>Номер
расчёта</th><th>Реперная вязкость,
μ_0</th><th>Перепад давления,
Δp</th><th>Среднемассовое число Рейнольдса,
Re</th><th>Расчётная сетка,
$(n_\mathrm{X} \times n_\mathrm{Y} \times n_\mathrm{Z})$</th><th>Характерные длины корреляции,
$(n_c^\mathrm{X}, n_c^\mathrm{Y}, n_c^\mathrm{Z})$</th><th>Полуширина фильтра,
$(W_f^\mathrm{X}, W_f^\mathrm{Y}, W_f^\mathrm{Z})$</th><th>Скорость
звука,</th><th>Амплитудный параметр,
R_S</th><th>Интенсивность турбулентности,
I_X</th><th>Интенсивность турбулентности,
I_Y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>25.6</td><td>81.92</td><td>18</td><td rowspan="6">64^3</td><td rowspan="6">(4,4,4)</td><td rowspan="6">(12,12,12)</td><td rowspan="20">10</td><td rowspan="4">1.0</td><td>0.02134</td><td>0.02104</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12.8</td><td>40.96</td><td>36</td><td>0.0216</td><td>0.0281</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6.4</td><td>20.48</td><td>92</td><td>0.0174</td><td>0.0198</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3.2</td><td>10.24</td><td>197</td><td>0.01848</td><td>0.03499</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1.6</td><td>5.12</td><td>294</td><td>1.25</td><td>0.02418</td><td>0.01775</td></tr>
<tr><td>6а</td><td rowspan="2">0.8</td><td rowspan="2">2.56</td><td rowspan="2">588</td><td>1.25</td><td>0.0188</td><td>0.02485</td></tr>
<tr><td>6б</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>5</td><td>3.668</td><td>4.485</td></tr>
<tr><td>7а</td><td rowspan="2">0.6</td><td rowspan="2">1.92</td><td rowspan="2">788</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>1</td><td>0.02587</td><td>0.031</td></tr>
<tr><td>7б</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>4</td><td>0.02771</td><td>0.02415</td></tr>
<tr><td>8а</td><td rowspan="4">0.4</td><td rowspan="4">1.28</td><td rowspan="4">1177</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>1.25</td><td>0.03009</td><td>0.02782</td></tr>
<tr><td>8б</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>5</td><td>0.02445</td><td>0.03523</td></tr>
<tr><td>8в</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>8</td><td>0.151</td><td>0.103</td></tr>
<tr><td>8г</td><td>256^3</td><td>(24,24,24)</td><td>(48,48,48)</td><td>12</td><td>0.03106</td><td>0.03967</td></tr>
<tr><td>9а</td><td rowspan="3">0.3</td><td rowspan="3">0.96</td><td rowspan="3">1568</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>1</td><td>0.01644</td><td>0.02498</td></tr>
<tr><td>9б</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>4</td><td>0.03349</td><td>0.03346</td></tr>
<tr><td>9в</td><td>256^3</td><td>(24,24,24)</td><td>(48,48,48)</td><td>36</td><td>0.08996</td><td>0.09434</td></tr>
<tr><td>10а</td><td rowspan="3">0.2</td><td rowspan="3">0.64</td><td rowspan="3">2353</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>0.5</td><td>0.02963</td><td>0.02781</td></tr>
<tr><td>10б</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td>5</td><td>0.04653</td><td>0.05307</td></tr>
<tr><td>10в</td><td>256^3</td><td>(24,24,24)</td><td>(48,48,48)</td><td>36</td><td>0.07023</td><td>0.112</td></tr>
<tr><td>11а</td><td rowspan="5">0.1</td><td rowspan="5">0.32</td><td rowspan="5">4704</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td rowspan="3">1.25</td><td>0.02756</td><td>0.02577</td></tr>
<tr><td>11б</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>20</td><td>0.05305</td><td>0.04653</td></tr>
<tr><td>11в</td><td>64^3</td><td>(4,4,4)</td><td>(12,12,12)</td><td>40</td><td>0.02141</td><td>0.02246</td></tr>
<tr><td>11г</td><td>128^3</td><td>(12,12,12)</td><td>(24,24,24)</td><td rowspan="2">10</td><td>5</td><td>0.04108</td><td>0.04118</td></tr>
<tr><td>11д</td><td>256^3</td><td>(24,24,24)</td><td>(48,48,48)</td><td>12</td><td>0.03242</td><td>0.03319</td></tr>
</table>

5.3.6 Кинетическая энергия потока и скорость её диссипации

В случае свободных сдвиговых течений обычно проводится пространственное усреднение по направлениям периодичности. Однако для градиентного течения проводить усреднение в направлении градиента давления нельзя [126], так как турбулентность может эволюционировать по длине канала. Для расчетной области, рассматриваемой в настоящей работе, характерный размер, на котором действует перепад давления, в точности равен размерам по другим направлениям, а пролетное время жидкой частицы достаточно мало. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать усреднение в направлениях периодичности X и Y, используя обозначение $\langle\ldots\rangle_S$. Пространственное усреднение позволяет установить средние профили скорости и температуры в расчетной области, реализующиеся на текущем шаге по времени и представить совокупность полученных результатов в виде цветовой диаграммы. В последующих разделах средние профили скорости нормируются на среднемассовую скорость U_0, а значения температуры в диапазоне $[T_0, T_0 + \Delta T]$ линейным образом отображаются на $[-1{,}1]$.

К рассматриваемым величинам также относится интеграл кинетической энергии (4.7) и скорость диссипации (4.11).

Зависимость интегральной кинетической энергии от времени (рисунок 5.32а) обладает следующими свойствами. При последовательном увеличении числа Рейнольдса в диапазоне $\mathrm{Re}_1 = 18$–4704 происходит резкая смена поведения кривых, так как при малых Re_1 происходит увеличение кинетической энергии, а при больших — резкий спад в связи с турбулизацией потока. Очевидно, что чем меньше число Рейнольдса, тем существеннее роль вязких напряжений, быстрее перестройка потока и связанное с ней изменение кинетической энергии, которое, как в дальнейшем будет показано, совпадает с возрастанием расходных характеристик. Кроме того, происходит быстрое достижение сеточной сходимости (например, для случая $\mathrm{Re}_1 = 588$ для сеток 64^3 и 128^3. В переходном режиме наблюдается смешанная ситуация — в диапазоне $\mathrm{Re}_1 \gtrsim 700 \cap \mathrm{Re} \lesssim 1600$ на грубых сетках происходит резкая турбулизация, в то время как измельчение сетки возвращает режим течения, соответствующий низким числам Рейнольдса.

Начиная с $\mathrm{Re}_1 \approx 2300$, при измельчении сетки режим течения остаётся неизменным. При дальнейшем повышении числа Рейнольдса происходит переход к «предельному» режиму (рисунок 5.32б), когда форма кривой уже фактически от Re_1 не зависит. Желание наблюдать статистически стационарную турбулентность приводит к длительным расчётным временам [200], и для значительной части расчётных конфигураций (Re_1, I_X, I_Y, n_X, n_Y, n_Z) удаётся досчитать до того момента, при котором кинетическая энергия принимает значение, близкое к асимптотическому. Время выхода на асимптоту, служащее точкой останова расчёта, должно свидетельствовать об установлении равновесия между течением и соответствующими граничными условиями и достаточно сильно зависит от среднемассового Re_1.

На самой грубой сетке расчёт при $\mathrm{Re}_1 = 4704$ проводился для различных скоростей звука $c = 10, 20, 40$ и не показал сколько-нибудь существенных различий.

Скорость диссипации кинетической энергии ε, независимо от выбора расчетной сетки и Re_1, имеет два типа кривых, один из которых соответствует «ламинарному», а другой — турбулентному режимам. Для случаев не приводящих к турбулизации течения (рисунок 5.33а) скорость диссипации асимптотически стремится к нулю, приближаясь к этому пределу из области отрицательных значений. Таким образом, вместо диссипации имеет место производство энергии. В диапазоне $\mathrm{Re}_1 \approx 18$–1177 выход на асимптоту осуществляется при $t < 60$, причём чем меньше Re_1, тем больше производство.

При турбулентном распаде скорость диссипации меняет свой знак, в частности, для расчётов 7а («$788, 64^3, 10$») и 8а («$1177, 64^3, 10$») — чёрная и зелёная кривые на рисунке 5.33б, — на

Таблица 18: Варианты распада течения, наблюдаемые при различных числах Рейнольдса и сетках

Номер расчета	Среднемассовое число Рейнольдса, Re_1	Расчетная сетка ($n_X \times n_Y \times n_Z$)	Вариант эволюции течения
1	18	64^3	ламинарный
2	36		
3	92		
4	197		
5	294		
6а	588		
6б		128^3	
7а	788	64^3	турбулентный
7б		128^3	ламинарный
8а	1177	64^3	
8б		128^3	
8в		128^3	турбулентный
8г		256^3	
9а	1568	64^3	
9б		128^3	
9в		256^3	
10а	2353	64^3	
10б		128^3	
10в		256^3	
11а	4704	64^3	
11б		64^3	
11в		64^3	
11г		128^3	
11д		256^3	

участках $t < 60$ происходят своеобразные осцилляции, так, что производство ТКЭ сменяется диссипацией и наоборот, что может отражать смену направления эволюции течения, если отождествлять отрицательное значение ε с «ламинарным» режимом, а положительное — с турбулентным. Графики скорости диссипации для больших $\mathrm{Re}_1 \gtrsim 2353$, 4704 (рисунок 5.33в) для различных сеток во всех случаях говорят о существовании двух пиков диссипации в окрестности $t \approx 9$ и $t \approx 18$, наиболее интенсивными они оказываются для расчёта 10в («$2353, 256^3, 10$») и превышают значение $\varepsilon = 0.017$. При дальнейшем распаде скорость диссипации медленно убывает, принимая значения $1 - 2 \times 10^{-3}$ для всех расчётов.

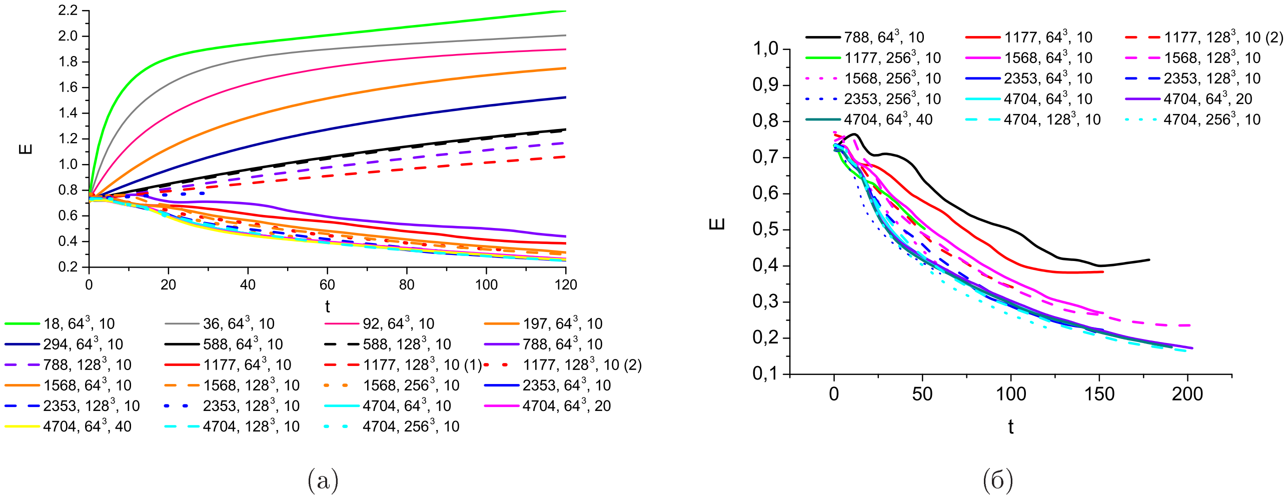
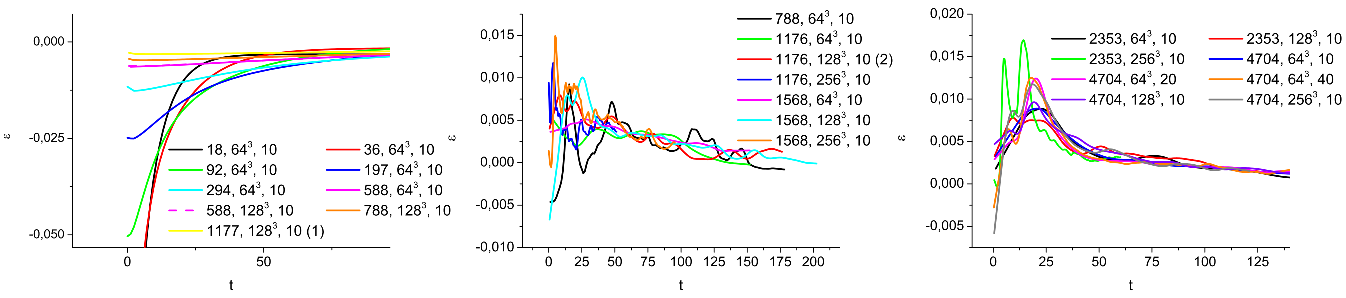


Рисунок 5.32: Зависимость безразмерной кинетической энергии, представленная для всего диапазона чисел Рейнольдса Re_1 (а), а также для случаев турбулентного распада течения (б) на сетках 64^3, 128^3, 256^3. Цифры в легенде обозначают среднемассовое число Re_1, размер расчётной сетки и характерную скорость звука c.

При турбулентном распаде максимум скорости диссипации достигается при $t \approx 22$, затем происходит медленный выход на некоторое асимптотическое значение (или стремление к нему) в окрестности нуля. При сохранении регулярности в течении также имеется тенденция к установлению равновесия.



(а) (б) (в)

Рисунок 5.33: Зависимость скорости диссипации полной кинетической энергии для случая ламинарной (а) и турбулентной эволюции течения ((б), (в)). Числа в легенде указывают через запятую среднемассовое число Рейнольдса Re_1, размер расчетной сетки, скорость звука.

Поведение кривых энергии в логарифмическом масштабе (рисунок 5.34а) показывает существование общей асимптотики для серии расчётов «11» ($\mathrm{Re} = 4704$) на больших временах $t \gtrsim 100$ — $E \propto t^{-0.85}$, таким образом, несмотря на затухание, его скорость оказывается меньшей, чем скорость в изотропной турбулентности ($E \propto t^{-1.2}$— [184]) или вследствие насыщения энергосодержащих масштабов ($\propto t^{-2}$). Асимптотика «-0.85» может возникать по нескольким причинам: (1) — вследствие передачи энергии от течения с постоянным градиентом давления к полю турбулентных пульсаций; (2) — из-за свойств турбулентных течений в закрытых каналах, в которых приблизительно одна треть турбулентной кинетической энергии [4], переносимая к малым масштабам в каскаде, возвращается к большим масштабам без диссипации; (3) — вследствие резкой температурной зависимости вязкости жидкости, уменьшающей скорость диссипации энергии при турбулентном смешении ($E \propto t^{-5/2}$ — [187]).

5.3.7 Описание течения в терминах завихренности

В качестве меры генерации завихренности следует рассмотреть энстрофию ζ (4.11), а также интегральный вклад различных компонент вектора завихренности:

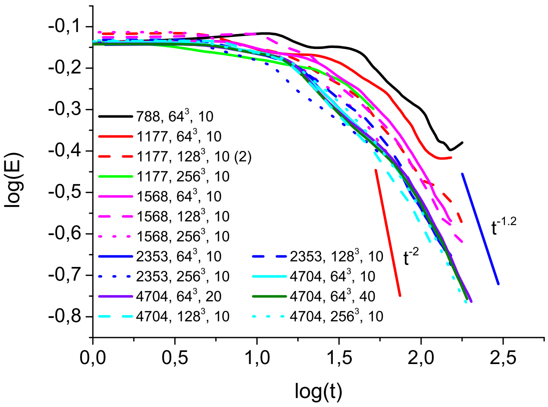
$$\zeta_{\mathrm{X,Y,Z}}(t) = \frac{t_0^2}{\rho_0 L^3} \iiint_0^L \frac{\rho \vec{\omega}^2_{\mathrm{X,Y,Z}}}{2}\, dx\, dy\, dz, \tag{5.64}$$

Следует отметить, что в данном случае отсутствует связь между скоростью диссипации и интегралом энстрофии, в силу отсутствия изотропии в течении. Результат интегрирования по объёму называется интегральной энстрофией, а величину $\frac{\vec{\omega}^2 t_0^2}{2}$ в точке можно назвать локальной энстрофией.

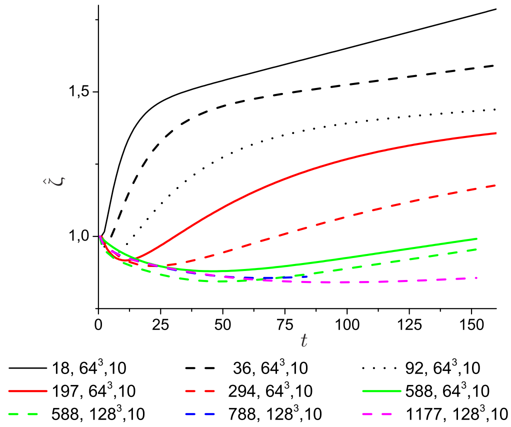
Поведение кривых интегральной энстрофии, нормированных на начальное значение

$$\hat{\zeta}(t) = \zeta(t)/\zeta(t=0),$$

подтверждает существование двух режимов эволюции течения (рисунки 5.34б, 5.35), в одном из которых оно сохраняет свой ламинарный характер, а в другом — происходит резкая генерация завихренности, сопровождаемая диссипацией энергии. В последнем случае активная турбулизация наступает за $\Delta t \approx 8$–15 в зависимости от числа Рейнольдса, причём при увеличении Re_1 в диапазоне $\mathrm{Re}_1 = 588$–1176 скорость генерации завихренности увеличивается в 2 раза. На грубой сетке распад турбулентности, связанный с диссипацией завихренности происходит на участке $t = 20$–150, независимо от числа Рейнольдса или скорости звука c. Переход к большим числам Рейнольдса и подробным



(а)



(б)

Рисунок 5.34: (а) — поведение турбулентной кинетической энергии на больших временах эволюции течения в логарифмических координатах, синяя прямая линия указывает наклон асимптотики «-1.2», красная — асимптотики «-2»; (б) — зависимость интегральной энстрофии $\zeta = \zeta(t)$ от времени для расчётов соответствующих «ламинарному» режиму распада течения.

сеткам приводит к увеличению пиковой энстрофии $\max\{\zeta(t)\}$ в момент начала крупномасштабного смешения $t \approx 18$ ($\mathrm{Re}_1 \approx 4704$). Характерно, что на самой мелкой сетке для $\mathrm{Re}_1 \approx 2353$ двойной пик завихренности отсутствует. Вероятно так же и то, что пики завихренности имеют заниженную высоту вследствие недостаточного сеточного разрешения.

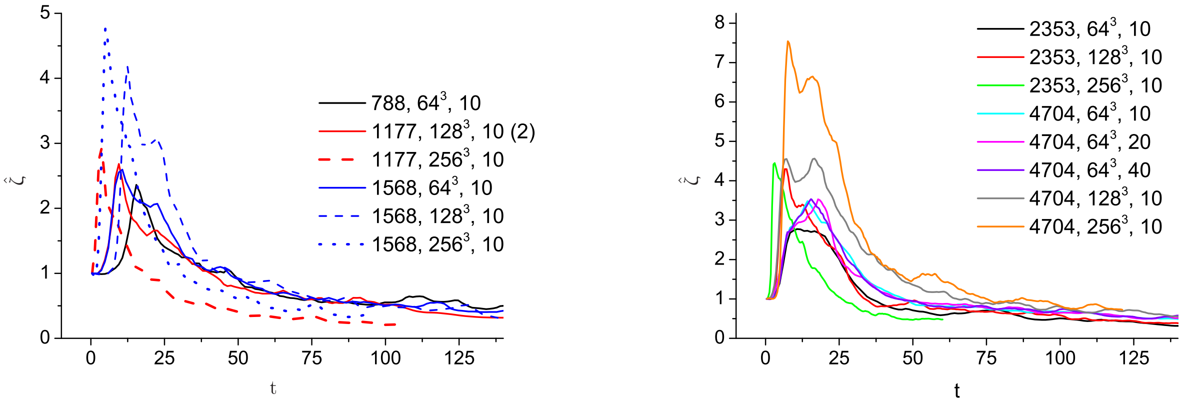
При $t > 60$ для всех турбулентных режимов происходит резкий спад завихренности, что отражает завершение крупномасштабного смешения и основного выравнивания температуры, а так же фактический распад турбулентности (так как завихренность возвращается на те же значения), таким образом, возникает предположение, что в рассматриваемом течении возникают трудности с «подпитыванием» турбулентности энергией из основного течения.

Чтобы удостовериться в существовании трехмерного турбулентного течения, можно рассмотреть зависимость компонент энстрофии от времени (ζ_X, ζ_Y, ζ_Z) в различных направлениях. Завихренность по оси Z («вращение между стенками») испытывает многократный рост вследствие турбулизации, что приводит к формированию действительно трехмерного течения. В меньшей степени растет компонента завихренности вдоль направления периодичности без градиента давления, так как она уже имеет достаточно большое начальное значение вследствие существования основного течения. Компонента завихренности направленная вдоль градиента давления также испытывает сильный рост (практически на два порядка), свидетельствующий о развитом трёхмерном течении и, косвенно, о появлении вихрей, вытянутых вдоль потока (streamwise vortex) — [200].

5.3.8 Структура вихревого поля

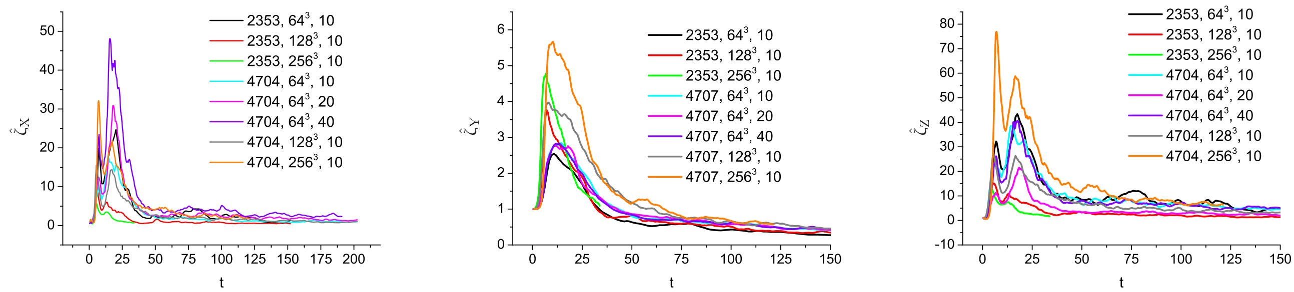
Непосредственный анализ структуры вихревого поля представляет собой инструмент для понимания сложных вихревых течений. Его успех напрямую связан [210], во-первых, с правильной идентификацией формы и положения вихрей, и, во-вторых, с визуализацией результатов. В сложных течениях имеется большое количество взаимодействующих вихрей, которые деформируются при вращении и трудно воспринимаются при графическом отображении.

Как когерентные структуры, так и вихри не имеют чёткого физического определения и в общем случае представляют собой некоторые образования, возникающие в потоке и оказывающие влияние на процесс переноса пассивного скаляра.



(а) (б)

Рисунок 5.35: Зависимость интегральной энстрофии $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}(t)$ от времени в случае турбулентной эволюции течения для расчётов 7а, 8в-г, 9а-в — (а), для расчётов 10а-в, 11а-г — (б).



(а) (б) (в)

Рисунок 5.36: Зависимость компонент интегральной энстрофии, приведённых к значениям в начальный момент времени, в случае турбулентной эволюции течения при больших числах Рейнольдса Re = 2353, 4704 (а) — $\hat{\zeta}_{\mathrm{X}}$, (б) — $\hat{\zeta}_{\mathrm{Y}}$, (в) — $\hat{\zeta}_{\mathrm{Z}}$.

Вихрями часто называются области сильной завихренности, однако, не существует универсального порога завихренности, выше которого её можно считать большой, — как результат, различные пороги визуализации $|\omega|$ (ζ_l — для энстрофии) приводят к отображению вихревых структур совершенно различной формы. Кроме того, завихренность может иметь высокие значения в плоскопараллельных сдвиговых течениях, где вихри отсутствуют вообще, таким образом, недостаток этого подхода связан с тем, что завихренность не различает между собой завихренные и сдвиговые движения.

В работе [210] предложен новый метод определения вихрей непосредственно по полю скорости. Он определяет точку внутри вихря, вокруг которой происходит вращение. Рассматривая направления скоростей в окрестности этой точки, определяется размер области, совершающей коллективное вихревое движение. Вместе с тем, такое определение не является строго обоснованным, так не является инвариантным относительно преобразований вращения и даёт различные результаты в различных системах отсчёта, в нём также требуется произвольным образом задавать пороги для отображения структур, число итераций «роста» вихревой структуры относительно центра вращения, скорость убывания силы вихря по мере удаления от центра. Сама сила вихря выбирается достаточно произвольно, исходя из величины компонент скорости в окружающих точках.

В механике сплошных сред величина или принцип (утверждение) являются объективными, если остаются инвариантными при следующих преобразованиях [211] старой системы координат $\mathbf{x}$ в новую $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{5.65}$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — собственный ортогональный тензор, или же матрица поворота, $\mathbf{b}(t)$ — трансляционный вектор, зависящий от времени.

Некоторые специалисты [4] указывают на то, что завихренность есть исключительно математическое понятие, которое «конструируется» из градиентов скорости потока (физические величины). Тоже самое касается и тензора скоростей деформации — обе эти величины возникают из прямого разложения тензора градиентов скоростей. В настоящее время существует устойчивая тенденция ассоциировать существование завихренности течения с вихрями, действительно существующими в нём. Таким образом, общий процесс диссипации сводится к двум идеям — растяжению вихря и его последующего распада на более мелкие, что является скорее математической, а не физической картиной.

Наиболее часто используемые определения вихря не являются объективными [211], так как они выделяют различные структуры в качестве вихрей, в зависимости от выбора локальной системы координат (в том числе связанной с вихрями). Наоборот, критерий, инвариантный относительно преобразований Галилея, должен давать убедительные результаты в различных движущихся системах отсчёта [4].

Опираясь на свойство объективности, в работе Хэллера (Haller) [211] даётся новое определение вихря как набора траекторий жидких частиц, вдоль которых тензор ускорений деформации является неопределённым по направлениям нулевой деформации. Физически этот объективный критерий определяет вихри как материальные трубки, в которых элементы оказываются сонаправлены (колинеарны) с направлениями собственных векторов тензора деформации в данной точке.

Q-критерий, хронологически самый ранний, определяет вихрь как связанную область в течении, имеющую положительный второй инвариант тензора градиента скоростей $Q > 0$, и рассчитывается согласно определению:

$$Q = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{\Omega}|^2 - |\mathbf{S}|^2\right), \tag{5.66}$$

где $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^{\mathbf{T}}\right]$ — тензор завихренности, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathbf{T}}\right]$ — тензор скоростей деформации, а операция $|\ldots|$ — обозначает евклидову норму матрицы. В дальнейшем для определении положения вихрей мы будем пользоваться именно соотношением (5.66).

Появившийся позже Δ–критерий также является инвариантным относительно преобразований Галилея, и выглядит так:

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{\det\nabla\mathbf{v}}{2}\right)^2 > 0, \tag{5.67}$$

Кроме того, существует ещё λ_2-критерий, определяющий вихри как области, в которых:

$$\lambda_2\left(\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2\right) < 0, \tag{5.68}$$

где $\lambda_2(\ldots)$ — определяет промежуточное (среднее) значение симметричного тензора $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$.

Попробуем выделить наиболее интересные структуры в жидкости, в зависимости от величины уровня локальной энстрофии ζ_l в различные моменты смешения, как и во всех предыдущих случаях рассматриваемая величина представляется в безразмерной форме. Асимметрия среднего течения приводит к тому, что наибольшие значения энстрофии наблюдаются у верхней стенки, таким образом, на рисунке 5.38 ось Z является инвертированной. В самом начале ($t \approx 0.59$) под воздействием возмущений скорости происходит смещение и деформация пристеночного слоя с сильной завихренностью (рисунок 5.37а), а также начало его свертывания в «клубы». При развитии ($t \approx 2.97$) смешения в большом количестве наблюдаются мелкие образования неправильной, а также шпилькообразной (hairpin) формы (рисунок 5.37б).

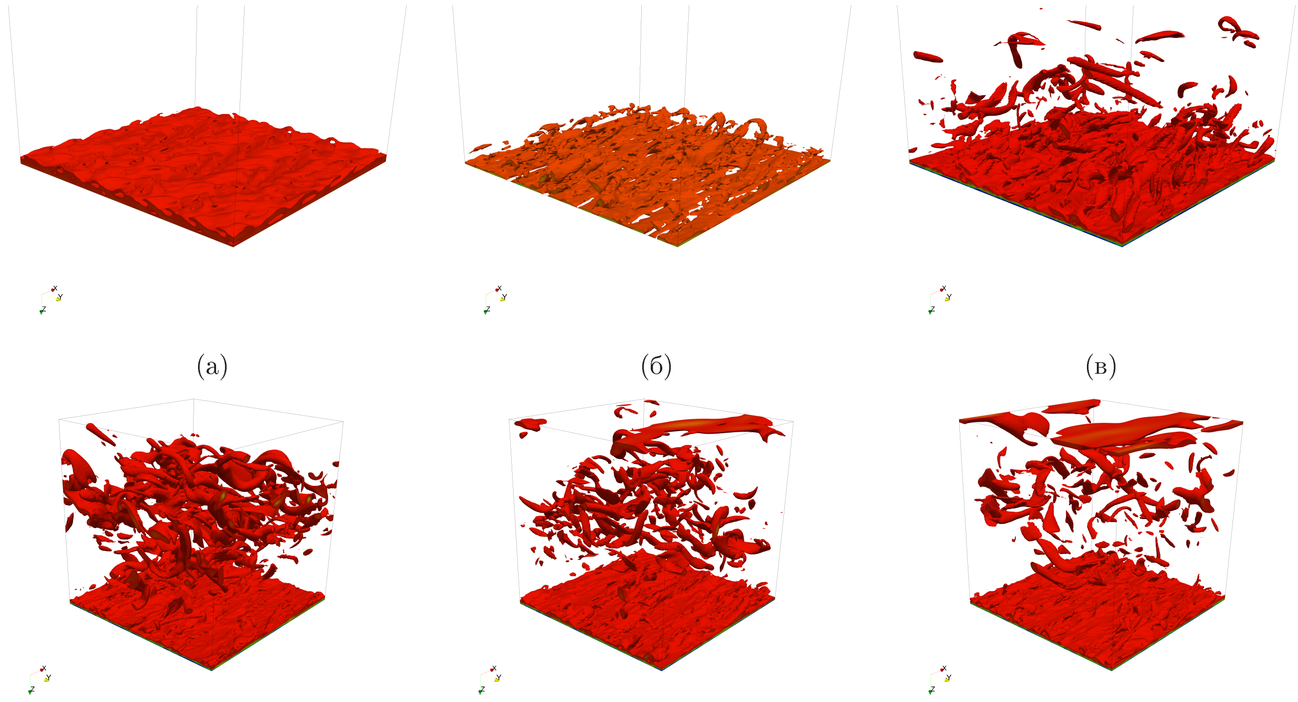
Затем при ($t \approx 8.9$) ($\zeta_l \approx 220$) наблюдаются разнообразные вихри в объёме, имеющие форму «червяков» (рисунок 5.37в). В области горячего пристенка они кажутся прикрепленными к поверхности. В дальнейшем при некотором повышении уровня происходит «отделение» крупных, очень длинных вихрей в основном течении и пристеночных слоев ($\zeta_l \approx 224$). Вихри в основном течении оказываются более интенсивными, очень длинными а их длина может превышать характерный размер расчетной области. При дальнейшей эволюции течения ($t \approx 14.8$) и сохранении того же уровня визуализации ζ_l их размер и число существенно возрастают (рисунок 5.37г), так же завихренными образованиями оказывается заполненной область у холодной стенки. При $t \approx 17.8$ картина сохраняется. При $t \approx 20.8$ вследствие диффузии завихренности размер вихревых образований уменьшается (рисунок 5.37д), что сопровождается ростом завихренности у нижней стенки. В дальнейшем ($t \approx 26.7$) происходит сильная диффузия завихренности с образованием крупных вихревых зон (рисунок 5.37е) и быстрым ростом фактически сплошного сдвигового слоя. Данная картина наглядно демонстрирует, что пользуясь лишь значением уровня энстрофии невозможно отличить сдвиговые движения (shearing motions) от вихревых (swirling motions).

Указанный процесс, связанный с диффузией завихренности продолжается и в последующие моменты времени.

В отличие от непосредственного анализа завихренности (энстрофии), Q-критерий является объективным средством определения положения вихрей. Однако, и в этом случае получившаяся картина зависит от значения уровня Q. В частности, в начальный момент времени $t \approx 0.59$ (рисунок 5.38а) $Q-$критерий показывает формирование пилообразной структуры, напоминающей $\Lambda-$вихри [1], которые в дальнейшем при $t \approx 8.9$ сразу превращаются в «лес» шпильковидных вихрей (или вихрей, прикреплённых к стенке), «произрастающих» на поверхности, и высокоскоростного ядра потока. И пристеночные вихри, и вихри в центральной области, оказываются наклонёнными к наиболее скоростной части течения (рисунок 5.38б). При повышении линий уровня ($Q \geqslant 25.62$) наблюдается картина очень длинных вихрей в основном течении без какого-либо заполнения пристеночных областей, которая усиливается при ($t \approx 15$–18) ($Q > 46.02$) (рисунок 5.38в, 5.38г), а затем резко спадает при ($t \approx 20.8$) ($Q \geqslant 24.12$). Падение продолжается на интервале ($t = 26.7$–35.7), причём интенсивность в центре течения ($Q \geqslant 8$) резко спадает до уровня горячего пристенка. В дальнейшем, в центральной области происходит вымирание вихрей, а у горячей стенки сохраняются образования, вытянутые вдоль по потоку (так до $t = 47.4$ — рисунок 5.38е)

Структура завихренности в турбулентном пристенке, а также проникновение шпильковидных вихрей в основное течение подробно описана в работе [200]: когда слой завихренности от основного течения ω_Y под воздействием возмущений отрывается от стенки, он оставляет в поперечной завихренности промежуток, который представляет собой низкоскоростную струйку (streak — прожилка). Вихревые линии, поднимающиеся наверх от стенки на краях промежутка создают вертикальную завихренность ω_Z (перпендикулярно стенкам) по бокам струйки, таким образом, внешняя граница поднятого слоя формирует отсоединённый сдвиговый слой. Растяжение вихревых линий ω_Y основным потоком, вероятно, является одним из механизмов формирования продольных вихрей. Таким образом, завихренность генерируется около стенки, а потом всплывает в основной поток. В этом процессе вихрь в окрестности стенки индуцирует [200] вихрь противоположного знака прямо рядом со стенкой, затем уносит его, тем самым создаёт новый свободный вихрь, затем соединяется с ним и формирует поднимающуюся пару, тем самым переносит завихренность в основной поток.

В некоторых работах предполагается [212], что пристеночный сдвиговый слой состоит из «леса» прикреплённых шпилькообразных (hairpin), Λ-образных, а также подковоообразных (horseshoe) вихрей, наклонённых в направлении течения на угол $\sim 45^\circ$ к стенке. Этот угол может сохраняться на некотором расстоянии при сносе этих вихрей вниз по потоку. Рассматривая только Λ-вихри, можно показать, что, так как они имеют некоторую проекцию на стенку, то подвергаются процессу растяжения, в котором высота вихря h увеличивается практически равномерно со временем, а расстояние между ножками λ уменьшается, так что произведение λh остаётся практически постоянным (растяжение в плоскости вихря). Вязкая диффузия полностью доминирует в процессе растяжения, также предполагается, что, когда ножки Λ-вихря в конце концов сходятся вместе, вихрь «отмирает»



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

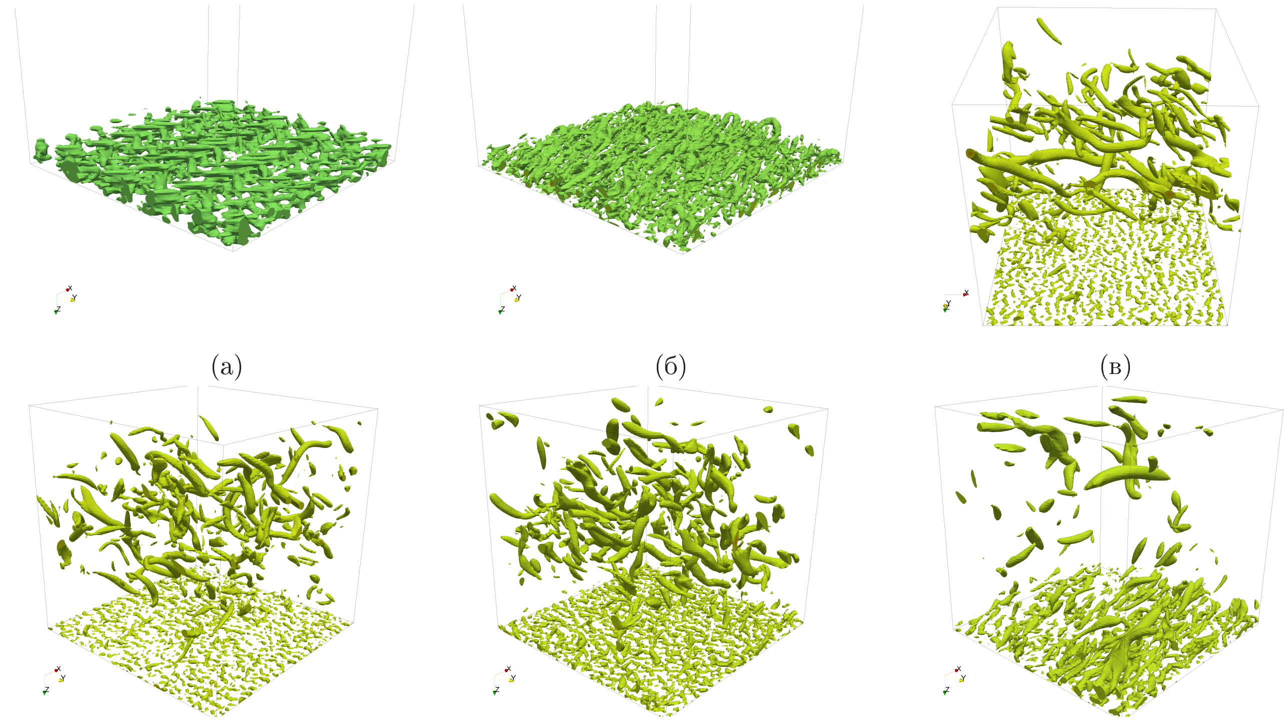
Рисунок 5.37: Распределение локальной энстрофии ζ_l в объёме жидкости на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения ($\mathrm{Re}_1 = 4704,\ 128^3$), представленная в виде поверхностей уровня, в различные моменты времени t (в скобках указано значение поверхности уровня) (а) — 0.59 (346.47); (б) — 2.97 (908.58); (в) — 8.9 (220.77); (г) — 14.8 (224.12); (д) — 20.8 (224.12); (е) — 23.7 (224.12). Цветовая шкала отображает диапазон значений $\zeta_l = 2.70 \times 10^{-}5$–$1.14 \times 10^4$.

вследствие сложения завихренности. Случайный массив вихрей определённой формы (Λ-вихрей), находящихся на различных стадиях растяжения называется иерархией вихрей.

Процесс образования вихревой пары [212] действительно наблюдается для шпилькообразных вихрей в области за головкой заклепки. Следует также принять во внимание, что присоединённые вихри окружены изотропными мелкими вихрями, которые приводят к формирования участка колмогоровского спектра.

5.3.9 Фильтр пространственного усреднения

Перейдем к описанию поведения течения ($\mathrm{Re}_1 = 588, 64^3$) на основе совокупности профилей (рисунок 5.39), усреднённых в направлениях периодичности и представленных в виде Z–t-диаграмм, что позволяет установить причину появления двух типов зависимостей $E = E(t)$. Так, для малых чисел Рейнольдса оказывается, что поле температуры $\langle T \rangle_S$ остаётся неизменным на всех усреднённых слоях по времени, чего нельзя сказать о поведении основного течения $\langle U \rangle_S$, в котором под воздействием малых колебаний конечной амплитуды происходит перестройка течения. Действительно, следует обратить внимание на то, что имеет место увеличение скорости в ядре потока и его расширение в центральную часть канала. Таким образом, полностью изменяются расходные характеристики течения. Действительно, ведь в используемой постановке профиль скорости, задаваемый в качестве начальных условий, будучи согласован с граничными условиями по напорным и тепловым характеристикам (течение с заданным перепадом давления, прилипанием на стенках



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 5.38: Поверхности $Q-$критерия в объёме расчетной области, на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения (Re_1 = 4704, 128^3), в различные моменты времени t (значения в скобках отображают поверхность уровня Q): (а) — 0.59 (2.57); (б) — 2.97 (2.57); (в) — 14.8 (20.15); (г) — 17.8 (46.02); (д) — 20.7 (24.12; (е) — 47.5 (8).

с различной температурой T в отсутствие возмущений скорости), должен сохраняться неограниченно долго. Именно это и было первоначально подтверждено численными экспериментами для течения Пуазейля и профиля термовязкой жидкости с точкой перегиба.

Ситуация меняется в последнем случае при наложении возмущений, что приводит к перестройке потока на профиль без точки перегиба, после чего резко изменяются расходные характеристики. Важно отметить, что существование точки перегиба в профиле скорости для одного вида жидкости определяется исключительно перепадом температур ΔT. Перестройка течения происходит под воздействием возмущений (они исчезают вследствие усреднения), данный процесс протекает без роста максимальной скорости в ядре потока или его вытеснения от стенок. «Выпрямление» профиля длится достаточно долго — до $t \approx 30$.

Следует предположить нарушение консервативности работы алгоритма (но не схемы) в силу наложения специфических граничных условий, однако, оно не объясняет процесс исчезновения точки перегиба, а также неизменность расходных характеристик в горячем пристенке. Предположение об уменьшении фактического ΔT, в силу частичного перемешивания в пристеночной области, графиками среднего профиля температуры не подтверждается. В приведённом виде расход в основном течении через расчётную область $Q(t)/Q(0)$ хорошо описывается функцией $Q(t)/Q(0) \propto \log(t)$. На дальних временах эволюции расходная кривая лежит между двумя асимптотами (функциями) вида $Q(t)/Q(0) \propto b \log(t-a)$ и $Q(t)/Q(0) \propto 1 + a \exp(-t/b)$, где a, b — некоторые константы.

Компонента скорости свободного течения в направлении периодичности $\langle V \rangle_S$ по мере эволюции затухает во всех слоях: в ядре течения ($z \approx 0.5$–0.75) на участке $\Delta t \approx 1.5$ её величина падает в 3 раза, а в дальнейшем происходит практически линейный спад с изменением приблизительно на 0.2 от начальной величины. Аналогично в поперечном сечении эта величина сохраняется в зоне ядра ($z \approx 0.4$–0.8), в то время как в пристеночной зоне происходит её затухание практически до нуля, таким образом, развития трехмерного течения не происходит (в смысле среднего). Следует заметить, что измельчение сетки для рассматриваемого режима приводит к более раннему измене-

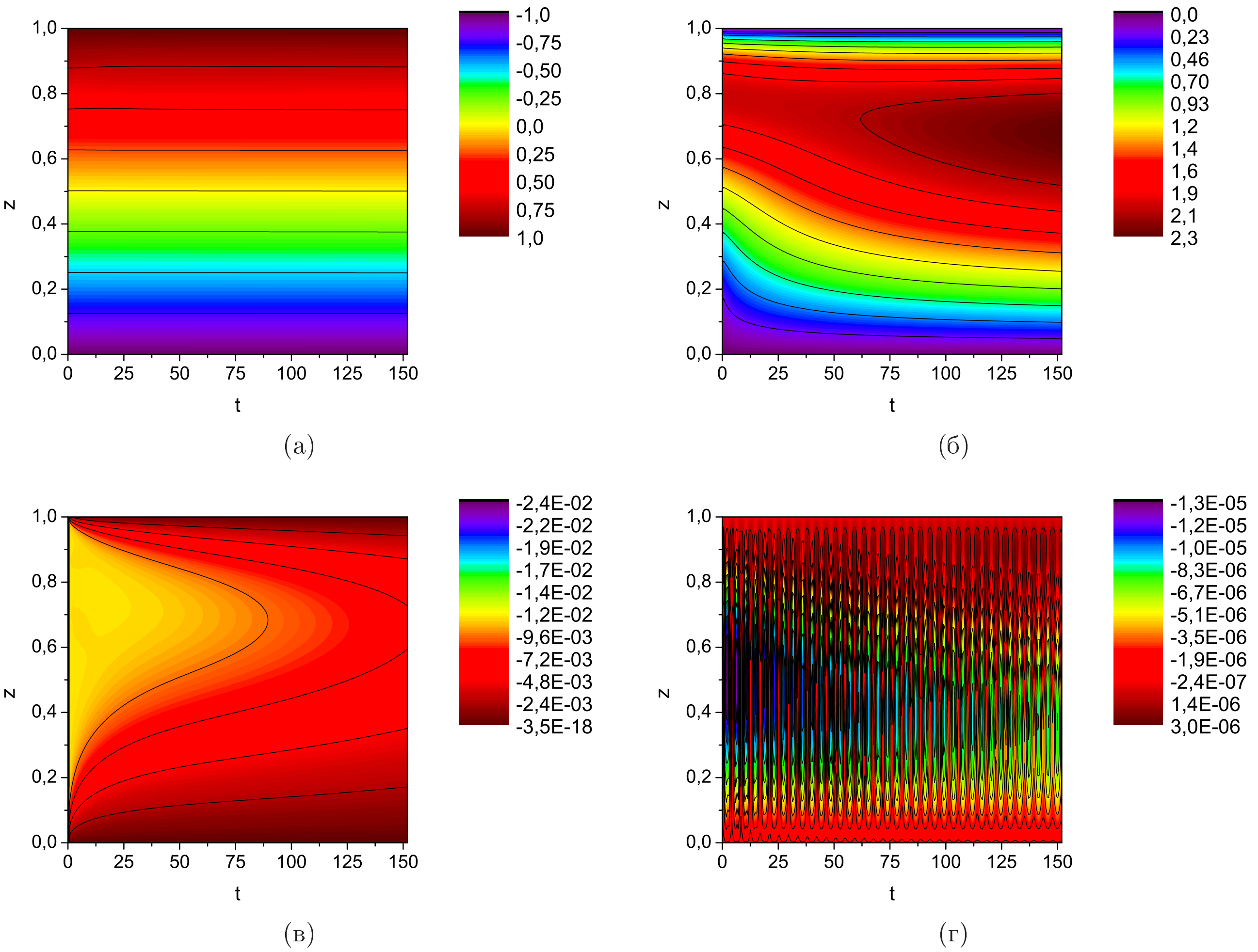


Рисунок 5.39: Z–t-диаграммы профилей температуры $\langle T\rangle_S$ (а), а также компонент скорости $\langle U\rangle_S$ (б), $\langle V\rangle_S$ (в), $\langle W\rangle_S$ (г), построенные по результатам расчётов для $\mathrm{Re}_1 = 588$ на сетке 64^3.

нию расходных характеристик, связанному с ускорением в ядре потока, а именно при $t \approx 65$ — на сетке 64^3, и при $t \approx 39$ — на сетке 128^3.

При средних числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 = 788$, 1176 оказывается (рисунок 5.40), что на грубой сетке имеет место турбулентный сценарий развития, а на мелкой — происходит перестройка потока под действием начальных возмущений. В случае турбулентного сценария процесс смешения можно проследить по изолиниям температуры $\langle T\rangle_S$ (рисунок 5.40а). Помимо прочего, можно говорить о поведении конкретных слоев жидкости в силу линейной привязки положения изолинии и ординаты слоя. Сам же процесс смешения будем описывать по смещению положения изолинии, которое начинается в верхнем слое $z \approx 0.9$–1.0 при $t \approx 9$, что в дальнейшем приводит за $\Delta t \approx 20$ к практически к полному смешению.

В остальных слоях крупномасштабное смешение начинается в интервале $t \approx 11$–22. В конечном итоге процесс смешения приводит к расширению среднего слоя $z = 0.5$–0.6, причём в верхней половине канала происходит его резкий, но неравномерный рост на интервале $\Delta t \approx 20$–60, тогда как нижняя граница плавно расширяется к холодной стенке. Расширение имеет экспоненциальный характер и занимает гораздо больший промежуток времени $\Delta t \approx 22$–180, и, в конце концов, достигает положения $z \approx 0.13$ по ординате. В асимптотическом состоянии на верхней границе этот слой достигает ординаты $z \approx 0.95$. Таким образом, можно считать, что в конце расчёта слой перемешанной жидкости с перепадом температур $\Delta T/10$ занимает около $\Delta z \approx 0.83$ всего сечения. В результате, на достаточно больших временах эволюции слои (в верхней половине канала) превращаются в горячий пристенок толщиной около $\Delta z \approx 0.05$. Слой $z \approx 0.4$–0.5 в нижней полуплоскости практически не меняет своей толщины, но, «подпитываясь» от холодных слоев у нижней стенки, смещается вниз, занимая ординаты $0.085 \lesssim z \lesssim 0.165$. Толщины более холодных слоев падают приблизительно в 4 раза (с $\Delta z \approx 0.4$ до $\Delta z \approx 0.085$) — в конце расчёта они занимают холодный пристенок толщиной $\Delta z \approx 0.085$ — почти в 2 раза больше по сравнению с горячим.

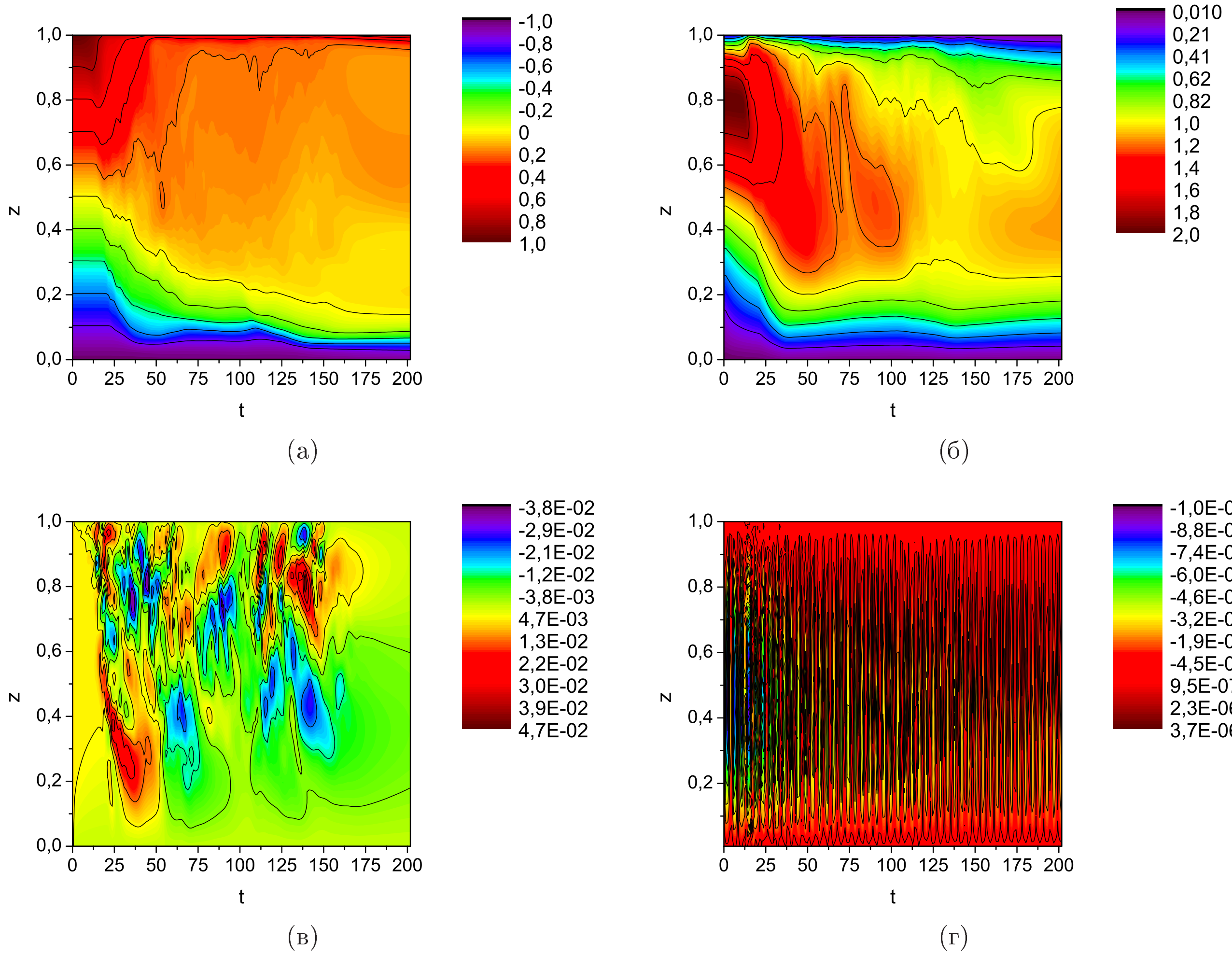


Рисунок 5.40: Z-t-диаграммы профилей температуры $\langle T \rangle_S$ (а), а также компонент скорости $\langle U \rangle_S$ (б), $\langle V \rangle_S$ (в), $\langle W \rangle_S$ (г), построенные по результатам расчётов для $\mathrm{Re}_1 = 788$ на сетке 64^3.

Разрушение профиля основного течения (рисунок 5.40б) происходит при $t \approx 14$, при этом ядро потока сильно расширяется с $0.6 \lesssim z \lesssim 0.9$ до $0.44 \lesssim z \lesssim 0.9$, соответственно, падает и максимальная скорость в потоке. Картина усреднённого профиля скорости представляется очень неоднородной, в том числе до момента времени $t \approx 110$. Её нельзя назвать стационарной и на более поздних этапах эволюции, в дальнейшем происходит окончательное «размытие» центральной части потока. При $t > 120$ наиболее активное замедление происходит в окрестности верхней (горячей) стенки, что, вероятно, связано с активным перемешиванием. Смещение изолиний скорости в нижней полуплоскости к холодной стенке говорит об уменьшении слоев с соответствующей температурой в 2 раза, при этом в верхней пристеночной области толщина слоя со значением скорости $\langle U \rangle_S \sim 0.3 - 0.4 U_{\max}$ растет крайне неравномерным образом (возмущение из-за больших вихрей может достичь и ядра потока, вытеснив его к нижней стенке).

График изначально нулевого поля скорости $\langle W \rangle_S$ после усреднения (рисунок 5.40г) позволяет судить о наличии вихрей с вертикальной компонентой скорости, что приводит к отсутствию стационарного поля. Вместе с тем, в данном случае усреднение скорее ведет к путанице в силу достаточно большого шага между моментами усреднения. График компоненты скорости $\langle V \rangle_S$ в направлении периодичности говорит о существовании режима с выделенным направлением скорости, в котором

Таблица 19: Приблизительное время начала процесса смешения в различных слоях, установленное для расчёта $\mathrm{Re} = 4704$, 128^3 ячеек

Интервал координат слоя, z	0.0-0.1	0.1-0.2	0.2-0.3	0.3-0.4	0.4-0.5	0.5-0.6	0.6-0.7	0.7-0.8	0.8-0.9	0.8-0.9
Приблизительное время начала смешения, t	10.68	9.49	7.12		4.74					

реализуется двухмерное течение в смысле средних значений, хотя фактически оно является трёхмерным, что показывает генерация трёхмерной завихренности.

При повышении числа Рейнольдса ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, сетка 128^3 ячеек рисунок 5.41а) имеет место интенсивное и раннее смешение, которое также можно проследить по полю температуры $\langle T \rangle_S$ Z–t-диаграммы. Начало процесса смешения в различных слоях, установленное по смещению изолиний температуры, указано в таблице 19. Смешение в нижней полуплоскости происходит на интервале $20 \lesssim t \lesssim 40$. Толщина верхнего горячего пристеночного слоя — $\Delta z \approx 0.034$, нижнего — $\Delta z \approx 0.023$, толщина пристеночных слоев в среднем по времени не растет.

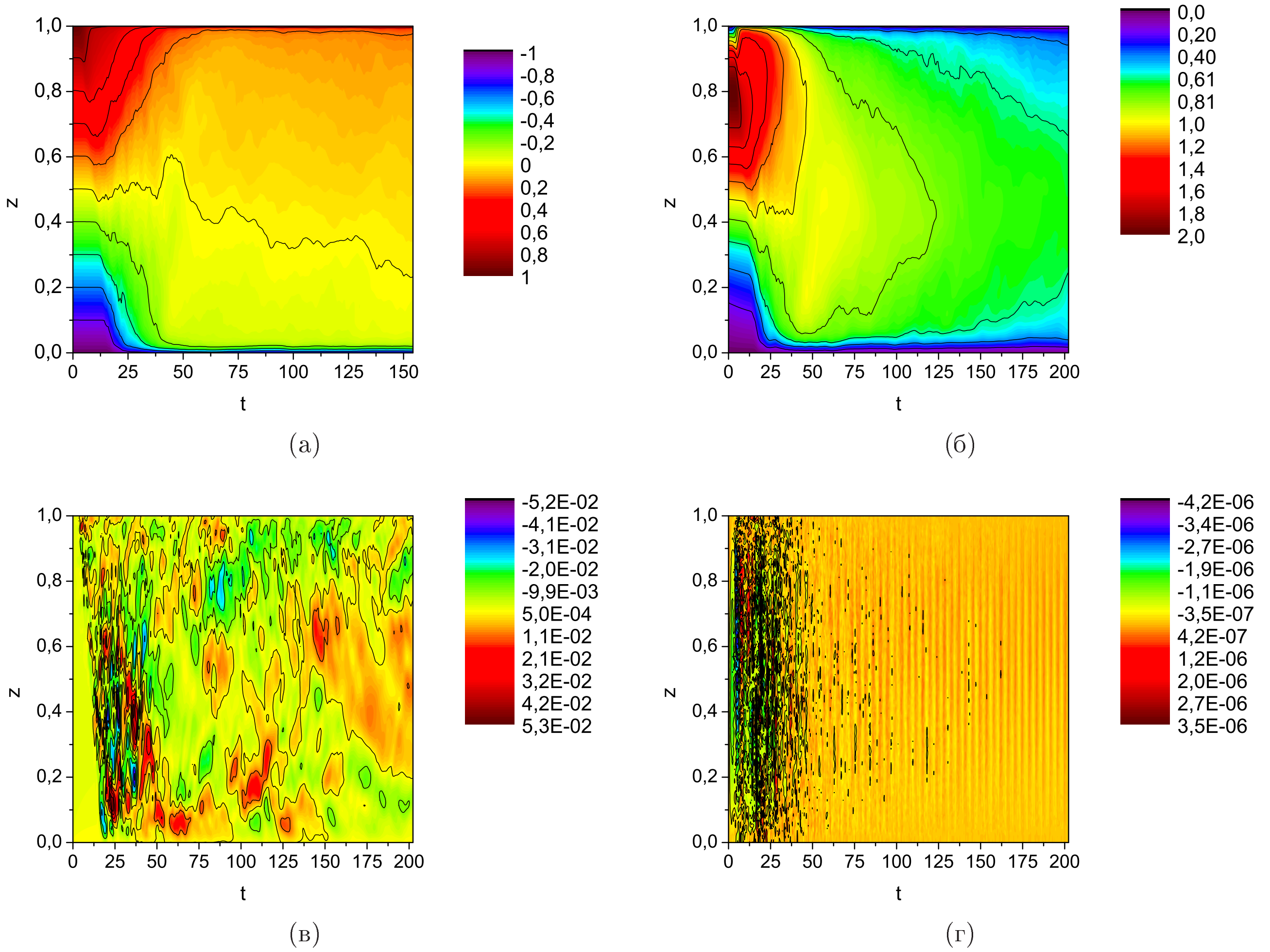


Рисунок 5.41: Z–t-диаграммы профилей температуры $\langle T \rangle_S$ (а), а также компонент скорости $\langle U \rangle_S$ (б), $\langle V \rangle_S$ (в), $\langle W \rangle_S$ (г), построенные по результатам расчётов для $\mathrm{Re}_1 = 4704$ на сетке 128^3.

Форма профиля скорости $\langle U \rangle_S$ (рисунок 5.41б) основного течения сохраняется до $t \approx 4$, а затем в слое $z \approx 0.85$–1.0 происходит его деформация, связанная с ускорением в пристеночной зоне и замедлением жидкости ближе к ядру потока. Далее происходит разрушение самого ядра потока, падение максимальной скорости, при этом участок профиля $0.0 \lesssim z \lesssim 0.6$ с точкой перегиба остаётся неизменным до $t \approx 10$, в последствии он разрушается на интервале $t \approx 10$–20, что приводит к образованию переходного профиля скорости в виде наклонной прямой, которая в дальнейшем эволюционирует к П-образному турбулентному профилю скорости.

Диаграмма $\langle U \rangle_S$ свидетельствует о существовании сильных вихрей во всем поперечном сечении канала, в особенности на участке $t = 16$–50.

$\langle V \rangle_S$ (рисунок 5.41в) демонстрирует развитие течения в направлении, поперечном основному потоку. В различных слоях сечения усреднённое течение направлено в противоположные стороны, что, в силу двумерности шума в начальных условиях, может говорить о существовании поперечных сдвиговых слоёв. Интенсивность среднего течения также резко возрастает в интервале смешения и падает к $t \approx 60$, что может служить косвенным подтверждением разрушения слоистого течения и потери связи с исходными начальными условиями.

5.3.10 Усреднение по ансамблю слагаемых уравнения для турбулентной кинетической энергии

Работа [4] посвящена развернутой критике существующих в настоящее время представлений о турбулентности, методов расчёта турбулентных течений, а также их методологического обоснования. В частности, указывается на ошибочность восприятия турбулентного течения как чисто случайного, так как в таком случае необходимо отказаться от любых методов усреднения УНС и вообще от предположения (принимаемого повсеместно) о том, что эти уравнения могут описывать турбулентное движение сплошной среды, так как они являются детерминистскими. Если же все-таки потребовать, что турбулентность — случайное (непредсказуемое) явление, тогда и усреднение УНС, выполняемое в рамках подхода RANS, имеет мало смысла — мы начинаем с «неправильных» уравнений и оканчиваем нестохастическими уравнениями. Таким образом, остаётся следующий выбор [4]: или принять УНС в качестве корректного описания потока, и что турбулентность не является случайным явлением, или же искать совершенно другое описание (возможно, в области стохастических дифференциальных уравнений). С экспериментальной точки зрения главным аргументом против случайности является существование предыстории (или памяти) турбулентного течения, пусть даже на коротких временах.

В основе проведения усреднения по Рейнольдсу для получения уравнений RANS

$$\overline{u}_t + \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} = -\nabla \overline{p} + \nu \Delta \overline{u} - \mathcal{R}(u', u'), \tag{5.69}$$

где $\mathcal{R}$ — тензор напряжений Рейнольдса, лежат две гипотезы [4]: (1) — усреднение по ансамблю сохраняет зависимость средней скорости от времени, то есть операции усреднения по ансамблю и дифференцирования коммутативны, (2) — операции усреднения по ансамблю и по времени — эквивалентны. Широко используемое объяснение для сохранения временной производной в уравнениях RANS исходит из существования различных временных масштабов, предполагается, что рассматриваемое течение обладает двумя различными временными масштабами — t_1, (турбулентные пульсации) и t_2 (крупномасштабные движения), такими, что $t_1 \ll t_2$. В результате, усреднение по Рейнольдсу будет иметь вид

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{\mathfrak{T}} \int\limits_0^{\mathfrak{T}} u(x,t) dt, \tag{5.70}$$

где $\mathfrak{T}$ —период усреднения. В противовес приведённым рассуждениям можно выдвинуть следующие контраргументы: (1) — большинство турбулентных течений имеют много временных масштабов; (2) — даже в случае существования t_1 и t_2 период усреднения $\mathfrak{T}$ все равно оказывается неопределённым в формуле усреднения (5.70), и определение не является математически строгим. Таким образом, попытка получить нестационарные решения уравнений RANS приводит к конфликту с математическим формализмом, используемым при усреднении Рейнольдса.

Усреднение по Рейнольдсу оказывается точно определённым, если добавить в него предельный переход $\mathfrak{T} \to \infty$:

$$\overline{u}(x) = \lim_{\mathfrak{T}\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} u(x,t)dt \tag{5.71}$$

Из накапливаемых за все время расчёта средних можно получить результаты усреднения между отдельными «кадрами» по следующему простому алгоритму:

$$N_1\overline{U}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} U_i, \quad N_2\overline{U}_2 = \sum_{i=1}^{N_2} U_i, \tag{5.72}$$

где N_1 и N_2 — количество шагов усреднения $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ — средние значения продольной скорости U за N_1 и N_2 отсчётов, соответственно. Среднее за интервал $1-2$:

$$\overline{U}_{12} = \frac{N_2\overline{U}_2 - N_1\overline{U}_1}{N_2 - N_1}, \tag{5.73}$$

указанное выражение справедливо при любой системе нумерации отсчётов, так как из него всегда можно вынести общий множитель.

Анализируемые в дальнейшем значения были получены с помощью нескольких методов усреднения, которые включают в себя:

— непрерывное накопление массивов данных с усреднёнными величинами (способ №1, основанный на интеграле с предельным переходом (5.71));
— получение массивов данных, усреднённых на интервале между последовательными «кадрами» (способ №2, более «традиционный», основанный на формуле (5.70));
— и, в дальнейшем, усреднение массивов данных по направлениям периодичности, что даёт возможность анализировать Z–t-диаграммы.

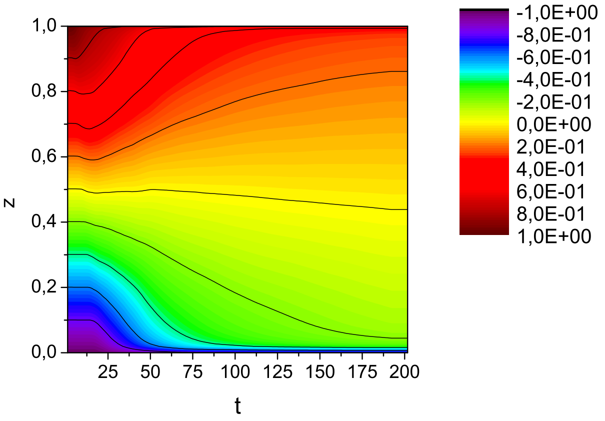
Следует заметить, что в первом способе о процессе выхода течения на статистически стационарный режим можно судить по выходу значений на Z–t-диаграмме на асимптоту. Значения первых моментов усреднения, полученные вторым способом, можно также получить из первого вычитанием массивов средних, полученных для двух соседних «кадров». Очевидно, что данный метод трансформации нельзя применять для высших моментов, так как их получение основано на значениях моментов низшего порядка, которые на этапе крупномасштабного смешения, нестационарной турбулентности, испытывают постоянные осцилляции. Для второго способа интервал временного усреднения несколько превосходит среднее пролетное t_0 или минимальное пролетные времена ($L/U_{\max}$). В силу достаточного большого объёма данных, интервал усреднения фактически представляет собой промежуток времени между двумя кадрами автосохранения данных, т.е. определялся не из физических соображений, хотя он должен превосходить все характерные масштабы турбулентных пульсаций, и, таким образом, достаточен для получения статистики. Отдельных исследований, направленных на выявление минимального достаточного интервала накопления данных (например, по достижению стационарного значения трения на стенке τ^*) не проводилось.

Строгий с математической точки зрения, способ №1 испытывает серьезный трудности в случае существования нестационарной турбулентности на участке усреднения, когда статическое описание является не самым подходящим. Таким образом, величины, накопленные в массивах средних моментов различного порядка хранят историю выхода течения на стационарный режим (рисунок 5.42), который не позволяет судить об истинных значениях усреднённых величин на больших временах расчёта. Альтернативным вариантом является смещение начала усреднения по формуле (5.71) на участок мелкомасштабного смешения $t \gtrsim 40$. Однако, в этом случае теряется математическая строгость (5.71), так как нижний предел интеграла (5.71) выбирается произвольно.

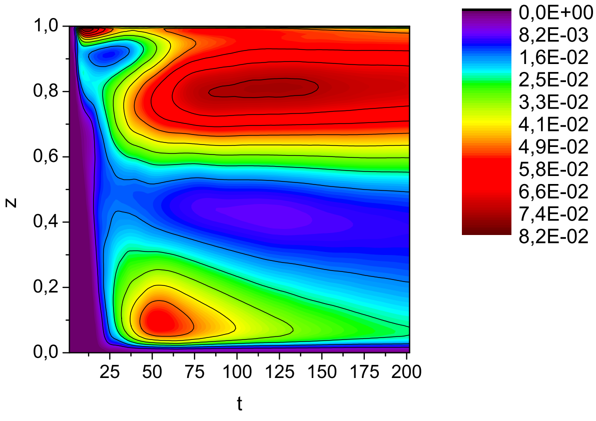
Уравнение для турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) $\overline{e}_{\text{turb}} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$ может быть получено из системы уравнений для напряжений Рейнольдса суммированием по повторяющимся индексам для диагональных членов тензора напряжений Рейнольдса:

$$\frac{\partial \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial t} = -U_j \frac{\partial \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u'_j u'_j u'_i}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial x_j^2} - \overline{u'_j u'_j}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \qquad (5.74)$$

Члены в правой части соответствуют адвекции, диффузии вследствие пульсаций давления, турбулентному переносу, переносу вследствие молекулярной вязкости, производству турбулентной кинетической энергии, турбулентной диссипации. Достаточно подробно роль основных членов этого уравнения разбирается в работе [213]. Уравнение для ТКЭ часто рассматривается в метеорологии, где роль многих слагаемых уравнения можно выделить более явно в силу большого масштаба атмосферных процессов (Re $\approx 10^8$).



(а)



(б)

Рисунок 5.42: Z–t-диаграммы полученные в результате непрерывного усреднения (Re$_1 = 4704$, 128^3 ячеек): (а) — средней температуры $\langle \overline{T}_S \rangle$, (б) — кинетической энергии $\overline{e}_{\text{turb}}$.

Адвекция турбулентной кинетической энергии:

$$-\left(U\frac{\partial \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial x} + V\frac{\partial \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial y} + W\frac{\partial \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial z}\right)\frac{L}{U_0^3}. \qquad (5.75)$$

Вклад диффузии пульсациями давления

$$-\left(\frac{\partial u'p'}{\partial x} + \frac{\partial v'p'}{\partial y} + \frac{\partial w'p'}{\partial z}\right)\frac{L}{\rho_0 U_0^3}. \qquad (5.76)$$

Турбулентный перенос покомпонентно:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^3 + u'v'^2 + u'w'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'^2v' + v'^3 + w'^2v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'^2w' + v'^2w' + w'^3}\right)\right)\frac{L}{U_0^3}. \qquad (5.77)$$

Вклад молекулярной вязкости:

$$\frac{\mu}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{e}_{\text{turb}}}{\partial z^2}\right)\frac{L}{U_0^3}. \qquad (5.78)$$

Производство турбулентной кинетической энергии покомпонентно

$$-\left(\overline{u'^2}\frac{\partial U}{\partial x}+\overline{v'^2}\frac{\partial V}{\partial y}+\overline{w'^2}\frac{\partial W}{\partial z}+\overline{u'v'}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\overline{u'w'}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\overline{v'w'}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)\frac{L}{U_0^3}. \quad (5.79)$$

Турбулентная диссипация покомпонентно:

$$-\frac{\mu}{\rho_0}\left(\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2+}\right.$$

$$\left.\overline{+\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2}\right)\frac{L}{U_0^3}. \quad (5.80)$$

Компоненты (приведённые) турбулентного теплового потока:

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}^{T}=-\frac{\overline{\rho}\overline{u'T'}}{\rho_0},\quad \mathcal{Q}_{\mathrm{Y}}^{T}=-\frac{\overline{\rho}\overline{v'T'}}{\rho_0},\quad \mathcal{Q}_{\mathrm{Z}}^{T}=-\frac{\overline{\rho}\overline{w'T'}}{\rho_0}, \quad (5.81)$$

рассчитываются без домножения на теплоемкость c_p.

Для расчёта вклада этих членов необходимо ввести дополнительные массивы для усреднения пульсационных составляющих:

- средних значений $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, который усредняются на каждом шаге по времени n следующим образом:

$$\overline{u}_i[n]=\frac{n\overline{u}_i[n-1]+u_i[n]}{n+1}; \quad (5.82)$$

  где $\overline{u}_i[n]$ — среднее значение переменной u_i на шаге n, $\overline{u}_i[n-1]$ — среднее значение переменой u_i на шаге $n-1$, $u_i[n]$ — фактической значение переменной на шаге n ($n=0{,}1{,}...$);
- пульсационные составляющие ($\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$), в силу общей анизотропии потока могут быть не равны нулю:

$$\overline{u_i'}[n]=\frac{n\overline{u_i'}[n-1]+(\overline{u_i}[n]-u_i[n])/U_0}{n+1}; \quad (5.83)$$

- средние значения пульсаций скорости и давления: $\overline{u'p'}$, $\overline{v'p'}$, $\overline{w'p'}$, рассчитываемые по общей формуле:

$$\overline{u_i'p'}[n]=\frac{n\overline{u_i'p'}[n-1]-(p(\overline{\rho}[n])-p(\rho[n]))(\overline{u_i}[n]-u_i[n])/\rho_0/U_0^3}{n+1}; \quad (5.84)$$

- одноточечные корреляции скорости и температуры $\overline{u_i'T'}$, $\overline{v_i'T'}$, $\overline{w_i'T'}$ для расчёта турбулентного теплового потока:

$$\overline{u_i'T'}[n]=\frac{n\overline{u_i'T'}[n-1]+2\left(\overline{u_i'}[n]-u_i[n]\right)\left(\overline{T}[n]-T[n]\right)/U_0/(T_1+T_2)}{n+1}; \quad (5.85)$$

- квадраты пульсаций: $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$, вычисляемых по формуле:

$$\overline{u_i'u_j'}[n]=\frac{n\overline{u_i'u_j'}[n-1]+\left(\overline{u_i'}[n]-u_i[n]\right)\left(\overline{u_j'}[n]-u_j[n]\right)/U_0^2}{n+1}; \quad (5.86)$$

- тройные одноточечные корреляции: $\overline{u'^3}$, $\overline{u'^2v'}$, $\overline{u'^2w'}$, $\overline{v'^2u'}$, $\overline{v'^3}$, $\overline{v'^2w'}$, $\overline{w'^2u'}$, $\overline{w'^2v'}$, $\overline{w'^3}$:

$$\overline{u_i'u_j'u_k'}[n]=\frac{n\overline{u_i'u_j'u_k'}[n-1]+\left(\overline{u_i'}[n]-u_i[n]\right)\left(\overline{u_j'}[n]-u_j[n]\right)\left(\overline{u_k'}[n]-u_k[n]\right)/U_0^3}{n+1}; \quad (5.87)$$

- средняя турбулентная кинетическая энергия

$$\overline{e}_{\mathrm{turb}}[n]=\frac{\overline{e}_{\mathrm{turb}}[n-1]+0.5\left(\overline{u'^2}[n]+\overline{v'^2}[n]+\overline{w'^2}[n]\right)}{n+1}; \quad (5.88)$$

– средняя интенсивность турбулентности

$$\overline{I}\,[n] = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{e}_{\mathrm{turb}}\,[n]}. \tag{5.89}$$

Рассматриваемое двойное интегрирование — по времени и по пространству («комбинированный фильтр»), представляет собой довольно мощное средство, которое, с одной стороны, облегчает анализ, а с другой — «стирает» мелкомасштабные характеристики течения, связанные с турбулентными пульсациями или мелкомасштабным течением. Кроме того, мы предполагаем, что частота дискретизации получаемых данных оказывается достаточной для построения информативных Z–t-диаграмм. Рассмотрение статических средних, полученных вторым способом, проводится только для режимов, соответствующих турбулентному развитию течения. Большой объём данных связан с необходимостью накопления и хранения трёхмерных (в общем случае) массивов средних температуры $\langle\overline{T}\rangle_S$, компонент скорости $\langle\overline{U}\rangle_S$, $\langle\overline{V}\rangle_S$, $\langle\overline{W}\rangle_S$, первых моментов усреднения пульсаций скорости $\langle\overline{u'}\rangle_S$, $\langle\overline{v'}\rangle_S$, $\langle\overline{w'}\rangle_S$, вторых моментов $\langle\overline{u'^2}\rangle_S$, $\langle\overline{v'^2}\rangle_S$, $\langle\overline{w'^2}\rangle_S$, интенсивности $\langle\overline{I}\rangle_S$ и кинетической энергии турбулентности $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S$, а также компонентов уравнения для кинетической энергии турбулентности:

– адвекции $\mathcal{A}_t = -\overline{u}_j\frac{\partial\overline{e}_{\mathrm{turb}}}{\partial x_j}$;

– диффузией турбулентности, обусловленной корреляцией давления и скорости $\mathcal{D}_p = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{u'_i p'}}{\partial x_i}$;

– турбулентного транспорта $\mathcal{T}_t = -\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u'_j u'_j u'_i}}{\partial x_i}$;

– молекулярного вязкого транспорта $\mathcal{T}_\nu = \frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^2\overline{e}_{\mathrm{turb}}}{\partial x_j^2}$;

– производства турбулентности $\mathcal{P} = -\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}$;

– диссипации турбулентности $\varepsilon_k = -\frac{\mu}{\rho_0}\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$.

Диффузионные члены отвечают за перераспределение турбулентной кинетической энергии. Вклад плавучести отсутствует.

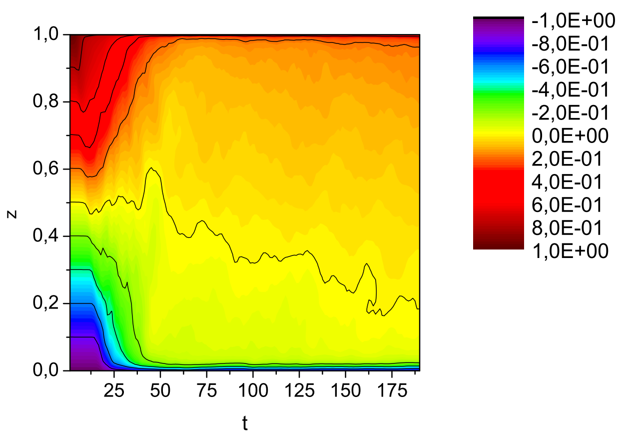
Кроме того, мы рассмотрим тепловой поток, обусловленный корреляцией турбулентных пульсаций скорости и температуры (далее — турбулентный тепловой поток) в различных направлениях $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{X}}$, $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Y}}$, $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}}$.

Как при работе обычного пространственного усреднения, в рассматриваемом случае на цветовых Z–t-диаграммах будут наблюдаться включения различного размера, сохраняющиеся при усреднении, которые, несмотря на относительно малый размер на диаграмме, могут представлять собой либо очень высокоамплитудные пульсации, либо структуры, занимающие большой объём и способные сделать достаточный вклад в общее хаотическое поле пульсаций. Мощь (или грубость) фильтра делает большинство картин средних величин подобными как по шкале времени, так и по шкале амплитуд, несмотря на различия в числах Рейнольдса, интенсивностях начальных возмущений, а также размерах расчётной сетки, — что позволило дать общее описание для почти всех расчетов, указанных в таблице 18.

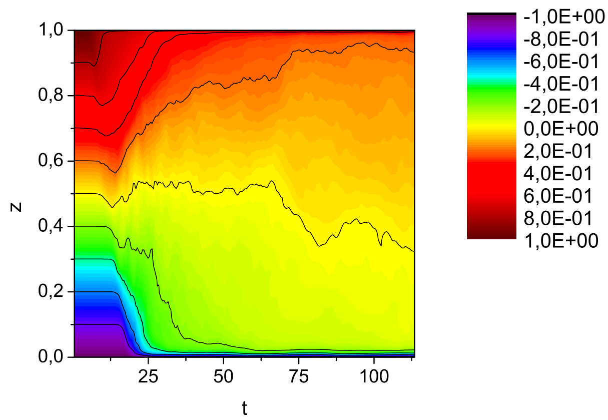
В качестве общей рекомендации можно отметить [214], что в экспериментах и численном моделировании пространственную и (или) временную дискретизацию следует выбирать таким образом, чтобы изменение расчётных величин было гладким на масштабе расчетной области или измеряемом временном интервале, таким образом, корреляционные функции на расстояниях, сравнимых с размером расчётной области, уменьшаются до пренебрежимо малых значений. Для использованных сеток время между последовательными кадрами составляло: $\Delta t = 1.186$ (сетка 64^3), $\Delta t = 0.593$ (сетка 128^3), $\Delta t = 0.593$ (сетка 256^3). Для дальнейшей визуализации Z–t-диаграмм в данном разделе использовались результаты расчёта №11 с сетками 128^3 и 256^3 ячеек для большого числа Рейнольдса, в последнем случае более трудоёмкие вычисления не удалось провести до той же точки останова.

Вследствие ограничений процессорного времени, расчёты на сетке 256^3 в том же диапазоне временных масштабов, что и расчёты на более мелких сетках являются трудно реализуемыми, таким образом, часть описания течения на больших временах эволюции проводилась по данным более грубых сеток. Исходя из общего поведения усредняемых величин на большинстве диаграмм можно выделить три области: область мелкомасштабного смешения, вследствие воздействия начальных мелкомасштабных возмущений, которые соответствуют небольшому «размытию» слоев с различной температурой (1), участок крупномасштабного смешения (2) (в котором происходит увеличение всех амплитуд усредняемых величин — то есть на этом участке реальный процесс мог идти ещё интенсивнее); участок мелкомасштабного смешения (3) в жидкости с уменьшенным градиентом температуры.

Характеризуя процесс смешения по средним профилям температуры $\langle\overline{T}\rangle_S$ (рисунок 5.43) можно заметить, что они испытывают существенное изменение в интервале, границы которого для различных расчетов колеблются: начальная точка лежит в пределах $t \approx 10$–20, конец крупномасштабного смешения и наиболее активного выравнивания температуры приходится на $t \approx 40$–45. В дальнейшем образуются тонкие пристеночные тепловые слои, которые имеют толщину $3-4\%$. В центральной зоне при $t \gtrsim 40$ слои меняются значительно слабее. Процесс менее масштабного смешения отражается на форме изолиний этих слоев, имеющих пилообразную форму. В результате смешения общий перепад температуры по высоте профиля уменьшается более чем в 10 раз и составляет $0.07\Delta T$ (расчёт 11а). В некоторых других расчётах, несмотря на длительность смешения, реализуется больший перепад температуры — $0.15\Delta T$ (расчёт 11г) и $0.2\Delta T$ (расчёт 11д).



(а)



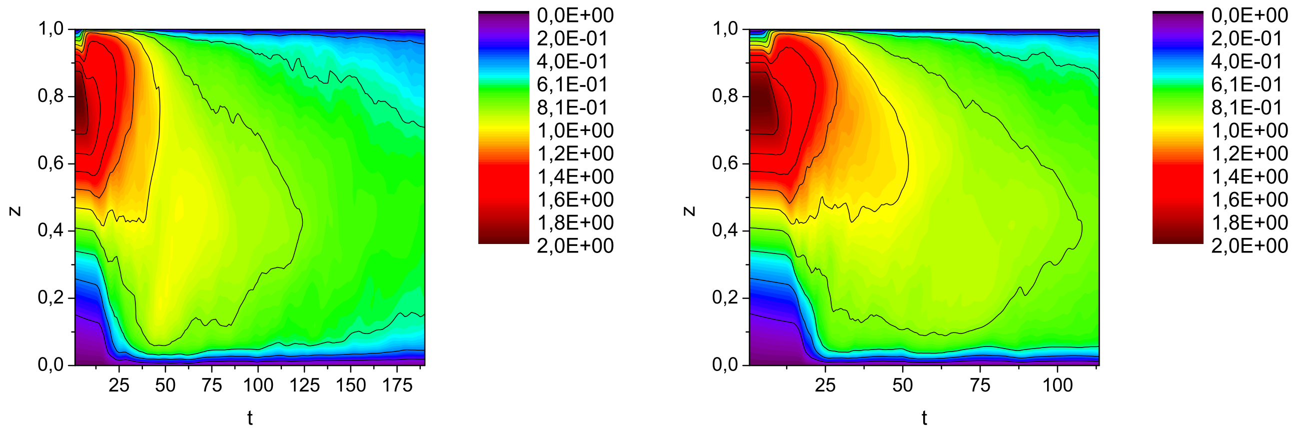
(б)

Рисунок 5.43: Z–t-диаграмма среднего профиля температуры $\langle\overline{T}_S\rangle$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($Re_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Профиль скорости в направлении основного течения $\langle\overline{U}\rangle_S$ меняется следующим образом (рисунок 5.44): происходит расширение ядра потока на интервале $t \approx 20$–40, соответствующем крупномасштабному смешению, затем при $t \approx 100$–140 профиль практически не меняется. В дальнейшем при $t \gtrsim 150$ на некоторых расчётах происходит замедление в области пристеночных слоев, что говорит о продолжении эволюции течения даже на очень больших временах ($t \gtrsim 180$).

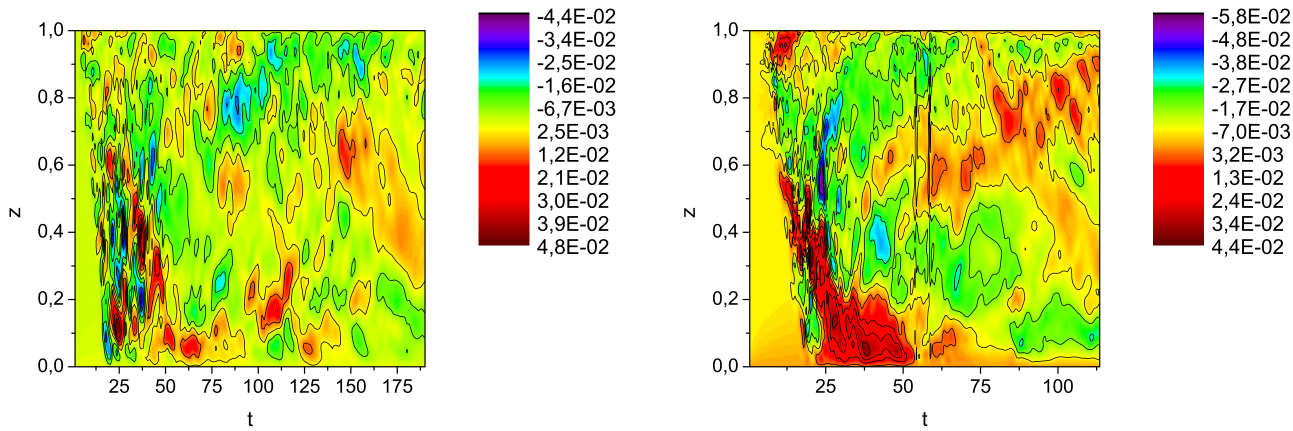
Компонента скорости $\left(\langle\overline{V}\rangle_S\right)$ в направлении периодичности без градиента давления имеет в среднем ненулевые значения, область их появления со временем расширяется сверху вниз (рисунок 5.45). При $t \gtrsim 20$ начинается появление областей с противоположным направлением скорости («пятен»), где наблюдаются наибольшие амплитуды средних ($\pm 0.02 ... \pm 0.03$) движений. При $t \gtrsim 60$–80 интенсивность их спадает приблизительно в 2 раза, а сами они становятся более размытыми (возможно не хватает временной дискретизации).

Компонента скорости W, отвечающая за пульсации в направлении, перпендикулярном стенкам, имеет изначально нулевые значения. Впоследствии $\langle\overline{W}\rangle_S$ (рисунок 5.46), усреднённая за интервалы между двумя последовательными «кадрами» на участке смешения, даёт малоамплитудные (пренебрежимо малые) значения порядка (10^{-7}), которые, как правило, исчезают к $t \gtrsim 50$ (расчёты 11г-д), вместе с тем, это среднее поле скорости имеет более сложный и менее регулярный



(а) (б)

Рисунок 5.44: Z–t-диаграмма среднего профиля скорости $\langle\overline{U}_S\rangle$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).



(а) (б)

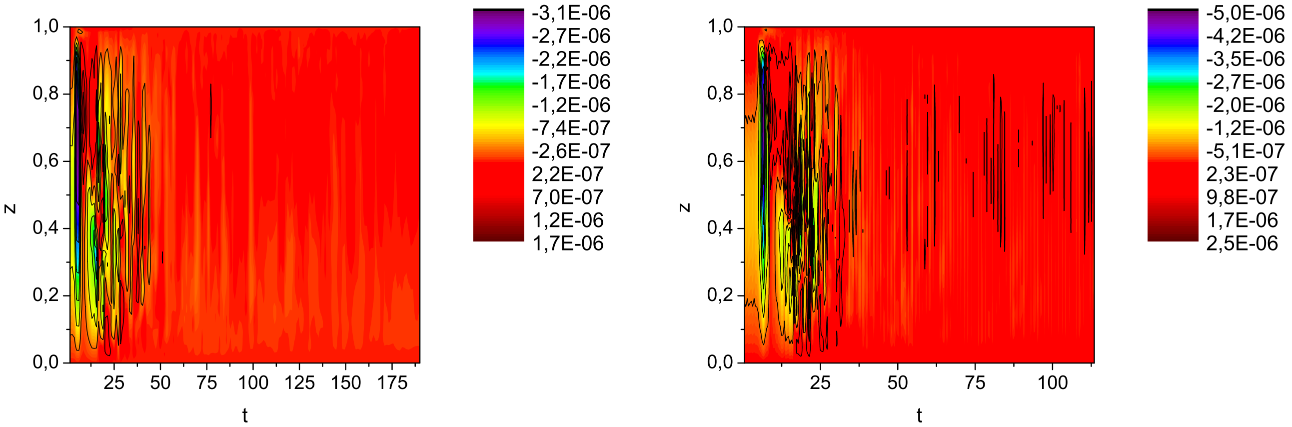
Рисунок 5.45: Z–t-диаграмма среднего профиля скорости $\langle\overline{V}_S\rangle$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

характер, так что в профиле могут наблюдаться как положительные, так и отрицательные значения. Малые значения средней скорости можно объяснить характером граничных условий (стенка), а также хаотичностью поля скорости.

Поле интенсивности $\langle\overline{I}\rangle_S$ демонстрирует более интересную картину (рисунок 5.47), так как имеет несколько характерных участков. Сначала имеется малоинтенсивная зона $\langle\overline{I}\rangle_S \approx 10^{-2}$ (соответствующая слабой турбулентности), расширяющаяся снизу вверх в диапазоне $t \approx 1.5$–10 (у холодной стенки) и имеющая форму трапеции.

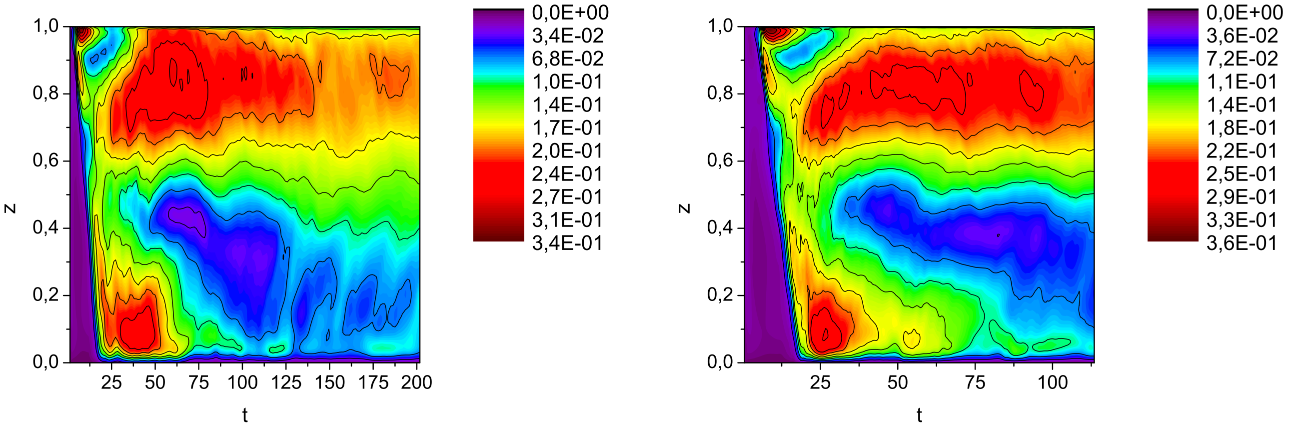
Следует также обратить внимание на локализованное образование у верхней стенки ($\langle\overline{I}\rangle_S \approx 0.28$–$0.35$), соответствующее сильной турбулентности, которое существует при $t = 8.5$–18, а затем на той же высоте канала (слое течения) следует спад ($\langle\overline{I}\rangle_S \approx 0.04$–$0.05$) в диапазоне $t \approx 18$–32, т.е. на этом участке пульсации подавляются в непосредственной близости от пристеночного слоя. В то же время эти достаточно мощные движения, приводят к возбуждению турбулентности в более близких к ядру потока слоях, и дальнейшее её распространение начинается из слоя $0.7 \lesssim z \lesssim 0.8$. Об этом свидетельствует узкий «мостик» между двумя областями повышенной интенсивности.

В верхней полуплоскости (на участке, соответствующем ядру потока) зона интенсивной турбулентности вновь возникает с $t \approx 8.3$, а затем достигает практически стационарных значений $\langle\overline{I}\rangle_S \sim 0.0184$–$0.236$, простираясь до диапазона $t \approx 80$–140 — фактически до конца расчёта. На боль-



(а) (б)

Рисунок 5.46: Z–t-диаграммы среднего профиля скорости $\langle\overline{W}\rangle_S$ (а) — для расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — для расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

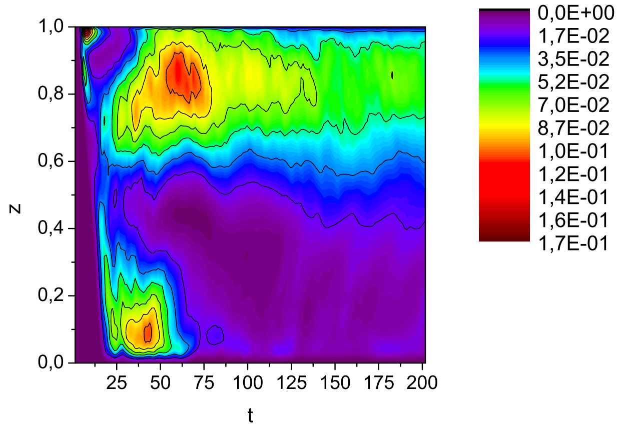


(а) (б)

Рисунок 5.47: Z–t-диаграмма интенсивности турбулентности $\langle\overline{I}\rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

ших временах расчёта общая интенсивность в верхней полуплоскости начинает падать и имеет пульсационный характер. В средней зоне интенсивность является практически неизменной и составляет $\langle\overline{I}\rangle_S \sim 0.12$. В нижней полуплоскости после «трапеции» имеется участок треугольной формы, в котором существуют пульсации $\langle\overline{I}\rangle_S \sim 0.24$ в диапазоне $t \approx 22$–60. За ним следует ($t \approx 80$–120) область слабой турбулентности $\langle\overline{I}\rangle_S \sim 0.03$, которая при $t \approx 120$–170 начинает сужаться к холодной стенке, а интенсивность пульсаций — расти ($\langle\overline{I}\rangle_S \approx 0.07$–$0.08$). Следует отметить, что в верхнем пристеночном слое большая интенсивность сохраняется все время расчёта.

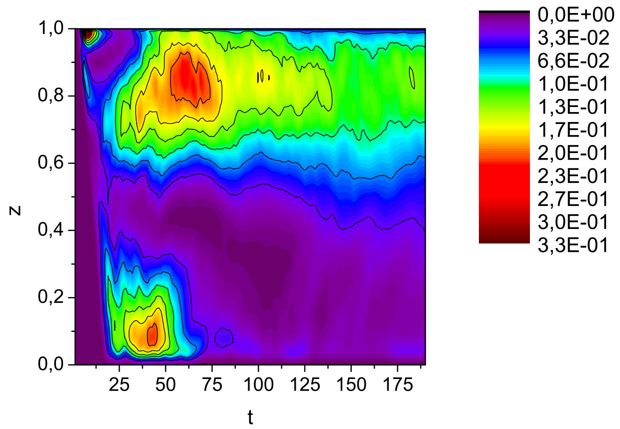
Турбулентная кинетическая энергия $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S$ имеет поведение (рисунок 5.48), схожее с интенсивностью, так как последняя строится на её основе, а в силу квадратичной связи, указанные выше зоны становятся ещё и более выраженными. Таким образом, в начале, в зоне «прямоугольной трапеции» $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S$ пренебрежимо мало $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S \approx 10^{-4}$; в локализованном образовании у верхней стенки в зоне активной генерации турбулентности — $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S \approx 0.1$–$0.18$, и далее спадает до $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S \approx 0.05$ с некоторыми более сильными «вкраплениями». Впоследствии в верхней полуплоскости $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S$ меняется в диапазоне от 0.081 до 0.091. В нижней полуплоскости имеется большое образование треугольной формы с интенсивностью до $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S \approx 0.095$–$0.127$, однако, оно быстро спадает до значений $\langle\overline{e}_{\mathrm{turb}}\rangle_S \approx 0.0011$–$0.0033$. Следует отметить, что существенных турбулентных пульсаций в центральном участке не наблюдается на любом интервале усреднения.



(a) (б)

Рисунок 5.48: $Z-t$-диаграмма среднего распределения турбулентной кинетической энергии $\langle \overline{e}_{\text{turb}} \rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\text{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\text{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

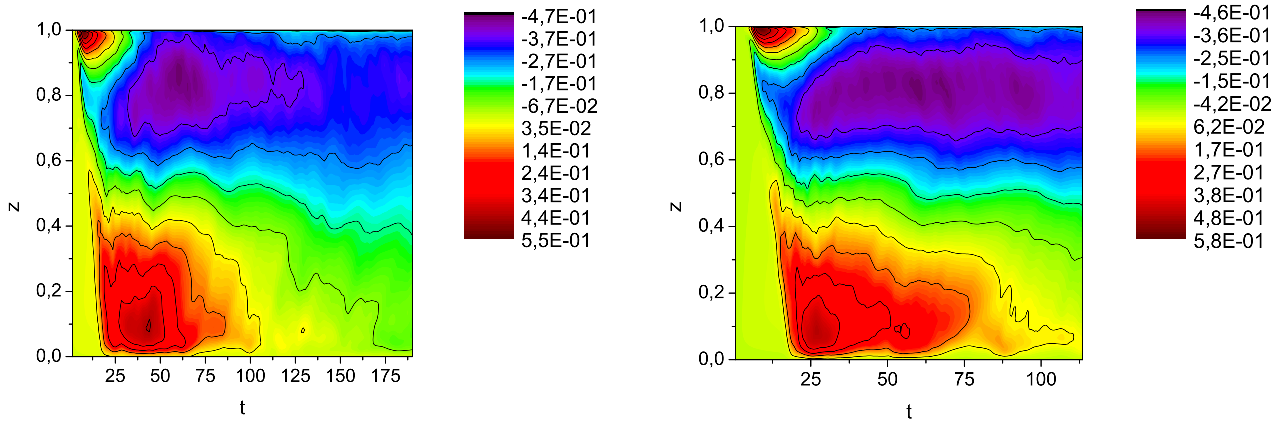
Квадрат пульсаций в направлении X $\langle \overline{u'^2} \rangle_S$ имеет следующие значения (рисунок 5.49): «трапециевидная область с амплитудой $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \approx 5 \times 10^{-5}$–$10^{-4}$, за ней сверху вниз, аналогично диаграмме $\overline{e}_{\text{turb}}$, следуют узкая область в верхнем пристенке $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \approx 0.35$, в центральной области амплитуда пульсаций уменьшается до значений $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \approx 0.007$–$0.0014$, в то время как в нижней полуплоскости имеется треугольная область с амплитудой $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \sim 0.2$, но на участке $t \approx 20$–60. На более длительных временах эволюции в верхней полуплоскости имеется область с такой же амплитудой в диапазоне $t \approx 18$–100. На длительных временах эволюции $t \gtrsim 100$ в верхней полуплоскости ($z \approx 3/4$) наблюдаются «пятна» амплитудой $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \sim 0.07$, а в нижней полуплоскости «шлейф» — $\langle \overline{u'^2} \rangle_S \approx 0.003$.



(а) (б)

Рисунок 5.49: Z–t-диаграмма среднего квадрата пульсаций скорости в направлении X $\langle \overline{u'^2} \rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\text{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\text{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

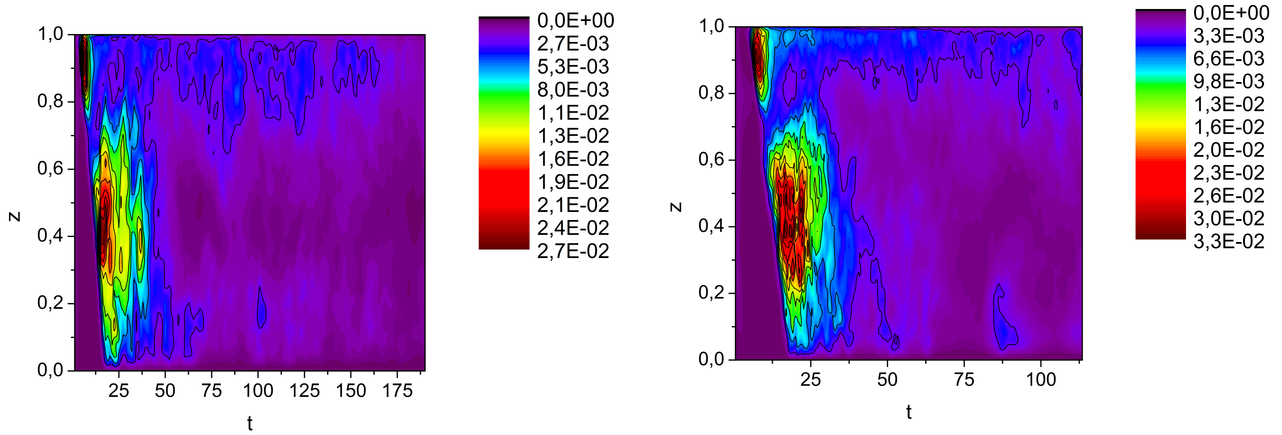
Пульсации в направлении X $\langle \overline{u'} \rangle_S$ имеют достаточно большие амплитуды (рисунок 5.50), что, помимо крупномасштабного смешения, связано с перестройкой основного профиля: в области «трапеции» их амплитуда составляет около 0.04, затем на участке разрушения основного профиля наблюдаются значения с амплитудой $-0.48 \lesssim \langle \overline{u'} \rangle_S \lesssim -0.37$ (в верхней полуплоскости — торможение) и $\langle \overline{u'} \rangle_S \approx 0.48$–$0.54$ (в нижней полуплоскости — разгон в силу несимметричности профиля скорости); в дальнейшем, за все время расчёта в верхней части расчетной области наблюдается постоянное торможение ($\langle\overline{u'}\rangle_S \sim -0.33$), а в нижней разгон сменяется постоянным торможением, приводящим к постоянным отрицательным средним ($\langle\overline{u'}\rangle_S \sim -0.1$).



(а) (б)

Рисунок 5.50: Z–t-диаграмма средних пульсаций скорости в направлении X $\langle\overline{u'}\rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Вторая компонента турбулентной кинетической энергии — квадрат пульсации в направлении Y $\langle\overline{v'^2}\rangle_S$ (рисунок 5.51) — ведет себя аналогично $\langle\overline{u'^2}\rangle_S$ — но в большем диапазоне значений: имеется трапециевидная область с амплитудой $\langle\overline{u'^2}\rangle_S \approx 10^{-4}$–$10^{-5}$, которая в диапазоне $t \approx 20$–40 сменяется областью резкого роста до максимальных значений $\langle\overline{u'^2}\rangle_S \sim 0.025$–$0.033$. В верхней пристеночной области максимум достигается при $t \approx 11.5$, а затем спадает от 0.01 к 0.005 ($t \approx 40$–50) и в последствии до слабых амплитуд 10^{-3}, вместе с тем, эти пульсации имеют характер «пятен» и в верхней полуплоскости могут достигать 0.002. В центре течения и нижней полуплоскости максимум достигается в центре ($t \approx 20$; $\langle\overline{v'^2}\rangle_S \approx 0.011$), и затем плавно спадает до 0.004, таким образом, существует два участка, в которых пульсации развиваются наиболее интенсивно.

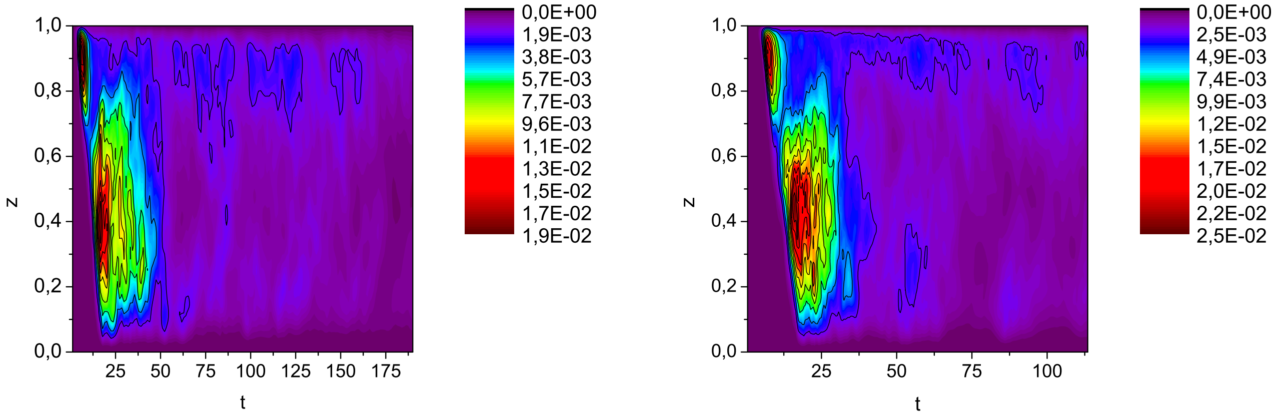


(а) (б)

Рисунок 5.51: Z–t-диаграмма среднего квадрата пульсаций скорости в направлении Y $\langle\overline{v'^2}\rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Средние пульсации в направлении Y $\langle\overline{v'}\rangle_S$ (поперёк основного течения) могут составлять до 0.04 по амплитуде (на рисунках не приводятся), наиболее интенсивными они оказываются в зоне крупномасштабного смешения $t \approx 20$–60, но и потом сохраняются на всем протяжении расчёта в виде «пятен», как в верхней, так и в нижней полуплоскости.

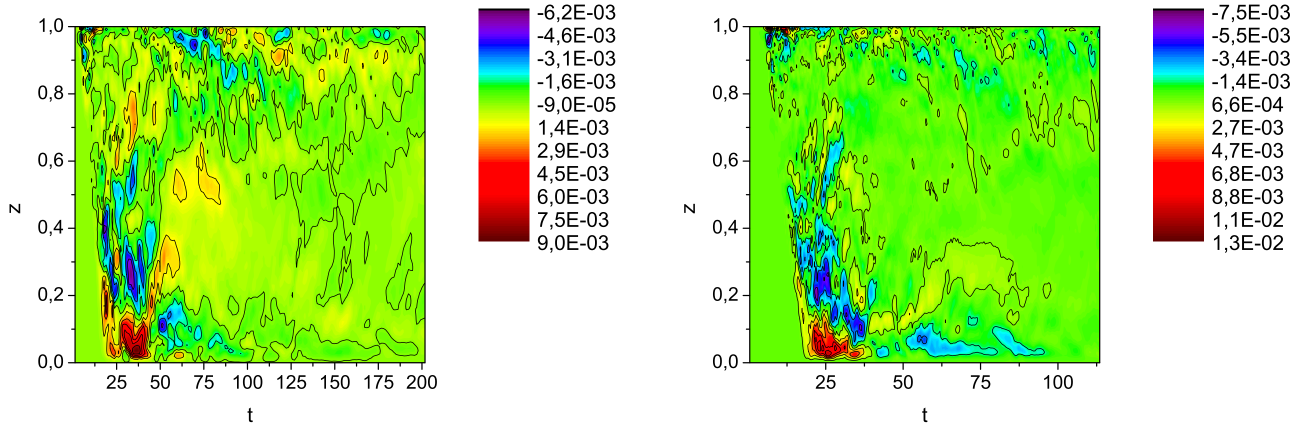
Диаграмма пульсации скорости поперек канала $\langle\overline{w'^2}\rangle_S$ (рисунок 5.52) также имеет трапециевидную зону $\langle\overline{w'^2}\rangle_S \approx 2\times10^{-5}$, затем она резко возрастает на узком участке ($\Delta t\approx 7$) до $\langle\overline{w'^2}\rangle_S \approx 0.02$; существенно, что они занимают около 3/4 канала, включая центральную часть и нижнюю полуплоскость в диапазоне крупномасштабного смешения $t\approx 20$–40. Затем следует резкий спад $\langle\overline{w'^2}\rangle_S \approx 0.001$–$0.002$ во всем расчётном интервале, т.о., трёхмерный характер течения, хоть и наблюдается, но оказывается почти полностью подавленным воздействием фильтра. Пульсации в направлении Z $\langle\overline{w'}\rangle_S$: имеют достаточно малые амплитуды $\pm(10^{-6}$–$10^{-7})$ и значимой информации не несут.



(а) (б)

Рисунок 5.52: Z–t-диаграмма среднего квадрата пульсаций скорости в направлении Z $\langle\overline{w'^2}\rangle_S$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

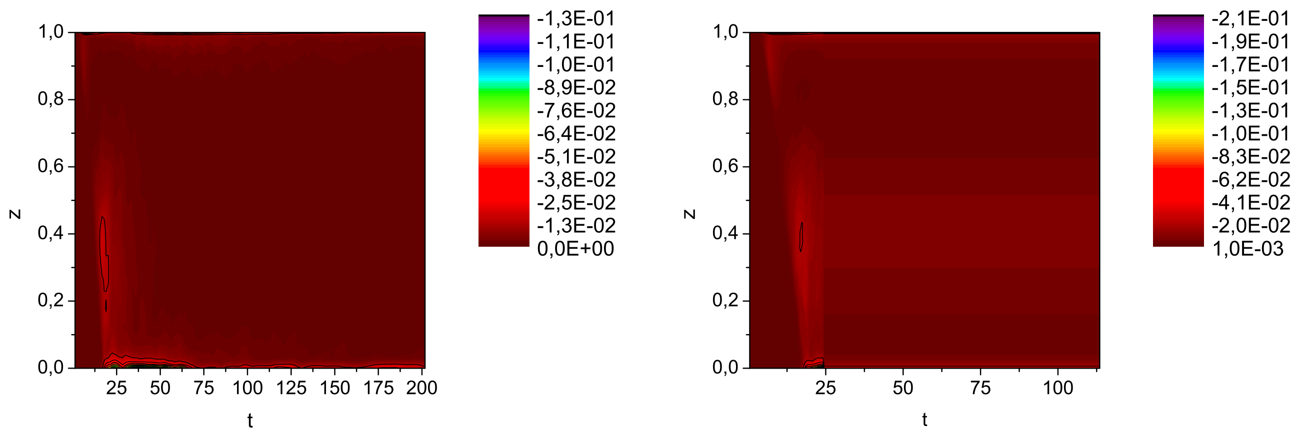
Адвекция ТКЭ $\mathcal{A}_t$ (рисунок 5.53) в трапециевидной зоне ($t\approx 0$–8.5 — меньшее основание «трапеции» у верхней стенки, $t\approx 0$–27.5 — большее основание у нижней стенки), имеет отрицательное значение $\mathcal{A}_t \approx -4...-2.5\times10^{-8}$, за ней располагается зона крупномасштабного смешения ($\mathcal{A}_t \approx \pm 0.01$) в диапазоне $t\approx 20$–40. Далее эта компонента в основном развита в верхней полуплоскости $z \gtrsim 3/4$ в виде крупномасштабных «пятен», где их амплитуда составляет $\mathcal{A}_t \approx -1.2...1.7\times10^{-3}$ и сохраняется на всем расчётном промежутке, в нижней полуплоскости в среднем имеются около нулевые значения; при $t>50$ в центральной зоне и нижней полуплоскости устанавливаются величины порядка $(\pm10^{-4})$.



(а) (б)

Рисунок 5.53: Z–t-диаграмма средних значений турбулентной адвекции $\mathcal{A}_t$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

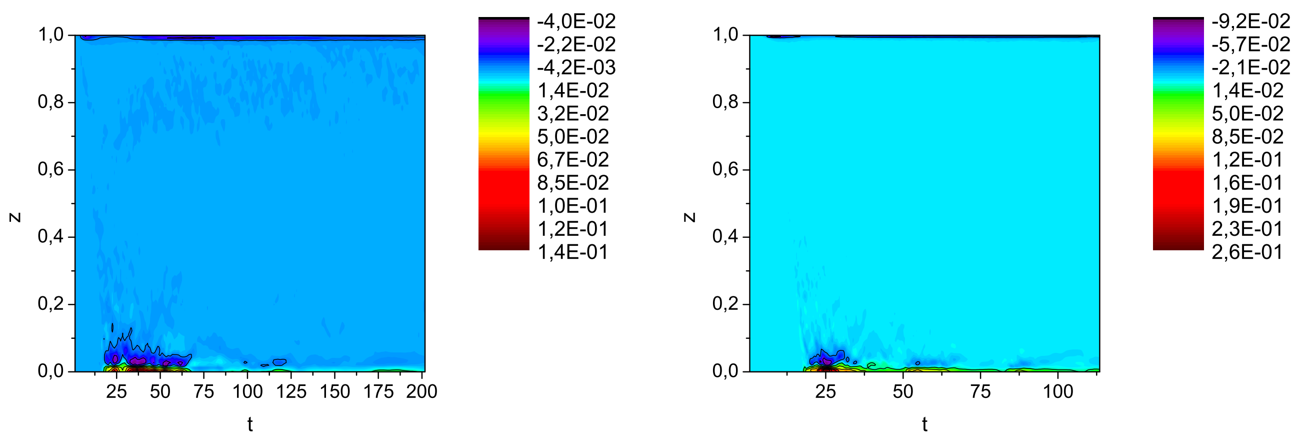
Диссипация ТКЭ ε_k в трапециевидной зоне (рисунок 5.54) имеет отрицательные значения $-10^{-4}...-10^{-5}$, к ней прилегает узкая полоска в зоне активного смешения, имеющая максимальную ширину $t \approx 20$–30 у нижней стенки. В зоне активного смешения на некоторых режимах в верхнем пристенке могут достигаться значения $\varepsilon_k \approx -0.36$; в средней зоне — до $\varepsilon_k \approx -4 \times 10^{-3}$; в нижнем пристеночном слое $\varepsilon_k \approx -0.05...-0.13$. При дальнейшей эволюции у горячей стенки реализуются значения $\varepsilon_k \approx -0.02$, а в центральной зоне имеют место околонулевые положительные значения $\varepsilon_k \sim 10^{-4}$, в нижней части существует протяженный участок отрицательных значений в диапазоне $\varepsilon_k \approx -0.003$. На некоторых режимах при длительных временах эволюции (после $t > 40$) скорость диссипации оказывается на порядок меньше (-2×10^{-4}), тем не менее, в общей диаграмме сохраняются более интенсивные включения.



(а) (б)

Рисунок 5.54: Z–t-диаграмма средних значений диссипации ТКЭ ε_k, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

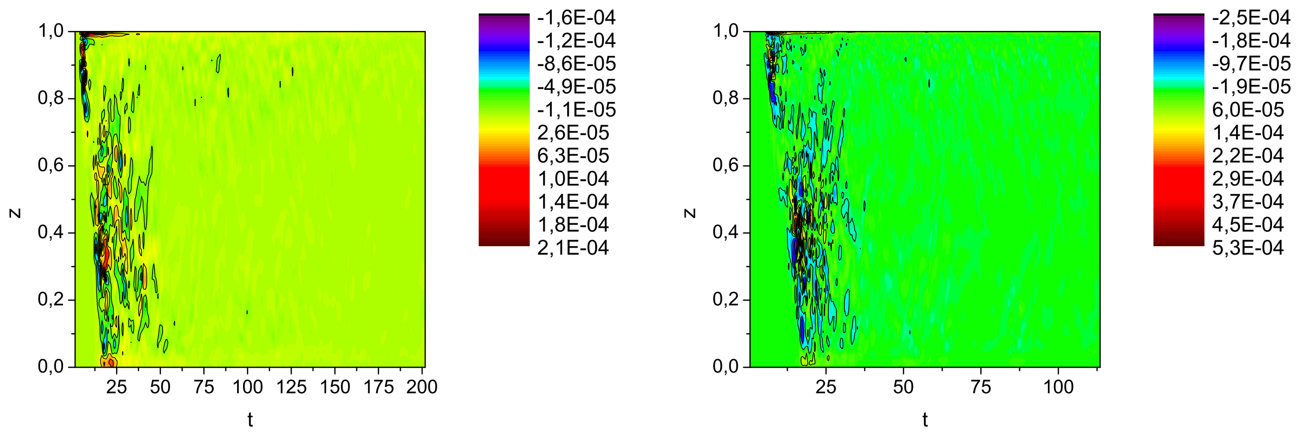
Вязкий молекулярный транспорт ТКЭ $\mathcal{T}_\nu$ практически на всей диаграмме (рисунок 5.55) имеет пренебрежимо малые значения ($\mathcal{T}_\nu \approx 6 \times 10^{-5}$), исключение составляет узкий участок у нижней стенки $t \approx 20$–40 и $z \lesssim 1/8$ с положительной ($\mathcal{T}_\nu \approx 0.066$) и отрицательной ($\mathcal{T}_\nu \approx -0.03$) зонами. В верхнем пристенке после трапециевидной зоны наблюдается узкий продолжительный участок с отрицательными значениями ($\mathcal{T}_\nu \approx -0.0305$). В нижней полуплоскости на больших временах расчёта $t \approx 110$–160 вязкая диссипация имеет отрицательные значения.



(а) (б)

Рисунок 5.55: Z–t-диаграмма средних значений диссипации ТКЭ $\mathcal{T}_\nu$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

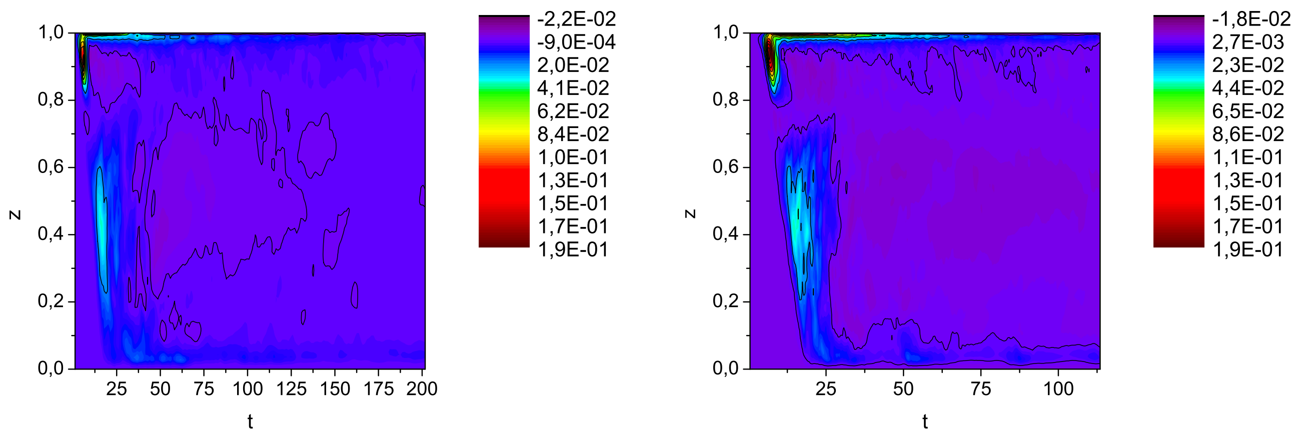
Диффузия ТКЭ, обусловленная корреляцией пульсаций давления и скорости $\mathcal{D}_p$ (рисунок 5.56) начинает развиваться только после начала крупномасштабного смешения $t \gtrsim 15$ (в трапециевидной зоне значения этого компонента в среднем пренебрежимо малы $\mathcal{D}_p \sim 10^{-8}$) в зоне сильной турбулентности в центральной части и верхней полуплоскости ($\mathcal{D}_p \sim \pm(10^{-5}$–$10^{-4})$), а затем сужается к верху и при $t > 160$ почти полностью исчезает ($\mathcal{D}_p \sim \pm 6 \times 10^{-6}$).



(а) (б)

Рисунок 5.56: Z–t-диаграмма средних значений диффузии ТКЭ $\mathcal{D}_p$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

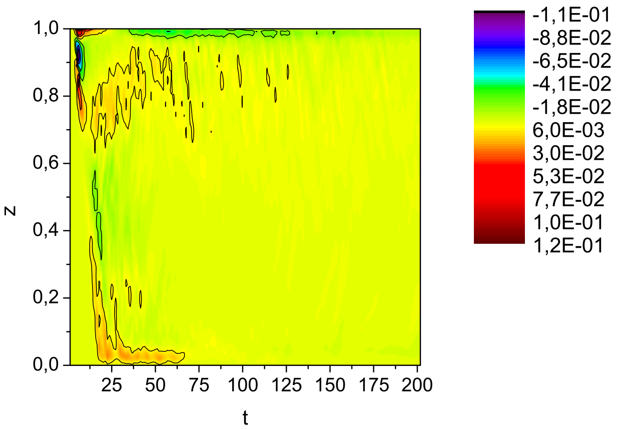
Производство турбулентной кинетической энергии $\mathcal{P}$ (рисунок 5.57) начинает активно развиваться за пределами трапецеидальной зоны ($\mathcal{P} \sim 10^{-7}$) и в верхнем пристенке в зоне активного смешения ($\Delta t \approx 10$) достигает своего максимума $\mathcal{P} \approx 0.07$–0.1, несколько меньшие значения наблюдаются в центральной части ($\mathcal{P} \sim 0.008$). В дальнейшем при эволюции течения при $t > 40$ имеют место своеобразные пульсации до $\mathcal{P} \sim 0.03$. Иногда при малых Re (расчёт 8а) производство турбулентной кинетической энергии хорошо наблюдается в горячем пристенке ($\mathcal{P} \lesssim 0.15$), далее, если $t > 40$, то наблюдается выход на режим — с образованием симметричного относительно оси течения. В этом случае амплитуды в пристенке составляют порядка (10^{-3}), в центре — порядка (-2×10^{-3}). Таким образом, в центре производство оказывается отрицательным по достижении больших времен $t > 100$.



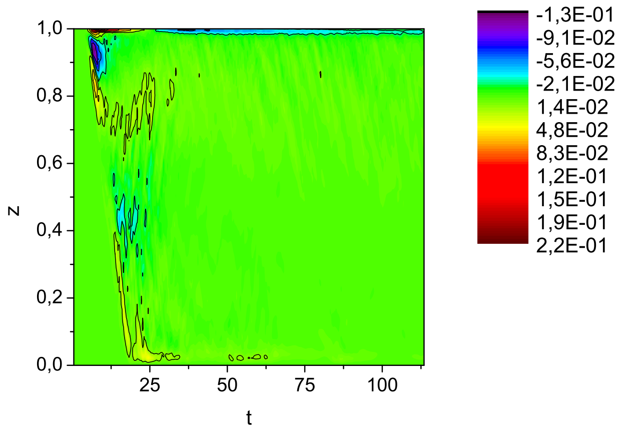
(а) (б)

Рисунок 5.57: Z–t-диаграмма средних значений членов, отвечающих за производство турбулентной кинетической энергии $\mathcal{P}$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Турбулентный транспорт ТКЭ $\mathcal{T}_t$ (рисунок 5.58), наряду с диссипацией ε_k является самой трудновычислимой величиной, также имеет трапециевидный участок $\mathcal{T}_t \sim 10^{-8}...4 \times 10^{-7}$. После этого он наиболее активен в зоне крупномасштабного смешения ($\mathcal{T}_t \approx \pm 0.06$), а после его окончания — в верхнем пристенке $t > 40$ — $\mathcal{T}_t \approx -0.01$, в остальной области — ($\mathcal{T}_t \sim -2 \times 10^{-4}$). На больших временах эволюции диаграмма $\mathcal{T}_t$ характеризуется многочисленными мелкими «всплесками» или «пятнами».



(а)

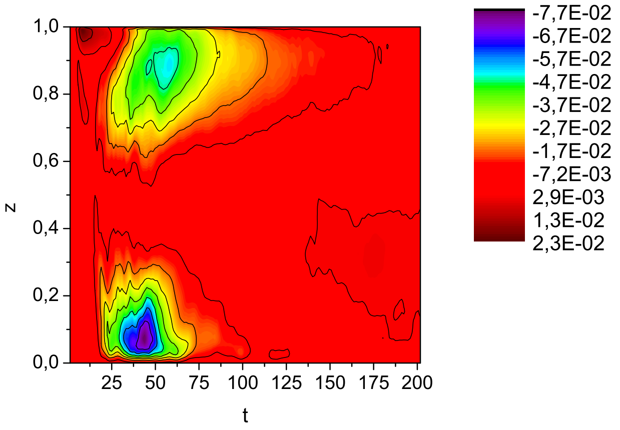


(б)

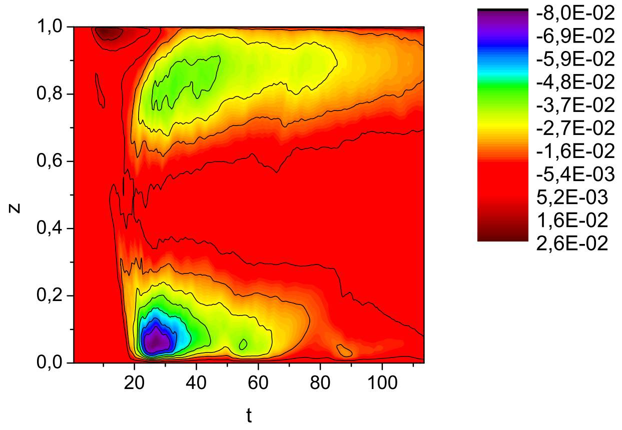
Рисунок 5.58: Z–t-диаграмма средних значений членов, отвечающих за производство турбулентной кинетической энергии $\mathcal{P}$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Турбулентный тепловой поток в направлении основного течения $\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T$ (рисунок 5.59а) после трапециевидной зоны ($\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \approx -0.002$) удобно рассмотреть в верхней и нижней половинах течения канала раздельно. В верхней половине канала имеется узкий положительный участок в горячем пристенке ($\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \approx 0.02$), когда тепловой поток направлен к горячей стенке. За ним следует резкий отрицательный ($\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \approx -0.02$) (экстремум на некоторых режимах составляет $\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \approx -0.043$) участок с выполаживанием к концу расчёта, которое постепенно даёт нулевые значения.

В нижней половине канала отрицательный участок ($\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \sim -0.08...-0.05$) на участке крупномасштабного смешения постепенно сменяется околонулевыми положительными значениями, на более поздних временах эволюции этот процесс повторяется ещё раз.



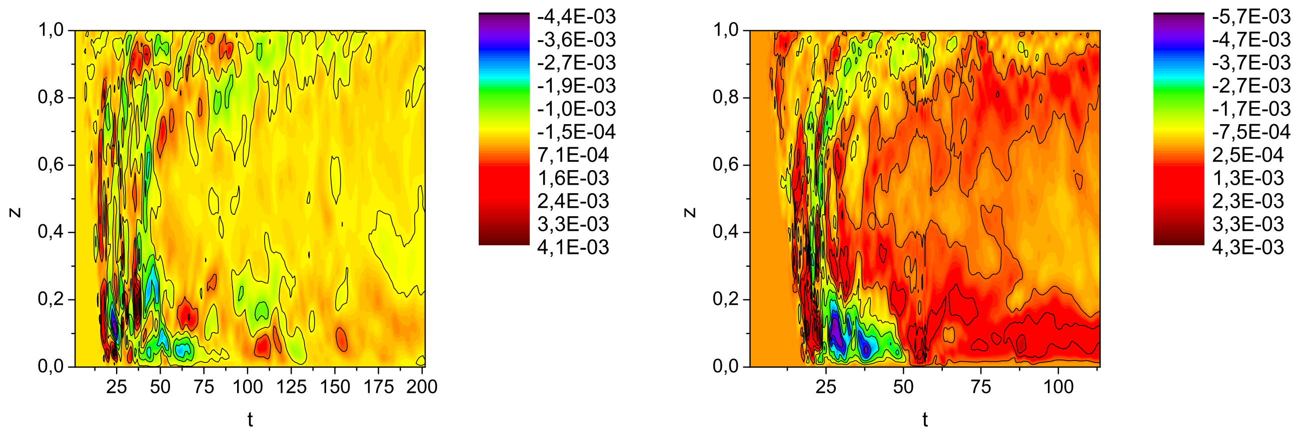
(а)



(б)

Рисунок 5.59: Z–t-диаграмма усреднённого турбулентного теплового потока в направлении X $\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Турбулентный тепловой поток в направлении Y — $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Y}}$ аналогичным образом (рисунок 5.60) в трапециевидной зоне имеет крайне малые значения ($\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Y}} \sim 10^{-7}$) и увеличивается на несколько порядков при активном смешении ($\pm 6 \times 10^{-3}$). После этой зоны в центре в среднем имеются положительные значения. При больших временах эволюции $t > 80$ на различных режимах он оказывается наиболее силен в нижней и верхней полуплоскости, а не в центре течения. В отличие от пристенков, в центральной области отсутствуют области с выраженным направлением переноса при сохранении пятен амплитудой $\pm 10^{-3}$.

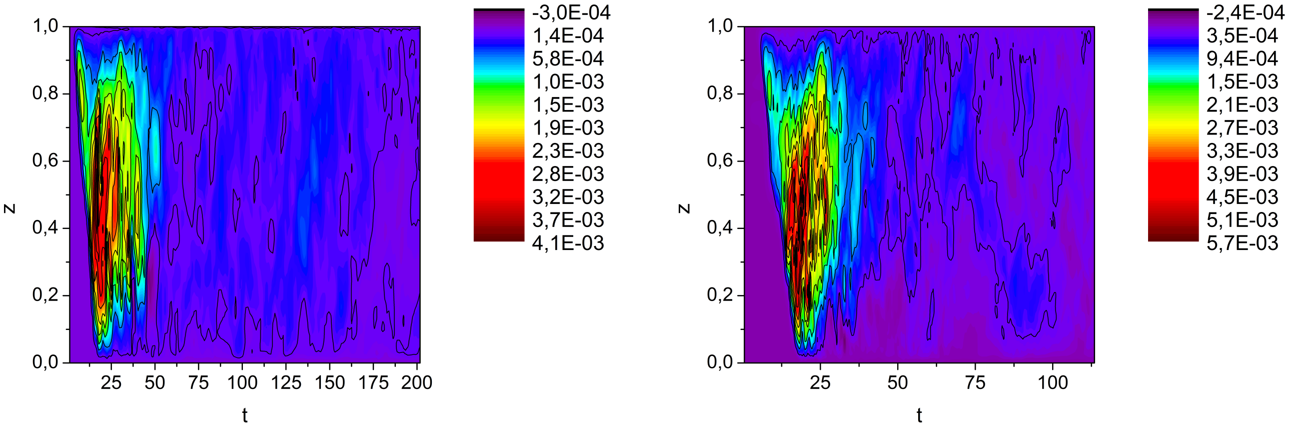


(а) (б)

Рисунок 5.60: Z–t-диаграмма усреднённого турбулентного теплового потока в направлении Y $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Y}}$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

Турбулентный тепловой поток $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}}$ в трапециевидной области отсутствует ($\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}} \sim 10^{-7}...10^{-6}$), затем в зоне крупномасштабного смешения $t \approx 20$–40 принимает в среднем положительные значения до $Q^T_{\mathrm{Z}} \sim 0.005$. В дальнейшем в верхней полуплоскости возникают отрицательные значения, сменяемые ($t > 60$) слабыми положительными «пятнами» ($Q^T_{\mathrm{Z}} \lesssim 10^{-4}$) во всей области.

Рассматривая Z–t-диаграммы $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}}$, можно заметить (рисунок 5.61), что в среднем $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}} > 0$, что кажется весьма необычным. Действительно, для несжимаемой жидкости в случае одномерных пульсаций $T' \propto w'$, таким образом, тепловой поток $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{Z}} \propto -\langle\overline{w'^2}\rangle_S$, — должен быть направлен сверху вниз. Объяснение стоит искать в существовании постоянного течения в направлении X, приводящего к значительным различиям в величине средних пульсаций по направлениям X и Z. В результате можно заметить явную связь $T' \propto u'$, приводящую к наблюдаемому подобию диаграмм $\mathcal{Q}^T_{\mathrm{X}}$ и $\langle\overline{u'^2}\rangle_S$ (см. рисунки 5.49 и 5.59).



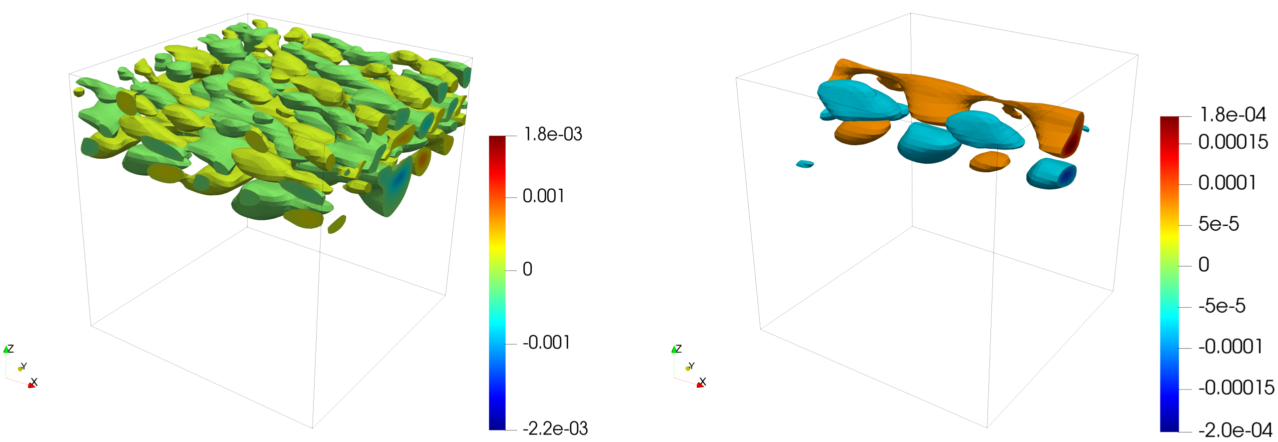
(а) (б)

Рисунок 5.61: Z–t-диаграмма усреднённого турбулентного теплового потока в направлении Z $\mathcal{Q}_{\mathrm{Z}}^{T}$, основанная на результатах (а) — расчёта 11г ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3 ячеек), (б) — расчёта 11д ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 256^3 ячеек).

5.3.11 Турбулизация течения с точки зрения трёхмерных полей скорости и температуры

В предыдущих разделах свойства течения рассматривались на основе различного рода усреднений, опишем теперь процесс турбулизации течения, непосредственно анализируя поля скорости.

Как уже указывалось ранее, при малых числах Рейнольдса происходит изменение формы начального профиля скорости. Вероятно, это может быть связано с существованием возмущений W, генерируемых при нелинейной эволюции возмущений U и V. На рисунке 5.62 представлены области течения, в которых $|W| \geqslant 1.6 \times 10^{-4}$ ($t \approx 1.18$) и ($|W| \geqslant 7.5 \times 10^{-5}$) ($t \approx 5.83$). Из приведённых значений следует, что флуктуации W затухают за довольно короткий промежуток времени, становясь пренебрежимо малыми. Тесное соседство участков W с разнонаправленной скоростью говорит о существовании вихревых движений с вектором завихренности, сонаправленным основному течению. Однако, данные вихри оказываются столь слабыми, что их не удаётся выделить при трехмерной визуализации энстрофии.



(а) (б)

Рисунок 5.62: Области в трёхмерном течении ($\mathrm{Re} = 294$, 64^3), в которых мелкомасштабное поле скорости W между стенками ограничено следующими неравенствами (а) — $|W| \geqslant 1.6 \times 10^{-3}$ ($t = 1.18$), (б) — $|W| \geqslant 7.5 \times 10^{-5}$ ($t = 5.93$).

В силу специфического УРС, а также малой теплопередачи, поле температуры выступает в качестве активного скаляра, связанного с уравнениями движения экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры. Тем не менее, открытым остаётся вопрос о степени этого влияния на процесс теплопереноса, так, можно предположить, что в данном случае температура выступает в качестве маркера жидких частиц, который хорошо отмечает смещение слоев. В начальный момент времени ($t \approx 0.59$) лучше всего наблюдаются возмущения поля температуры в направлении Y, без градиента давления, которые затем приводят к появлению весьма существенных гребней, и началу сворачивания «клубов» ($t \approx 2.97$) — рисунок 5.63а. В дальнейшем ($t \approx 5.93$) в силу малой вязкости процесс смешения наиболее интенсивно происходит в области $z \gtrsim 3/4$, при этом на некоторых участках пристеночные слои горячей жидкости вытесняются высокоскоростными включениями более холодной жидкости из ядра потока (рисунок. 5.63б). Из верхней части канала процесс смешения постепенно ($t \approx 8.9$) распространяется в центральную часть течения, с соответствующим ростом размеров смешивающихся структур, при этом развития смешения в нижних слоях практически не наблюдается (рисунок 5.63в). При $t \approx 11.9$ характер смешения остаётся неизменным. К моменту $t \approx 14.83$ (рисунок 5.63г) в нижней полуплоскости наблюдаются достаточно крупномасштабные включения из жидких частиц с различной температурой ($T = \pm 0.8$ и $T = 0$). К моменту $t \approx 29.7$ (рисунок 5.63д) появляется достаточно широкая область в среднем течении с температурой жидкости $T \approx 0$, а также наблюдаются структуры, отмечающие выбросы жидкости (холодной) от стенки, напоминающие по форме грибы. При $t = 44.5$ основная часть жидкости оказывается перемешанной (рисунок 5.63е), можно также выделить два тепловых слоя, периодически нарушаемых вихрями из центральной области течения.

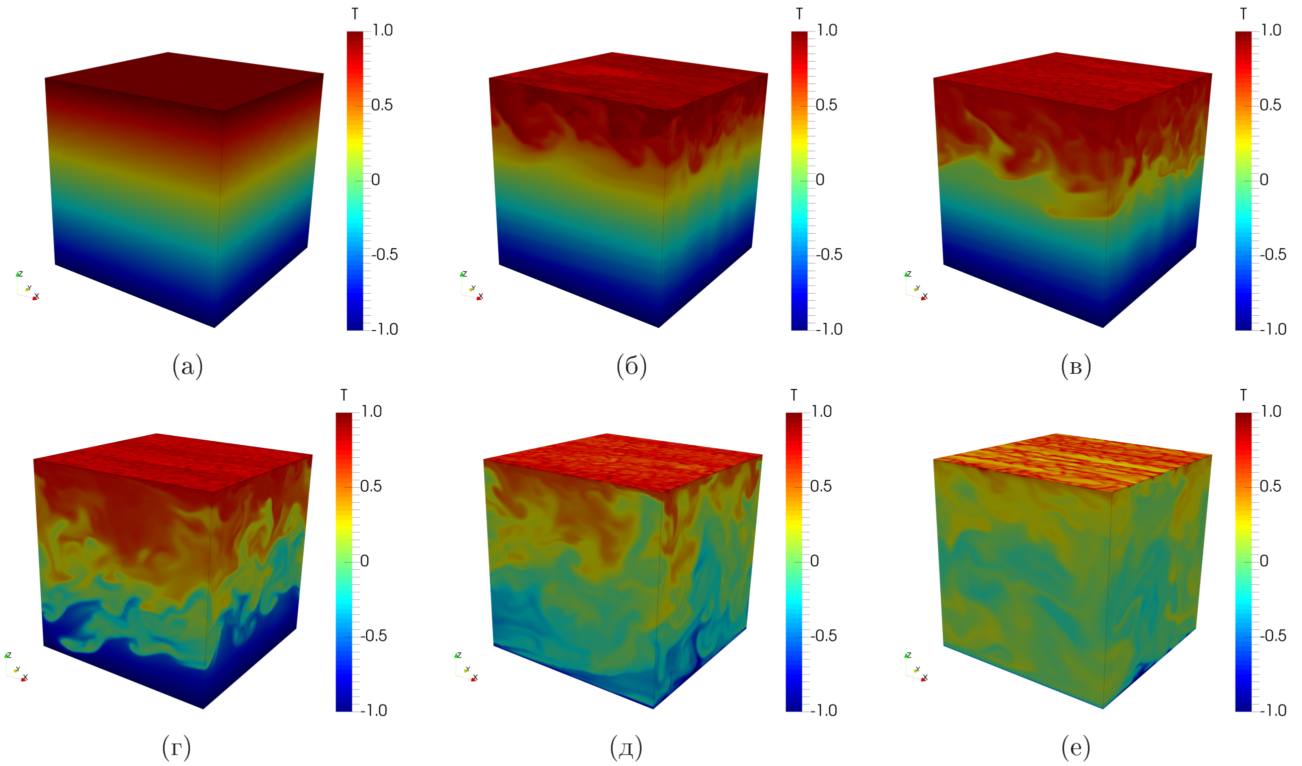
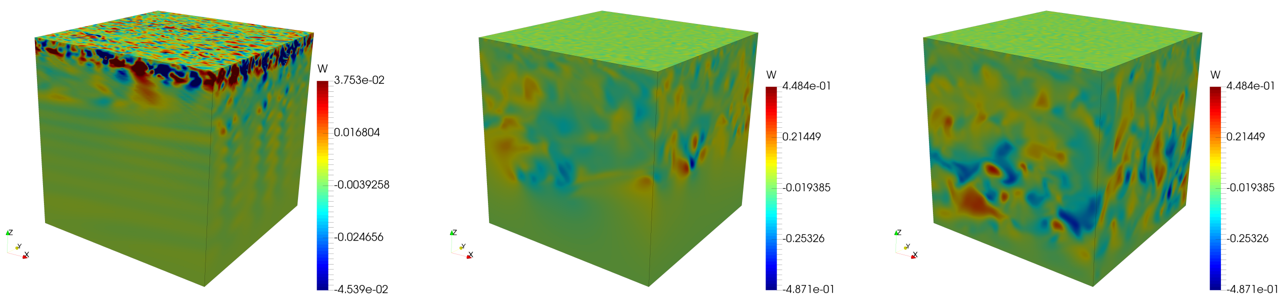


Рисунок 5.63: Распределение температуры в объёме жидкости, наблюдаемое в процессе смешения ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3), в различные моменты времени t (а) — 2.97; (б) — 5.93; (в) — 8.9; (г) — 14.83; (д) — 29.7; (е) — 44.5.

Рассмотрим эволюцию скорости W, изначально имеющую нулевые значения. При $t = 0.59$ (рисунок 5.64а) сказывается двумерный характер шума, поэтому возбуждение W носит регулярный пространственно-периодический характер. Однако практически сразу вносит своё влияние неоднородность поля вязкости, приводящая к тому, что в горячем пристенке формируются наиболее сильные возмущения (порядка $\pm 4 \times 10^2$), которые усиливаются в дальнейшем, вместе с этим, усиление пристеночных пульсаций приводит к развитию крупных возмущений в ядре потока, которые превосходят амплитуды в пристенке примерно на порядок ($\pm 5 \times 10^{-1}$). При ($t \approx 11.87$) возмущения становятся более крупномасштабными и занимают центральную часть течения (рисунок 5.64б). Данный процесс продолжается и при $t \approx 17.8$ (рисунок 5.64в), сопровождаемый расширением диапазона масштабов, на которых существуют пульсации, которые при этом смещаются к холодной стенке. В дальнейшем происходит увеличение масштаба пульсации с падением амплитуды до ± 0.2.



(а) (б) (в)

Рисунок 5.64: Распределение скорости W в объёме жидкости, на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3), в различные моменты времени t (а) — 2.97; (б) — 11.87; (в) — 17.8.

Аналогично профилю температуры при начальных условиях расчёта «11г», распределение скорости U достаточно выражено возмущается в направлении Y ($t \approx 0.59$). Наиболее быстро происходит возмущение горячего пристенка, в котором имеется сильный градиент скорости и малая вязкость (рисунок 5.65а). Ко времени $t \approx 5.93$ фактически происходит разрушение ядра потока (рисунок 5.65б). Стоит также обратить внимание, что, несмотря на большое значение средней скорости и её градиента, в направлении основного течения картина возмущений оказывается более размытой, чем в направлении Y.

При $t \approx 8.9$ можно заметить своеобразное расслоение течения (рисунок 5.65б): в его верхней половине происходит разрушение ядра потока и сильное истончение пограничного слоя у горячей стенки. В нижней половине в основном сохраняется регулярный характер течения. При $t \approx 11.87$ — начинается проникновение возмущений в нижнюю полуплоскость, а также соответствующее увеличение их масштаба (рисунок 5.65б). При $t \approx 20.76$ возмущения охватывают всю расчётную область (рисунок 5.65г). К $t \approx 38.57$ происходит существенное выравнивание течения в различных слоях, а максимальная скорость течения при этом падает в два раза. В дальнейшем характер эволюции не меняется.

Анализ полей скорости и температуры даёт возможность проследить основные этапы эволюции течения в широком диапазоне параметров, в принципе, определяемой среднемассовым числом Рейнольдса Re_1 и интенсивностью возмущений. В общем случае она сводится к следующему: при развитии течения возмущения в области $y \leqslant 3/4$ практически не растут (или растут слабо), наиболее существенным их рост оказывается в верхней пристеночной области. В некоторый момент времени происходит резкое усиление возмущений в зоне ядра потока, которое может быть вызвано или их самостоятельным ростом в отсутствие подавляющего эффекта стенки или под воздействием пристеночного возмущения («выбросом» медленных жидких частиц в высокоскоростную область). Так или иначе, происходит активная турбулизация течения в верхней половине канала. Дальнейшее развитие течения сводится к смешению в нижней половине расчетной области, полному выравниванию температуры и дальнейшей эволюции турбулизованного потока с (квази)изотермическим ядром. В свете изложенного в предыдущих разделах, необходимо заметить, что выраженного влияния точки перегиба профиля скорости на процесс смешения в данной постановке не наблюдалось.

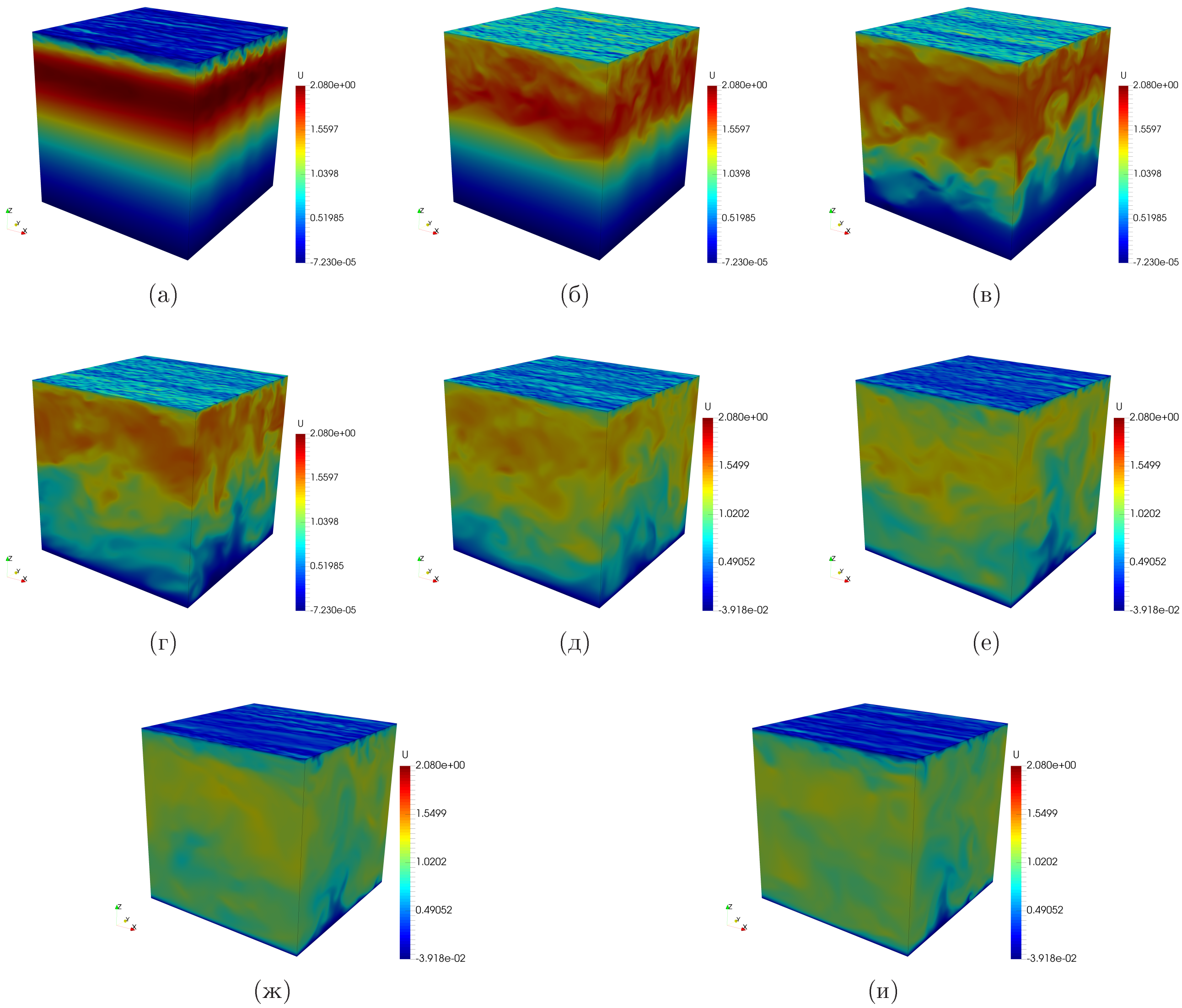


Рисунок 5.65: Распределение скорости U в объёме жидкости, на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения ($\mathrm{Re}_1 = 4704$, 128^3), в различные моменты времени t (а) — 2.97; (б) — 8.9; (в) — 14.83; (г) — 20.77; (д) — 26.7; (е) — 32.63; (ж) — 38.57; (ж) — 44.5.

На некоторых режимах течения турбулентность может поддерживать себя дольше, то есть участки с большой вязкостью являются ламинарными, а турбулентная кинетическая энергия выживает и может переноситься к малым масштабам. Такую турбулентность, сочетающую в себе ламинарную и турбулентную «фазы» можно назвать очаговой («lumpy» — как и в работе [187]).

5.3.12 Замечания о влиянии сжимаемости потока на характеристики турбулентного течения

В рассматриваемой модели течения предполагается возможным использование приближения слабой сжимаемости для моделирования течений несжимаемой жидкости на основании правильного выбора скорости распространения малых возмущений. Полезно обратить внимание на существенные изменения в структуре и энергетических характеристиках крупномасштабной турбулентности в высокоскоростном течении сжимаемой среды. Ранее указывалось, что скорость нарастания возмущения при смешении в свободном сдвиговом слое [179] уменьшается при росте числа Маха.

Существуют чёткие экспериментальные свидетельства того, что скорость нарастания слоя смешения в плоском свободном сдвиговом течении уменьшается вследствие сжимаемости [215]. Введение конвективного числа Маха M_c позволило обобщить экспериментальные данные, таким образом, при правильной нормировке рост этого слоя, а также другие параметры оказываются зависящими исключительно от M_c.

При соответствующем увеличении числа Маха потока флуктуации плотности и давления растут вместе с ним, что приводит к изменениям структуры и динамики турбулентности, вызванным непосредственно сжимаемостью. Этому способствует резкая неоднородность средних параметров течения — при числе Маха основного течения $\mathrm{M} = 5$ средняя температура может меняться в 10 раз поперёк слоя смешения с соответствующими вариациями вязкости и плотности. Указанные явления, в частности, проявляются при изучении сверхзвукового пограничного слоя на теплоизолированной или охлаждаемой пластине.

С точки зрения простоты исследований наиболее подходящими являются течения со свободными пограничными слоями, такие как следы за телами или слои смешения. Однако, при достаточно больших числах Маха и Рейнольдса пространственно однородные течения оказываются трудно реализуемыми в экспериментальной практике. С другой стороны, методы прямого численного моделирования могут столкнуться с определёнными трудностями [216] при разрешении случайных «скачковых структур» в трехмерной турбулентности при достаточно больших Re и M. С практической точки зрения наибольший интерес представляют приближённые модели замыкания второго порядка.

Диссипация ТКЭ вследствие сжимаемости называется дилатационной, она усиливает т.н. соленоидальную диссипацию (вследствие колмогоровского каскада в несжимаемой жидкости) и оказывается не зависящей от среднеквадратичного турбулентного числа Маха и функции плотности его вероятности в течении.

В несжимаемом пределе при достаточно большом турбулентном числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \propto \overline{\rho}\sqrt{\overline{u'^2}}l/\mu$ статистические моменты второго порядка определяются величиной среднеквадратичных пульсаций скорости $\sqrt{\overline{u'^2}}$, а также характерным масштабом турбулентности l.

Для случая сжимаемого течения из соотношения для энтальпии, определяющего связь пульсаций скорости и температуры, следует:

$$\frac{\partial \overline{u'^2}/2}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{5.90}$$

в результате для описания турбулентности потребуется введение только одного дополнительного параметра — температуры.

Например, возможным параметрическим соотношением является

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial t} = -\frac{\left(\overline{u'^2}\right)^{3/2}}{l} f(\mathrm{M}_t), \tag{5.91}$$

где f есть функция турбулентного числа Маха $\mathrm{M}_t = \sqrt{\overline{u'^2}}/c$, c — скорость звука, а l — связано с диссипацией в колмогоровском каскаде как $\varepsilon \propto \left(\overline{u'^2}\right)^{3/2}/l$.

При прямом численном моделировании течения [216] с достаточно большой флуктуацией плотности ρ'/ρ и турбулентным числом Маха M_t начальное соленоидальное поле турбулентности эволюционируют в «скачковые» структуры с резкими (узкими) градиентами плотности, окружающие крупномасштабные вихри. Некоторые области напоминают двойные скачки с толщиной λ, пропорциональной вязкости.

И хотя динамика двумерной турбулентности отличается от трёхмерного аналога, а процесс формирования локальных «ударноволновых структур» в трёхмерном случае менее выражен, несомненным остаётся факт, что усиление диссипации вследствие дилатации должно происходить и в реальных турбулентных течениях, когда флуктуации скорости оказываются сопоставимыми с величиной скорости распространения звука относительно усреднённого течения.

Обращаясь к структуре одномерной ударной волны, можно оценить вязкий масштаб λ по числу Рейнольдса как:

$$\frac{\lambda\rho\Delta u}{\mu} \sim O(1), \tag{5.92}$$

где Δu есть разность скоростей перед (u_1) и за (u_2) фронтом скачка, связанных соотношением Прандтля–Майера:

$$u_1 u_2 = c^{*2} = \gamma R T^* = u_1^2 \left(1 - \frac{\Delta u}{u_1}\right), \tag{5.93}$$

где γ — показатель адиабаты, R — газовая постоянная, c^* — скорость газа при температуре торможения T^*. Полная мгновенная скорость диссипации в следствие дилатации (на единицу массы) может быть записана как:

$$\varepsilon_3' \sim \nu \left(\frac{\Delta u}{\lambda}\right) = \frac{c^{*3}}{l} \left(\frac{(\mathrm{M}_1^2 - 1)}{\mathrm{M}_1}\right)^3, \tag{5.94}$$

где $\mathrm{M}_1 = u_1/c^*$ — является числом Маха в данный момент времени, соответствующим области пониженного давления, причём M_1 должен быть больше единицы.

Следует отметить, что выражение (5.94) не содержит вязкость в явном виде и напоминает параметрическое выражение для колмогоровской диссипации при малых скоростях, за исключением того, что его можно применять только тогда, когда M_1 — сверхзвуковое. u_1 — связано с «мгновенной» полной кинетической энергией как

$$u_1(t) = (u_i u_i)^{1/2} \tag{5.95}$$

и для того, чтобы получить среднее значение ε_3, формулу (5.94) необходимо усреднить по ансамблю, что требует знания функции плотности вероятности для M_1.

Также важно заметить, что механизм формирования скачка и дилатационная диссипация дополняют энергетический каскад Колмогорова, а процесс переноса спектральной кинетической энергии на малых масштабах не подвержен влиянию «скачковых» структур. Таким образом, модель соленоидальной диссипации ε предполагается независящей от ε_3.

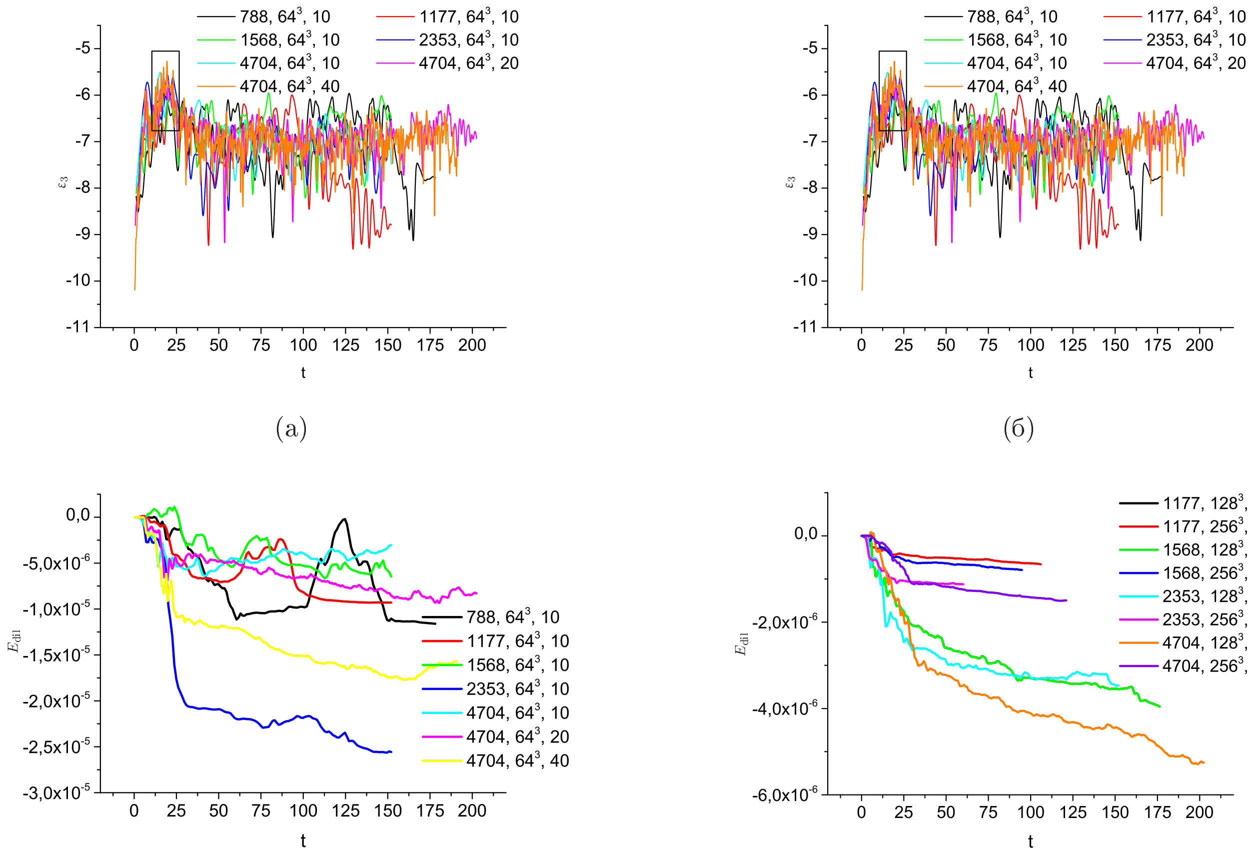
Фактически формирование диссипативных скачковых структур при больших числах Маха может существенно уменьшить роль каскадного механизма диссипации и привести, в свою очередь, к «истощению» мелкомасштабной турбулентности.

Следует отметить, что представленная модель и объяснения влияния сжимаемости базируются на предположении, что рассматриваемый слой смешения является полностью развитым, с высоким числом Рейнольдса потока, когда турбулентность находится в равновесии с текущими граничными условиями и имеет ограниченную память своей истории.

Перейдем к рассмотрению вклада сжимаемости в энергетические характеристики моделируемого течения. Как и в случае течения Тейлора–Грина, осцилляции скорости диссипации

$$\varepsilon_3 = -\frac{t_0}{U_0}\frac{1}{\rho_0 L^3} \int \int_0^L \int p\nabla \cdot \vec{V}\, dx\, dy\, dz \tag{5.96}$$

оказываются существенно меньше общей скорости диссипации ε и находятся в окрестности нуля. На рисунок 5.66a представлены кривые $\log|\varepsilon_3|$, которые демонстрируют пульсационные свойства дилатационного процесса. Можно заметить, что на грубых сетках для правильного отображения необходима как минимум в 4 раза более частая выборка, соответствующая расчёту со скоростью звука $c = 40$. Характерным является усиление амплитуды осцилляций на участке $t \approx 15$–40 (область,



(а) (б)

(в) (г)

Рисунок 5.66: (а) — модуль дилатационной скорости диссипации $\log|\varepsilon_3|$ для чисел Рейнольдса Re_1, соответствующих турбулентному сценарию эволюции течения, рассчитанный на сетке 64^3; (б) — аналогично, но для сеток 128^3 и 256^3; (в) — интеграл скорости дилатационной диссипации $\Delta E_{\rm dil}$, рассчитанный на сетке 64^3; (г) — аналогично предыдущему, сетки 128^3 и 256^3.

выделенная чёрной рамкой), где имеет место крупномасштабное смешение. Измельчение сетки приводит к снижению среднего уровня осцилляций с $\log|\varepsilon_3| \approx -7$ до $\log|\varepsilon_3| \approx -8.8$ (рисунок 5.66б). Вместе с тем, сохраняется участок, соответствующий крупномасштабному смешению.

Полезно рассмотреть интегральный вклад скорости диссипации вследствие дилатации

$$\Delta E_{\rm dil}(t) = \int^{t} \varepsilon_3(\hat{t})\, d\hat{t}. \tag{5.97}$$

При таком определении $\Delta E_{\rm dil}$ представляет собой долю энергии, отобранную из системы вследствие сжимаемости. На грубых сетках (64^3) наблюдается (рисунок 5.66в) начальное поглощение энергии потока, вероятно, вызванное образованием крупных вихрей, после $t > 40$ процесс активного отбора энергии (в среднем) практически заканчивается, на некоторых участках сменяясь обратным выделением энергии в поток. В любом случае, относительные изменения энергии не превышают $\Delta E_{\rm dil} \approx 2.5 \times 10^{-5}$. Переход к более мелким сеткам уменьшает вклад дилатации (рисунок 5.66г) в энергетические характеристики — для сеток 128^3 изменение составляет $\Delta E_{\rm dil} \approx 5 \times 10^{-6}$, а при расчёте на самой мелкой сетке $\Delta E_{\rm dil} \approx 1 \times 10^{-6}$. Как мгновенный, так и интегральный вклад дилатации оказывается достаточно малым, что свидетельствует о корректности постановки начальных и граничных условий и об адекватности реализованного приближения слабой сжимаемости.

Примечательно, что в двумерном случае вклад сжимаемости оказывается гораздо больше, что, вероятно, связано с трехмерностью расчетной области и особенностью эволюции турбулентности.

5.3.13 О поиске корреляционных зависимостей в турбулентном течении на поздних стадиях эволюции течения ТВЖ

Пространственно-временные корреляции всегда играли большую роль в статистических теориях турбулентности. Важность этого подхода отражается и в том, что многие современные исследования [217] проводятся только в аппарате корреляционных функций, т.о., формируют ещё более абстрактные модели по сравнению с теми, что основаны на прямом анализе полей скорости или завихренности. Функции взаимных корреляций используются [69] для проверки гипотез о существовании когерентных и других организованных структур в турбулентных течениях со стенками.

Хорошо известно о двойственности описания движения сплошной среды, связанного с использованием Эйлерова или Лагранжева подходов.

В дальнейшем, рассматривая корреляционные характеристики при течении ТВЖ в расчетной области мы будем рассматривать, следуя обозначениям и терминологии из обстоятельного обзора Уоллеса [218], где в исторической ретроспективе рассматривается разработка различных коэффициентов корреляции, а также их связь с масштабами турбулентного течения.

Эйлеров коэффициент корреляции для двух величин φ_i и φ_j в статистически стационарных турбулентных течениях, флуктуирующих в окрестности средних значений, в наиболее общем случае для двух положений и двух моментов времени определяется как:

$$R_{\varphi_i\varphi_j E}(x,r,t) = \frac{\langle \varphi_i(\vec{x},t_0)\varphi_j(\vec{x}+\vec{r},t_0+\tau)\rangle_A}{\sqrt{\langle \varphi_i(\vec{x},t_0)^2\rangle_A}\sqrt{\langle \varphi_j(\vec{x}+\vec{r},t_0+\tau)^2\rangle_A}}, \tag{5.98}$$

в частном случае φ_i и φ_j являются флуктуациями скорости u_i и u_j $(i,j=1,2,3)$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ — выделенная точка измерения (относительно которой все рассматривается),

$$\vec{x}+\vec{r} = (x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)$$

— положения точек относительно $\vec{x}$, которые могут систематически меняться, τ — величина временного интервала между моментами t_0 и $t_0+\tau$. Нижние индексы изменяются от 1 до 3, указывают пульсации вдоль (streamwise) основного направления потока (1) — u', поперек (spanwise) потока (2) — v', а также нормальные (wall-normal) к стенке (3) — w'. Знак $\langle\cdot\rangle_A$ — обозначает усреднение по ансамблю (assembly) течений.

Лагранжевы коэффициенты корреляции также могут определяться для жидких частиц, которые имеют положение $\vec{x}$ (в эйлеровой СК) при t_0, двигаются вдоль траекторий и достигают положения $\vec{x}+\vec{r}(t+\tau)$ в момент времени $t+\tau$. В данном случае, вектор перемещения $\vec{r}(t_0+\tau)$ — является случайной величиной, описывающей положение частиц из ансамбля, про которому проводится усреднение относительно начального положения $\vec{x}=\vec{x}(t_0)$, различного для каждой частицы. Таким образом, для Лагранжевых корреляционных коэффициентов $\vec{r}$ и τ являются взаимозависимыми, здесь $\vec{r}$ — функция от τ.

Такие Лагранжевы коэффициенты задаются формулой:

$$R_{ijL_1}(\vec{x},\tau) = \frac{\langle u_i(\vec{x},t_0)u_j(\vec{x}+\vec{r}(t_0+\tau)\rangle_A}{\sqrt{\langle u_i(\vec{x},t_0)^2\rangle_A}\sqrt{\langle u_j(\vec{x}+\vec{r}(t_0+\tau))\rangle_A}} \tag{5.99}$$

Можно также рассмотреть лагранжеву корреляцию для двух частиц на некотором расстоянии и рассмотреть корреляцию приращений скорости для двух частиц, каждая из которых движется по своей траектории, сам коэффициент корреляции задается как

$$R_{ijL_2}(\vec{x},r(t_0),\tau) = \frac{\langle \Delta_i(\vec{x},r(\vec{t_0}))\Delta_j(\vec{x},r(t_0\vec{+}\tau))\rangle_A}{\sqrt{\langle \Delta_i(\vec{x},\vec{r}(t_0))^2\rangle_A}\sqrt{\langle \Delta_j(\vec{x},\vec{r}(t_0+\tau))^2\rangle_A}}, \tag{5.100}$$

где $\vec{r}(t_0 + \tau)$ — радиус-вектор между положениями двух частиц при $t_0 + \tau$ и

$$\Delta_i = u_i(\vec{x}) - u_i(\vec{x} + \vec{r}(t_0 + \tau)).$$

В стационарной турбулентности ни лагранжевы, ни эйлеровы коэффициенты корреляции не зависят от начального момента времени t_0.

К самым ранним подходам относится работа Тейлора [41] о турбулентной диффузии жидких частиц, где было установлено, что для изотропной турбулентности одночастичный лагранжев коэффициент корреляции связан с среднеквадратичным пройденным расстоянием для ансамбля жидких частиц для некоторого положения пространстве и определённого направления распространения.

Дальнейшее развитие связано с работами Крэйчнана [219; 220], рассмотревшего «аппроксимацию непосредственного взаимодействия» (direct interaction approximation) с точки зрения эйлерова подхода, а также её связь с моделью EDQNM (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian Approximation) [221]. В последней работе Крэйчнан ввел гипотезу многомасштабности (sweeping hypothesis — гипотеза о крупных масштабах), которая предполагает, что корреляции, в принципе, определяются средним квадратом скорости на крупных масштабах (sweeping velocity — квадратный корень из турбулентной кинетической энергии, усредняемой, вероятно, по энергетическому интервалу), переносящих малые масштабы и энергетический спектр.

He и др. [222] показали, что крупномасштабная скорость (sweeping velocity) и энергетический спектр являются существенными параметрами в методе крупных вихрей, если он используется для предсказания звуковых спектров. Однако выяснилось, что эйлерова формулировка, введённая Крейчнаном, приводит к асимптотике $k^{-3/2}$ в энергетическом спектре, что находится в противоречии с предсказаниями теории Колмогорова.

В дальнейшем Крейчнан существенно модифицировал свой подход, который приобрёл название LHOIA (Lagrangian History Direct Interaction Approximation) [221; 223], использовав лагранжевы пространственно-временные корреляции для жидких частиц

После этого удалось согласовать результаты с колмогоровским спектром $k^{-5/3}$ в инерционном интервале, наряду со связанным колмогоровским каскадом в вязком интервале. Кроме того, LHDA согласуется с тейлоровским [41] анализом дисперсии одиночной частицы, а для потоков с возбужденным инерционным интервалом — с результатами Ричардсона, касающихся дисперсии двух частиц в турбулентном течении (см. законы Тейлора и Ричардсона [224] о турбулентной диффузии облака частиц).

Дальнейшие модификации были сделаны в работе [225], где рассматривались лагранжевы корреляции поля скоростей деформации, а не поле скорости.

Лагранжевы корреляционные функции играют существенную роль при разработке лагранжевых подсеточных моделей для LES-методов [226].

He и Zhang [227], используя разложение в ряды Тейлора для анализа эйлеровых и лагранжевых корреляционных функций в изотропных течениях [228; 229], сформулировали эллиптическую модель для эйлеровых пространственно-временных корреляций для течений со средней сдвиговой скоростью, $\overline{u}(z)$ — в обозначениях этой главы. Новая эллиптическая модель связывает корреляцию с единственной переменной r, используя две характеристические скорости — конвективного переноса и среднеквадратичной крупномасштабной скорости (sweeping velocity), которая зависит от интенсивности турбулентности и скорости сдвига (сдвиговой деформации).

Авторы указывают, что оперирование гипотезой о «вмороженной» турбулентности, использующей только скорость конвективного переноса, наряду с гипотезой Тейлора [43], приводит к пространственно-временной корреляции, обладающей достаточно специфической инвариантностью относительно трансляций вдоль основного течения: $R(r,\tau) = R(r - U_c\tau, 0)$, где U_c — скорость конвективного переноса турбулентных вихрей. Таким образом, контуры равной корреляции представляют собой прямые линии, $r - U_c t = C$, где $C = const$. Ранее это было замечено Уилсом

(Wills) [230] и действительно не может быть верным, так как корреляции должны спадать с увеличением интервала в пространстве и во времени [218].

Напротив, эллиптическая модель описывает корреляцию на малых дистанциях как

$$R\,(r,\tau) = R\left(\sqrt{(r - U_c\tau)^2 + V_{sw}^2\tau^2}, 0\right), \tag{5.101}$$

где первый член также является конвективной скоростью, а второй — крупномасштабной (sweeping velocity) V_{sw}, и появляется из разложения в ряд Тейлора до второго порядка.

Исследование низкорейнольдсовых турбулентных течений [231] показало, что эйлеровы пространственно-временные корреляции на некоторых участках действительно сводятся к универсальной зависимости (5.101). В дальнейшем эта модель с успехом применялась [232; 233] для трансформации временных корреляционных характеристик в пространственные при изучении турбулентной конвекции Рэлея– Бенара.

При изучении сдвиговых течений одна точка измерения может перемещаться вдоль потока относительно другого стационарно установленного датчика, при этом форма и протяженность контуров равной корреляции помогает некоторым образом идентифицировать вид структур, вызывающих подобную корреляцию. Одним из примеров такого метода является работы Фавра [234; 235], где по результатам термоанеметрических измерений было установлено, что условная линия равной корреляции (в некотором плоском сечении) смещается в центральную часть канала как по направлению потока, так и против него.

Уменьшение корреляции на малых масштабах с увеличением разделения датчиков и временной задержки связано со все меньшим вкладом малых масштабов. Измерениями было установлено, что в плоском сечении коэффициент корреляции представляет собой поверхность с гребнем, в окрестности которой скорость конвекции увеличивается, показывая, что скорость распространения крупных масштабов превышает скорость распространения мелких. Это может быть вполне возможным [218], так как источники крупномасштабных движений находятся на больших расстояниях от стенки, и, следовательно, должны двигаться со скоростью потока, находящегося дальше от неё.

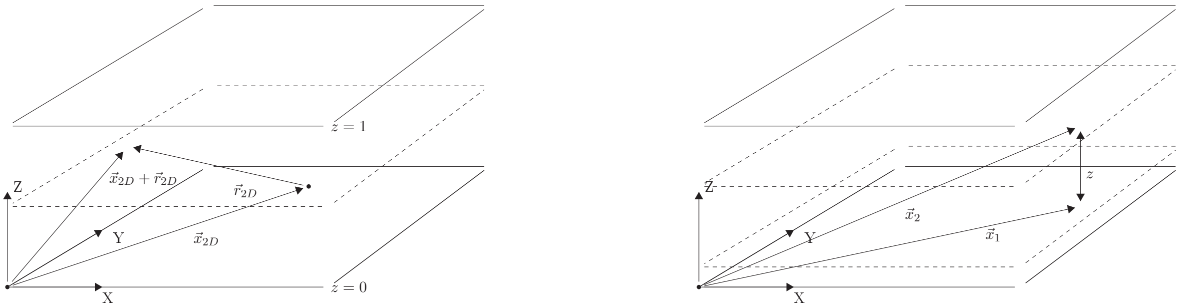
Измерение пространственно-временных корреляций для пульсаций скорости основного течения турбулентной затопленной струи в слое смешения может потребовать полосовой фильтрации [236]. Кроме того, в этой работе было установлено, что при увеличении расстояния между датчиками изменяется форма корреляций, а соответствующие конвективные скорости — уменьшаются, — вероятно, как результат того, что на больших дистанциях в корреляцию вносят вклад только большие масштабы.

В работе [237] было показано, что скорости конвекции U_c в плоской турбулентной затопленной струе направлены наружу от линий тока и, кроме того, что малые масштабы переносятся со скоростями, большими локальной средней скорости, в то время как большие масштабы переносятся медленнее, что согласуется с результатами [236].

Бонне и др. [238] использовали пары термоанемотрических датчиков для изучения структуры в дальней зоне следа, образующегося ниже по потоку от турбулентного пограничного слоя на обеих сторонах от задней кромки плоской пластины. Они обнаружили, что в их экспериментах не наблюдаются структуры типа двойного валика (double roller), как в плоских следах, возникающих из-за ламинарных пограничных слоев.

Таким образом [218], в свободном сдвиговом течении связь скорости конвекции с масштабом турбулентности оказывается противоположной связи, наблюдаемой во внутренних течениях.

В середине 1970 гг. было обнаружено, что усреднённая картина в пристеночном вязком подслое обусловлена существованием вихрей, вращающихся в противоположных направлениях и наклонённых вниз по потоку (под небольшим углом относительно стенки), которые движутся с практически постоянной конвективной скоростью. Так как пространственно-временные корреляции играют центральное место в предсказании акустических характеристик турбулентных течений, в частности,



(а) (б)

Рисунок 5.67: (а) — схема расчёта коэффициента корреляции $R^{\mathrm{Z}}_{\varphi_i\varphi_j}(r,t)$ (5.103); (б) — схема расчёта коэффициента корреляции $R_{\varphi_i\varphi_j}(z,r,t)$ (5.102).

с помощью LES-моделирования, то He и др. [222] исследовали влияние различных моделей корреляции в затухающей изотропной турбулентности. Все протестированные модели показали заниженное значение характерного времени потери корреляции.

В силу существования пространственной периодичности и для ускорения вычислений мы не будем рассматривать трёхмерный коэффициент корреляции, а «расщепим» его на две величины: коэффициент корреляции между точками в одной плоскости («простые» двухточечные корреляции) и коэффициент взаимной корреляции между точками двух параллельных плоскостей, две другие координаты которых совпадают. Первый коэффициент рассчитывается по всему сечению, располагающемуся в плоскости, параллельной стенкам канала, а его нормировка осуществляется по среднеквадратичным значениям на этой плоскости (в силу существования пространственной периодичности), таким образом, имеет смысл рассматривать поверхность (поле) коэффициентов корреляции:

$$R_{\varphi_i\varphi_j}(z,r,t) = \frac{\sqrt{\langle \varphi_i(z,\vec{x}_{2D},t)\varphi_j(z,\vec{x}_{2D}+\vec{r}_{2D},t)\rangle_S}}{\sqrt{\langle \varphi_i(z,\vec{x}_{2D},t)^2\rangle_S}\sqrt{\langle \varphi_j(z,\vec{x}_{2D},t)^2\rangle_S}}, \tag{5.102}$$

где $\vec{r}_{2D}$ — расстояние между точками в одной плоскости с ординатой z. Второй эйлеров коэффициент корреляции преобразуется к виду:

$$R^{\mathrm{Z}}_{\varphi_i\varphi_j}(r,t) = \frac{\sqrt{\langle \varphi_i(z,t)\varphi_j(z+r,t)\rangle_S}}{\sqrt{\langle \varphi_i(z,t)^2\rangle_S}\sqrt{\langle \varphi_j(z+r,t)^2\rangle_S}}, \tag{5.103}$$

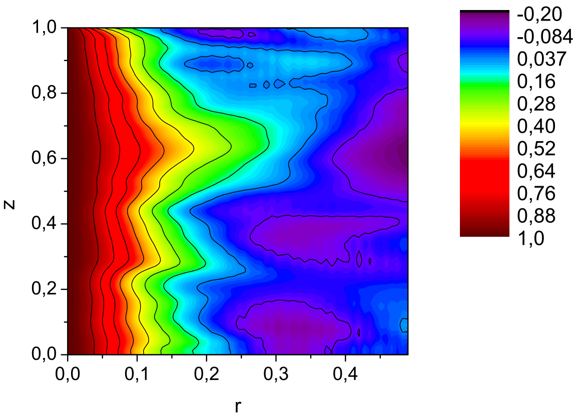
где r — расстояние между плоскостями по направлению Z, в результате можно будет найти расстояние, на котором теряется корреляция между двумя величинами.

При этом значения будут всегда браться из различных плоскостей, исключая дублирование при переборе. Значения $R_{\varphi_i\varphi_j}$ и $R^{\mathrm{Z}}_{\varphi_i\varphi_j}$ следует рассматривать при достаточно больших временах эволюции, после завершения основного выравнивания температуры.

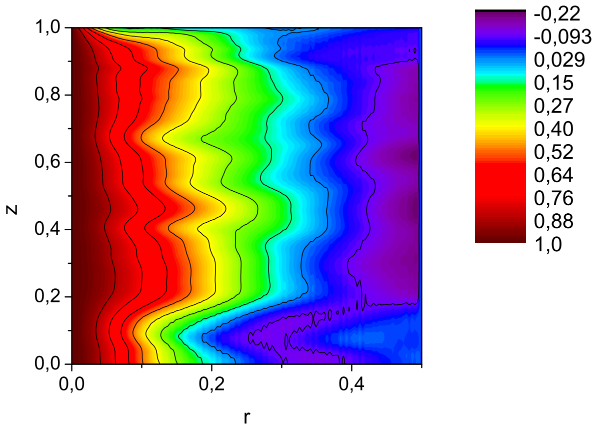
В случае изотропных течений $R^{\mathrm{Z}}_{\varphi_i\varphi_j}$ должен иметь симметричную форму, его диаграмма строится в безразмерных координатах (z, r), где z — положение плоскости для первой величины относительно нижней стенки, а $r = z_1 - z_2$ — расстояние до плоскости, на которой находятся значения второй величины. Таким образом, если рассчитывается корреляция φ_i у нижней стенки с φ_j, располагающейся у верхней стенки, то $r < 0$, в противном случае $r > 0$. Следует обратить внимание, что при расчёте коэффициента корреляции поперек потока по формуле (5.103) число точек в выборке никак не зависит от расстояния между плоскостями r.

В качестве дополнения можно привлечь понятие длины корреляции [58] в форме:

$$\Lambda_{u'u'}(z) = \frac{\int\limits_0^\infty R_{u'u'}(z,r)\,dr}{R_{u'u'}(z,0)}, \Lambda_{v'v'}(z) = \frac{\int\limits_0^\infty R_{v'v'}(z,r)\,dr}{R_{v'v'}(z,0)}, \Lambda_{w'w'}(z) = \frac{\int\limits_0^\infty R_{w'w'}(z,r)\,dr}{R_{w'w'}(z,0)}. \tag{5.104}$$



(а)



(б)

Рисунок 5.68: Коэффициент корреляции $R_{u'u'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

Коэффициент корреляции $R_{u'u'}$ в направлении основного течения (рисунок 5.68) должен характеризоваться наиболее широким участком корреляционной зависимости, имеющей существенное значение $R_{u'u'} \sim 0.3$ при $r \approx 0.2$–0.3 (для момента времени $t = 108$). Соответствующие длины корреляции $\Lambda_{u'u'}(z)$ имеют максимальное значение в центре течения, постепенно спадая к пристеночным областям. Обращает на себя внимание то, что слою с максимальной корреляционной длиной соответствует область с отрицательной корреляцией, что может говорить о влиянии периодичности на $R_{u'u'}$.

Поведение простой корреляции $R_{v'v'}$ носит осциллирующий характер (рисунок 5.70), независимо от положения слоя, что подтверждается характерной длиной корреляции $\Lambda_{v'v'}$.

Зависимость коэффициента автокорреляции пульсаций скорости $R_{w'w'} = R_{w'w'}(z,r)$ отличается следующими свойствами. В целом, рассматривая совокупность кривых (рисунок 5.71), рассчитанных в различные моменты времени, можно выделить участок практически постоянной формы, имеющий форму дуги, в котором $R_{w'w'}$ имеет положительные значения $R_{u'u'} > 0.2$, при больших r для любого z имеются участки практически нулевой корреляции, сменяемые участками с отрицательным $R_{w'w'}$. Существование отрицательной корреляции при больших r — $R_{w'w'} \sim -0.1... -0.15$ может говорить о: (1) — недостаточном количестве точек усреднения на больших расстояниях (так как рассматриваемые флуктуации не параллельны основному течению), (2) — влиянии периодичности. На близких расстояниях $R_{w'w'} < 0$ может быть объяснено существованием вихревых пар. Очевидно, что в пристеночной области корреляции должны теряться гораздо быстрее, чем в средней зоне. Также для этого коэффициента характерны отрицательные корреляции в обоих пристенках. Анализ длины корреляции $\Lambda_{w'w'}$ показывает (рисунок 5.69), что она принимает самые малые значения в пристеночных областях ($z = 0.004$–0.035, $z = 0.984$–0.022), а самые большие — в центральной области ($z = 0.5$–0.010), причём, у горячей стенки длина корреляции приблизительно в 1.5 раза короче, чем у холодной.

Полученный интегральный масштаб предоставляет дополнительную возможность для обсуждения качества сеточного разрешения в рассматриваемой задаче. Зачастую предполагается, что корреляционная длина или интегральный масштаб равны или порядка размеров расчетной области L, на основании чего, после подстановки этого размера в соотношение Колмогорова для масштабов, делается вывод о достаточности (или нет) пространственного шага для отображения всех существенных вихрей (масштабов). Данная процедура представляется малообоснованной, — так, например, в моделируемом течении продольный корреляционный масштаб может быть на порядок меньше L в центре потока, не говоря уже о пограничных слоях. Таким образом, с формальной точки зрения, процедура подбора сеточного разрешения должна быть итерационной, последовательно включая в себя расчёты: (1) — течения на грубой сетке, (2) — корреляционных функций, (3) —

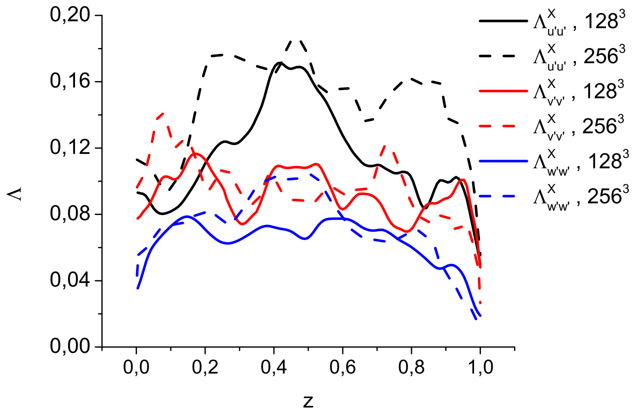
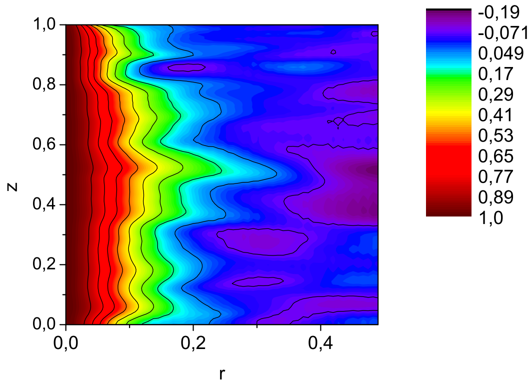
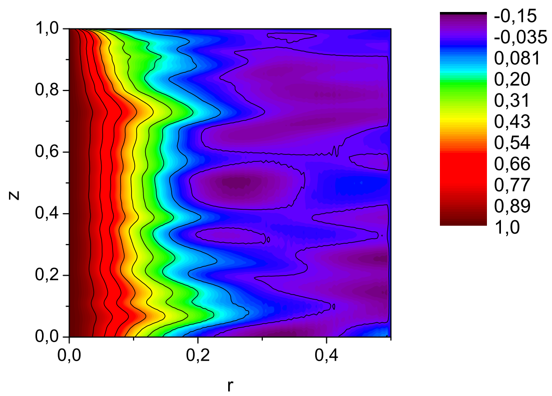


Рисунок 5.69: Длина корреляции (интегральный масштаб), на основе коэффициента корреляции, рассчитанного в одной плоскости, по формуле 5.104).



(а)



(б)

Рисунок 5.70: Коэффициент корреляции $R_{v'v'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

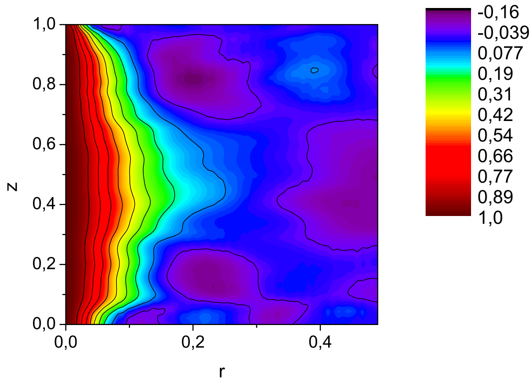
интегральных масштабов, на основе которых из имеющихся асимптотик будет определяться колмогоровский масштаб.

Корреляции пульсаций основного течения и температуры $R_{u'T'}$ (рисунок 5.72) демонстрируют наибольшие значения, так в верхней полуплоскости при $r < 0.1$ наблюдаются минимальные отрицательные корреляции $R_{u'T'} \approx -0.8... - 0.6$, особенно сильные в верхнем пристенке. Аналогичные, только положительные значения наблюдаются у нижней стенки; — особенно на коротких масштабах. $R_{v'T'}$ — на участке $r < 0.1$ демонстрирует или антикорреляцию или корреляцию (рисунок 5.73) — в зависимости от положения слоя z, без наглядной динамики, если $r \gtrsim 0.2$, то корреляции практически равны 0. $R_{w'T'}$ — показывает устойчивую антикорреляцию в области $r < 0.2$, асимптотически приближаясь к нулевым значениям и осциллируя в диапазоне $[-0.02...0.08]$ (рисунок 5.74).

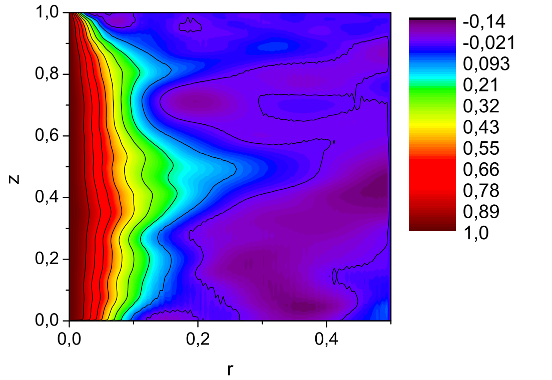
Поле корреляции продольной скорости в поперечном направлении $R^{Z}_{u'u'}$ (рисунок 5.75) демонстрируют самую развитую (сильную), однако, несимметричную корреляцию, с большим положительным участком при корреляции «снизу вверх».

Корреляции скорости $R^{Z}_{v'v'}$ (рисунок 5.76) в направлении периодичности без градиента давления представляются в виде узкой, резко спадающей полосы положительных значений корреляции, за которой следует «пятнистая» картина положительных и отрицательных корреляций, которые хаотически появляются и исчезают.

Как уже указывалось выше коэффициент корреляции между стенками на текущем шаге по времени может быть несимметричным, хотя в случае изотропной турбулентности это должно быть так, и $R^{Z}_{w'w'}$ (рисунок 5.77) в нижней полуплоскости переводится в поле в верхней полуплоскости двойным отражением относительно осей $r = 0.0$ и $z = 0.5$. Быстрее всего корреляция спадает в при-

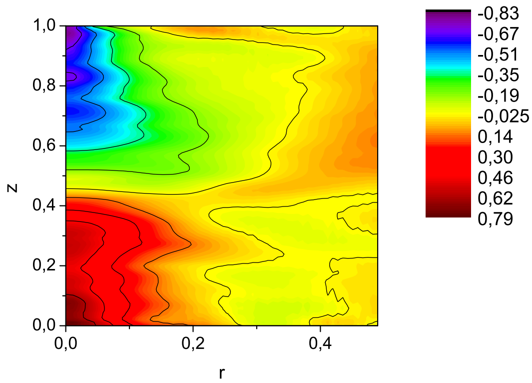


(а)

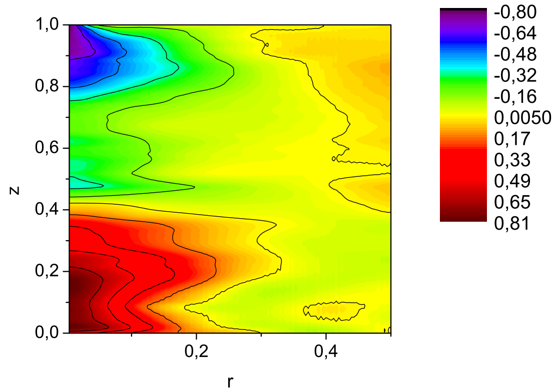


(б)

Рисунок 5.71: Коэффициент корреляции $R_{w'w'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

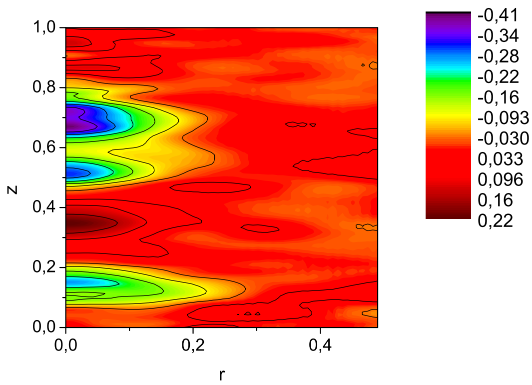


(а)

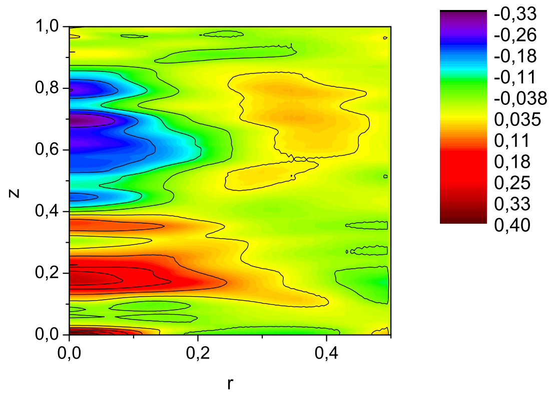


(б)

Рисунок 5.72: Коэффициент корреляции $R_{u'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

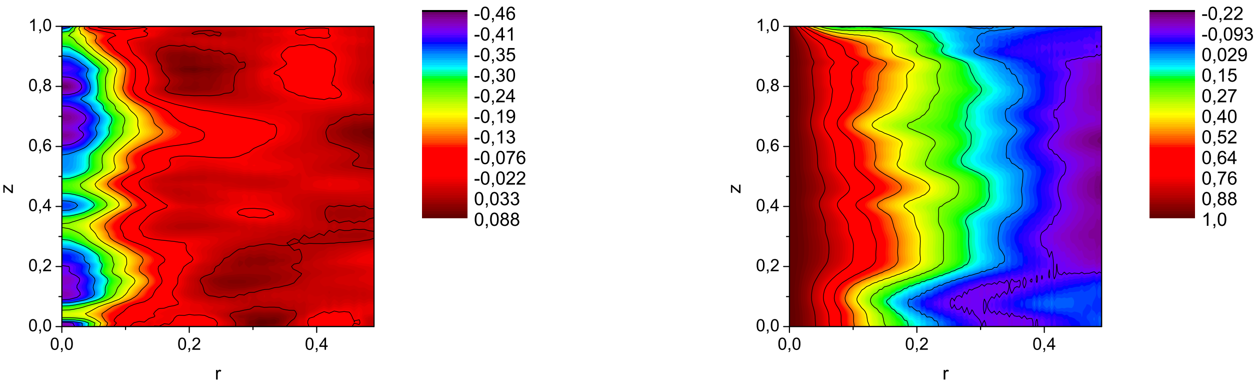


(а)



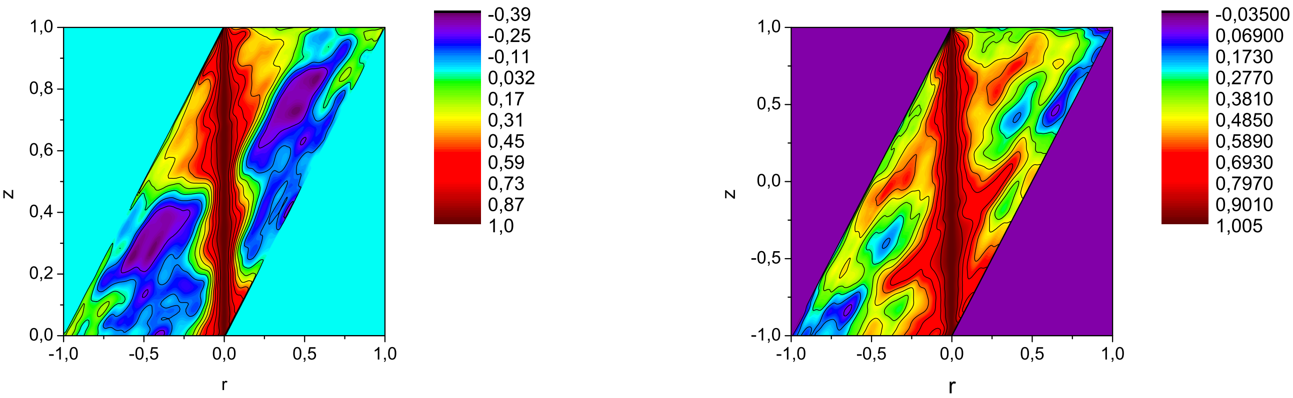
(б)

Рисунок 5.73: Коэффициент корреляции $R_{v'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



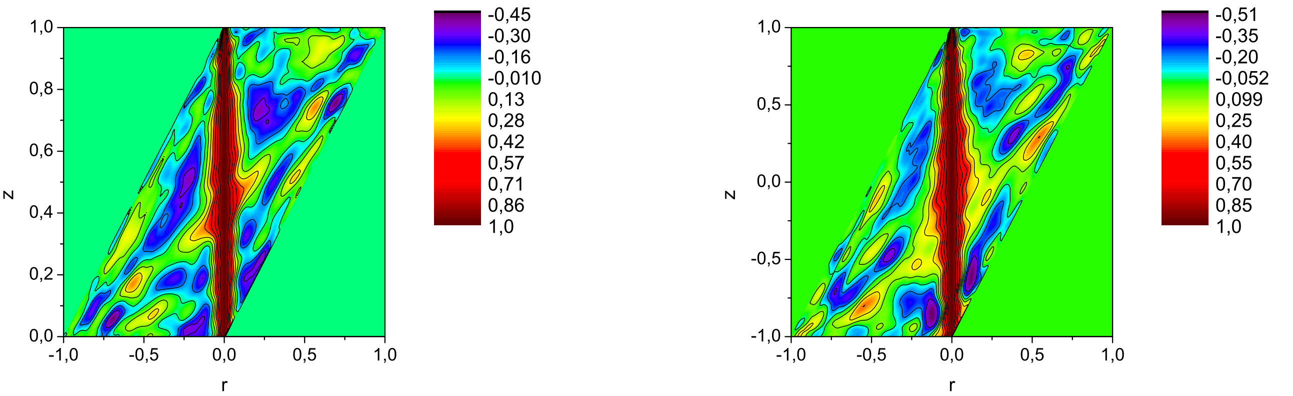
(а) (б)

Рисунок 5.74: Коэффициент корреляции $R_{w'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



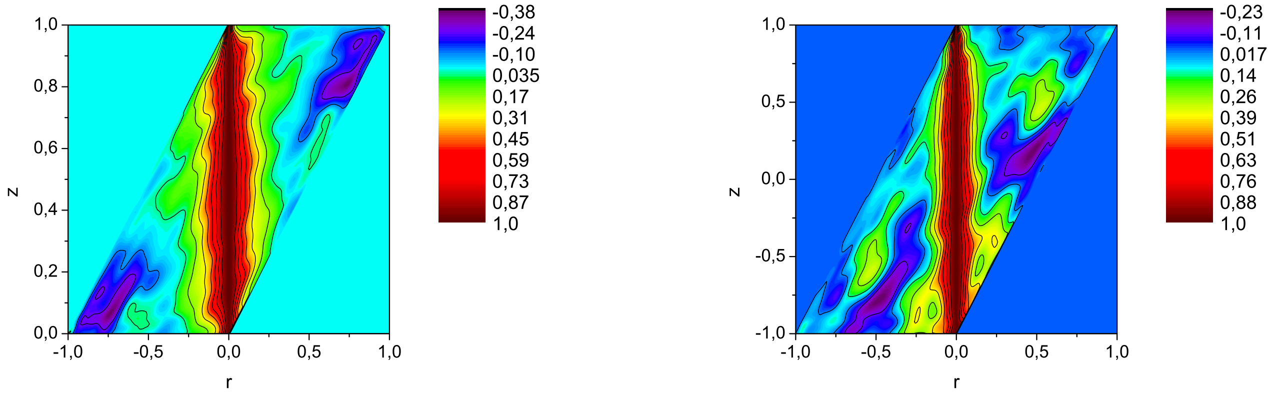
(а) (б)

Рисунок 5.75: Коэффициент корреляции $R^{Z}_{u'u'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



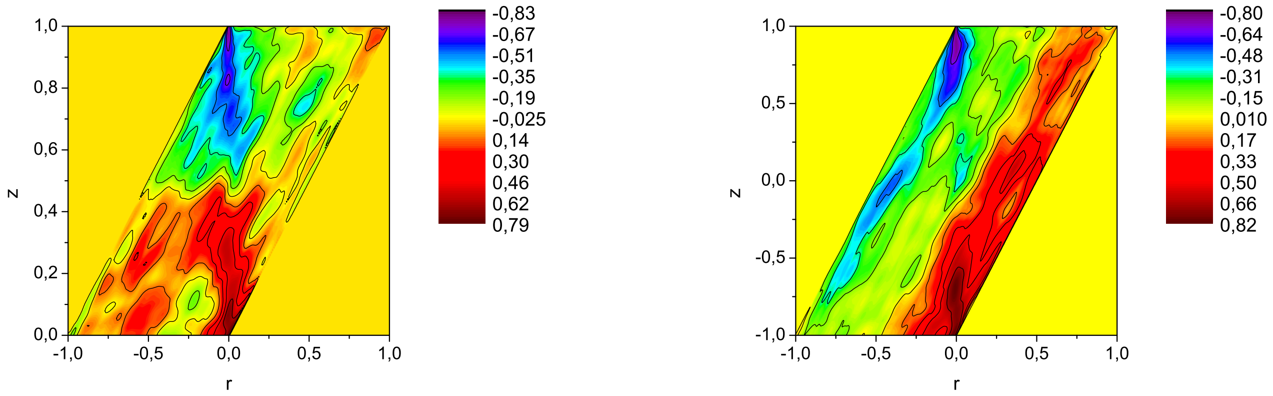
(а) (б)

Рисунок 5.76: Коэффициент корреляции $R^{Z}_{v'v'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



(а) (б)

Рисунок 5.77: Коэффициент корреляции $R^{\mathrm{Z}}_{w'w'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



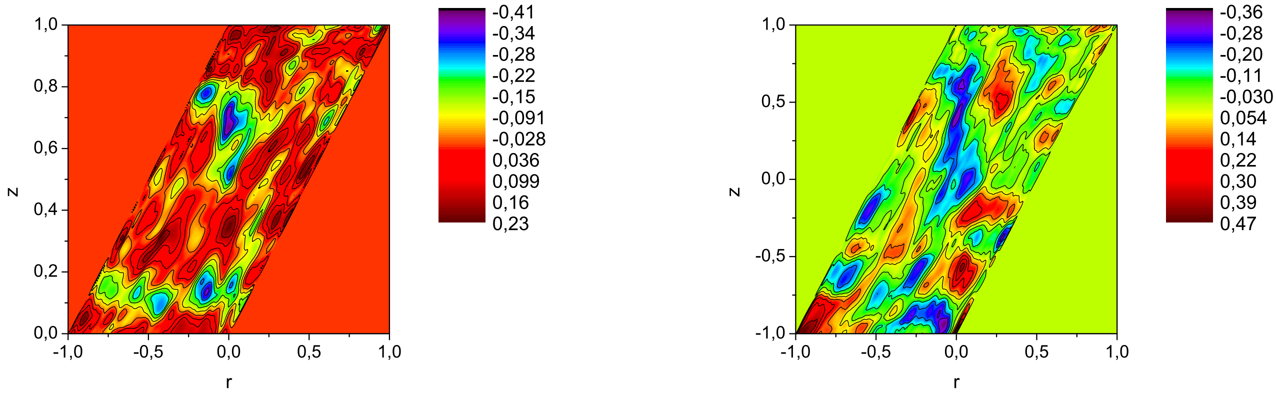
(а) (б)

Рисунок 5.78: Коэффициент корреляции $R^{\mathrm{Z}}_{u'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

стеночных областях, демонстрируя схожесть между корреляциями «сверху-вниз» и «снизу-вверх». Антикорреляции на больших расстояниях в левом нижнем и правом верхнем углах диаграммы (имеющие достаточно большие значения) носят только мгновенный характер, то есть эти области хаотически смещаются и, вероятно, в среднем дают 0, так как движения в поперечном к стенке направлении не должны иметь корреляционных зависимостей.

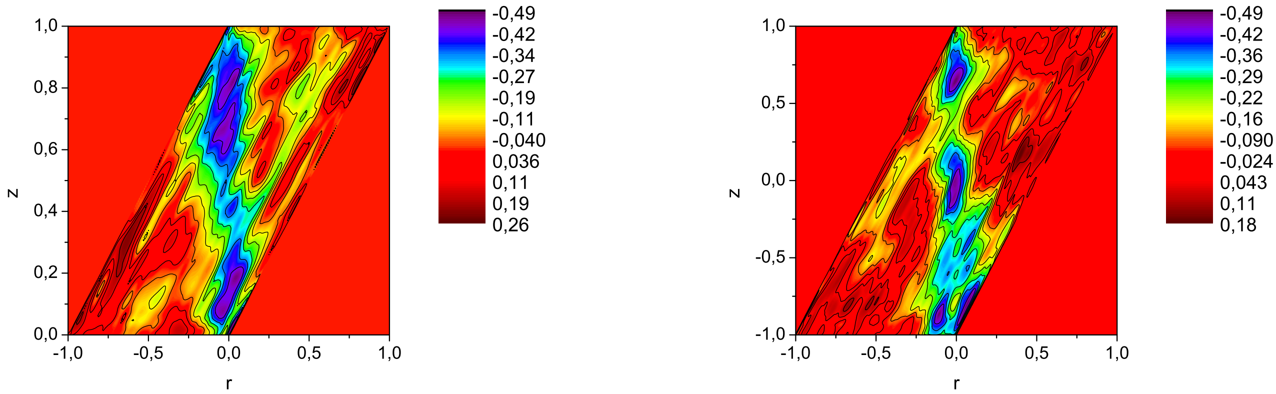
Наибольшие корреляции и антикорреляции наблюдаются для коэффициента $R^{\mathrm{Z}}_{u'T'}$ (рисунок 5.80): в верхней полуплоскости при $|r| \lesssim 0.4$ наблюдается антикорреляция с минимальным значением $R^{\mathrm{Z}}_{u'T'} \approx -0.8$, в нижней полуплоскости — положительные корреляции с максимумом $R^{\mathrm{Z}}_{u'T'} \sim 0.78$. Таким образом, если предположить, что превалирующими значениями являются $w' > 0$, то в верхней полуплоскости они приводят к отрицательным пульсациям T', то есть к понижению температуры, а в нижней полу плоскости — к повышению температуры.

Поле корреляций $R^{\mathrm{Z}}_{v'T'}$ — вообще не имеет выраженных участков знакопостоянного коэффициента корреляции (рисунок 5.79), — повсюду наблюдаются хаотические образования в диапазоне $-0.4...0.2$. Поле пульсаций $R^{\mathrm{Z}}_{w'T'}$ демонстрирует (рисунок 5.78) сильные отрицательные корреляции для $\forall z$ при $|r| \lesssim 0.1$ ($R^{\mathrm{Z}}_{w'T'} \sim -0.5... - 0.4$), которые затем сменяются хаотическим полем околонулевых или положительных корреляций.



(а) (б)

Рисунок 5.79: Коэффициент корреляции $R^{Z}_{v'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).



(а) (б)

Рисунок 5.80: Коэффициент корреляции $R^{Z}_{w'T'}$ на сетке 128^3 (а), а также на сетке 256^3 (б).

5.3.14 Структуры и масштабы в турбулентном течении

Как уже отмечалось выше, в гидромеханике существует не так много потоков, турбулентность в которых имеет один масштаб. Течение в канале лежит вне этой группы — в нем, помимо корреляционной длины Λ (5.104) и характерного времени t_0 (определяемого по начальной среднемассовой скорости U_0), уже обсуждавшихся выше, наблюдается более сложная иерархия:

1. основной масштаб, основанный на геометрии расчетной области L и среднемассовой скорости U_0 и среднего пролетного времени $t_0 = L/U_0$;
2. интегральный масштаб (или длина корреляции) Λ, $O(1)$, зачастую принимаемый как 0.2 ($0.2L$) В зависимости от представления, Λ можно рассчитать по формуле (5.104) или, например, так:

$$\Lambda = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(x,t)u'(x+r,t)dr}{\langle u'^2 \rangle}; \tag{5.105}$$

В случае спектрального подхода интегральный масштаб определяется [214] по формуле:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} \frac{E(0)}{\int\limits_{0}^{\infty} E(k)dk}. \tag{5.106}$$

Число Рейнольдса, взятое по интегральному масштабу:

$$\mathrm{Re}_\Lambda = \frac{|u'|\Lambda}{\nu}, \quad |u'| = \sqrt{e_{\mathrm{turb}}}.$$

3. тейлоровский микромасштаб λ_τ — определяет характерный размер вихрей инерционного интервала: $\lambda_\tau^2 = \frac{\langle |u'|^2\rangle}{\langle |S|^2\rangle}$, тогда $\mathrm{Re}_{\lambda_\tau} = \frac{|u'|\lambda_\tau}{\nu}$.
4. колмогоровский микромасштаб η, связанный соотношением

$$\mathrm{Re}_\eta = \frac{|u'|\eta}{\nu} \sim 1.$$

В случае возбуждения однородной изотропной турбулентности на некоторых участках течения в канале масштабы Λ, λ_τ, η связаны соотношениями 1.4 (см. Раздел 1.1.4 о теории однородной изотропной турбулентности).

Течению в канале присуще и несколько временных масштабов [200]: характерное время оборота вихрей, характерный вязкий масштаб турбулентного погранслоя, измеряемый в единицах стенки, который гораздо меньше масштаба основного течения t_0, проявляющегося в качестве медленных «релаксационных» процессов в набираемой статистике. В некоторых исследованиях наблюдается промежуточный масштаб, связанный с осцилляцией статистики.

Представление различных величин на основе вязких масштабов для координаты y^+, волнового числа k^+, и частоты ω^+ играет ключевую роль в теории турбулентного пограничного слоя:

$$\delta^+ = \frac{\nu}{\hat{U}_{\tau^*}}, \quad U^+ = \frac{U}{\hat{U}_{\tau^*}}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta^+}, \quad k^+ = \frac{2\pi}{\lambda_X^+} = k\delta^+, \quad \omega^+ = \frac{1}{t^+} = \frac{\omega\delta^+}{\hat{U}_{\tau^*}}, \tag{5.107}$$

где $\hat{U}_{\tau^*}$ — скорость трения (динамическая скорость), и иногда называется масштабированием Рейнольдса (Reynolds scaling) [239]. Скорость трения определяется по значению касательного напряжения на стенке τ^*:

$$\hat{U}_{\tau^*} = \frac{\tau^*}{\rho}. \tag{5.108}$$

Здесь и далее, все величины, отмеченные знаком «+», являются обезразмеренными на соответствующие вязкие масштабы течения или их комбинацию.

Стационарное состояние определяется по достижению линейного профиля среднего сдвигового напряжения $\tau = -\rho\langle u'v'\rangle_S + \mu\frac{\partial\langle U\rangle_S}{\partial y}$ [72] или по квазипериодическому поведению кривой энергии. В полностью равновесном течении профиль полного напряжения напоминает прямую линию.

Значения производной $\partial U/\partial z$ рассчитывались по следующему шаблону:

— правая производная (третий порядок точности) для нижней (холодной) стенки ($z = 0$):

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_0 = \left(-\frac{11}{6}[U]_0 + 3[U]_1 - \frac{3}{2}[U]_2 - \frac{1}{3}[U]_3\right)/\Delta z + O\left(\Delta z^3\right),$$

— левая производная (третий порядок точности) для (верхней) горячей стенки ($z = 1$):

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{nz} = \left(-\frac{1}{3}[U]_{nz-3} + \frac{3}{2}[U]_{nz-2} - 3[U]_{nz-1} + \frac{11}{6}[U]_{nz}\right)/\Delta z + O\left(\Delta z^3\right),$$

— градиент средней скорости в других ячейках расчетной области определяется со вторым порядком точности:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]_{n_i} = \left([U]_{n_{i+1}} - [U]_{n_{i+1}}\right)/(2\Delta z) + O\left(\Delta z^2\right).$$

Профиль полного сдвигового напряжения τ (рисунок 5.81a) при $t \approx 120$, обезразмеренный на свое значение на нижней стенке, в центре течения оказывается близок к линейному, хотя на него накладываются некоторые неоднородности. Наблюдается недостаточность сеточного разрешения в непосредственной близости от горячей стенки, несмотря на вычисление производной у стенок с повышенной точностью. Потеря симметричности профиля относительно центра канала может быть вызвана существованием теплового слоя, что отличает рассматриваемое течение от обычного профиля напряжения в установившемся турбулентном течении в канале [69]. Обращает на себя внимание и то, что форма τ существенно не меняется при измельчении сетки.

На рисунок 5.81б представлены зависимость от времени безразмерной скорости трения $U_{\tau^*} = \hat{U}_{\tau^*}/U_0$, определяющей вместе с кинематической вязкостью ν масштабы в турбулентном пограничном слое. Видно существенное различие меду параметрами на верхней и нижней стенках даже на очень больших временах эволюции, которые, вероятно, связаны с образованием пристеночных тепловых слоёв. В пристеночных тепловых слоях температура и вязкость отличаются от своих аналогов на внешней границе, таким образом, там должен наблюдаться разрыв производных профиля скорости.

Зависимость вязких масштабов от времени определяется по значениям полного напряжения на стенке

$$\tau^* = \left[-\rho\langle u'v'\rangle_S + \mu\frac{\partial\langle U\rangle_S}{\partial y}\right]_{\substack{z=0\\z=1}}.$$

Поведение безразмерной сдвиговой скорости представлено на рисунке 5.81б для серии расчетов 11 ($\mathrm{Re}_1 = 4704$). Кривые U_{τ^*} для нижней стенки (сплошные линии на рисунке 5.81б) растут ступенчатым образом на участке крупномасштабного смешения, а в окрестности $t \approx 50$ имеют форму, близкую к плато, затем при выравнивании температуры происходит медленное уменьшение до значений $U_{\tau^*} \approx 0.1$ (левая шкала на указанном рисунке). У верхней стенки безразмерная скорость трения испытывает единственный максимум в начале смешения, а потом при $t > 50$ наблюдается медленный спад до $U_{\tau^*} \approx 0.2$ (правая шкала на рисунке 5.81б), на который накладываются осцилляции. Таким образом, оказывается, что значения U_{τ^*} на границах отличаются в несколько раз.

Начиная с конца 80-х годов [214] по мере увеличения мощи численного моделирования, мелкомасштабные движения в турбулентных течениях со стенками стали объектом пристального внимания со стороны многих исследователей, и, в частности, пристеночная область [72]. В проводимых в то время расчётах течения практически всегда относились к среднему диапазону чисел Рейнольдса, таким образом, наибольшие и наименьшие масштабы были практически не разделимы, что затрудняло их самостоятельное исследование.

Обзор [214] посвящён структурам турбулентного течения в закрытых каналах, размеры которых приблизительно равны или превосходят по порядку величины ширину (высоту) канала или толщину пограничного слоя. Этот вопрос является достаточно важным, так как связан с выбором достаточного размера расчетной области L_X, а также позволяет выяснить степень влияния больших масштабов на энергетику течения — длины волн, соответствующие крупномасштабным образованиям, подразумевают, соответственно, и продолжительное время существования, и большой объём вещества, заключенный в этих структурах. Установлено, что в области течения, ассоциируемой с логарифмическим профилем скорости, существуют очень длинные структуры, вытянутые вдоль направления основного течения с соотношением размеров порядка 10, которые в основном определяются продольной компонентой скорости, и содержат основную долю кинетической энергии, связанной с движением в продольном направлении. Длинные продольные структуры лучше всего описываются как система продольных струй и напоминают низко- и высокоскоростные турбулентные прожилки (streaks) в пристеночном слое.

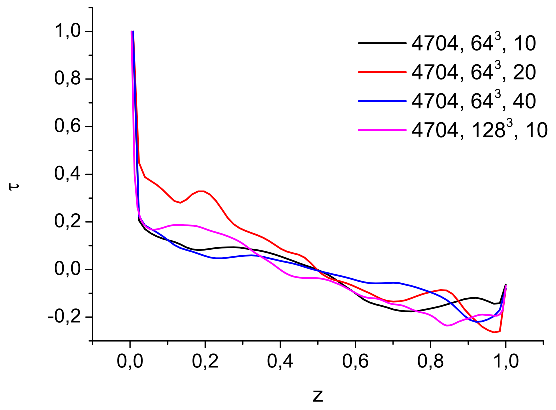
Существенную роль таких струек в энергетических характеристиках течения можно пояснить следующим образом [214]: если одномерный спектр мощности измеряемого сигнала (пульсаций продольной скорости, например) стремится к постоянному значению E_0 при $k \to 0$, то мощность, заключенная в диапазоне длин волн больших, чем λ_X составляет $O(E_0/\lambda_\mathrm{X})$, но, так как время жизни каждой структуры пропорционально λ_X, то полная энергия на структуру оказывается независящей от длины волны. Таким образом, даже малое возмущение поперечной скорости, действующее продолжительное время, приведет к существенному изменению поля скорости.

Разделение по масштабам можно произвести и в турбулентном пограничном слое, выделив мелкие масштабы (Small-Scale Motions), а также крупные (Large-Scale Motions) и очень крупные движения (масштабы — Very Large-Scale Motions), с пограничным волновым числом $\lambda_X^+ = 7000$ [240]. Исследователями были обнаружены [241] движения с длинами волн $2-3\delta$, где δ — полувысота канала, радиус трубы или толщина пограничного слоя. Исследование [242] показало, что существуют длинные извилистые (типа меандров) структуры в логарифмической области пограничного слоя, превышающие 20δ. Как позднее показали [243] и [244], — эти явления встречаются в трубах и прямоугольных каналах и могут достигать 25δ в длину.

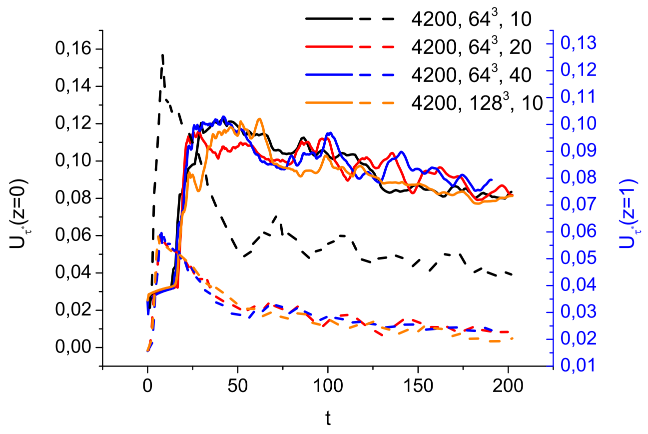
Известно [69], что наибольшая доля энергии турбулентности мелкомасштабных структур соответствует длинам волн $\lambda_X^+ \approx 1000$. И, если вычислительная область меньше, чем ${\lambda_X}^+ \approx 1000$, влияние периодичности вдоль основного течения оказывается достаточно существенным. Авторы [200] показали, что турбулентность не может поддерживаться в расчётных областях с протяженностью в продольном направлении, меньшей, чем $\lambda_X^+ \approx 360$, тогда как результаты [245] говорят о том, что имеет место распад турбулентности, если продольная когерентность (streamwise coherence) «прожилок» скорости (velocity streaks) в пристеночной области подвергается возмущениям в диапазоне волн ниже $\lambda_X^+ \approx 400$. Легко видеть, что вязкий масштаб δ^+, вместе с продольным размером расчетной области $L_X = L$, в качестве отношения определяют эволюцию турбулентного течения. Так как размеры расчетной области во всех направлениях одинаковы, то по графикам на рисунке 5.81в можно судить о качестве сеточного разрешения пограничных слоев, а также о количестве длин волн, которое укладывается на линейном размере расчетной области. Можно рассматривать как отношение δ^+/L, так и $L^+ = L/\delta^+$. На рисунке 5.81в наблюдается два семейства кривых для горячей и холодной стенок; для холодной стенки вязкий масштаб оказывается достаточно большим, — как правило, на размере расчетной области их укладывается $L^+ \sim 100$–150, совершенно другая ситуация складывается у горячей стенки, где очень малая вязкость приводит к очень малому вязкому масштабу, — здесь на размере расчетной области может укладываться около 1000–1200 характерных длин. Очевидно, что при таких условиях любая из использовавшихся сеток не может дать достаточного сеточного разрешения пограничного слоя. Вместе с тем, малый вязкий масштаб у горячей стенки позволяет выполнить (соблюсти) условие поддержания турбулентности для максимально возможных длин волн в расчетной области $\lambda_X^+ \gtrsim 400$, которое не выполняется для холодной стенки. Как результат, поддержание течения с большой интенсивностью турбулентности в верхней полуплоскости может быть следствием именно малого δ^+, а не малой вязкости потока.

Таким образом, для того, чтобы в канале поддерживалась турбулентность вдоль направления основного течения, на нем должно укладываться достаточное количество вязких масштабов. Таким образом, целесообразно использовать итерационную процедуру для определения минимального размера расчетной области, связанную с расчётом на грубой сетке, определением вязкого масштаба δ^+ и разрешаемого диапазона продольных длин волн λ_X^+.

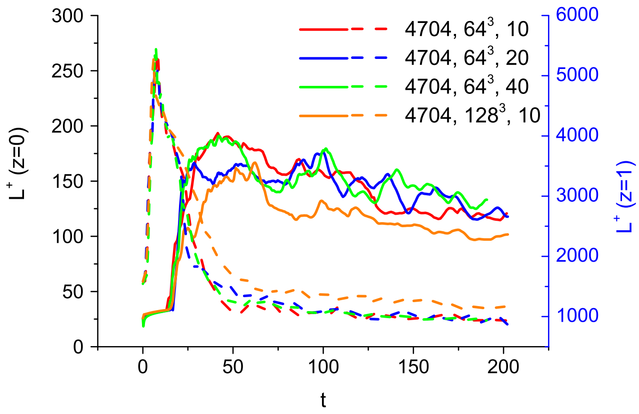
В заключение обсудим разрешение вязких масштабов течения (Re $= 4704$, 256^3) на длительных временах эволюции жидкости ($t \approx 120$), рассматривая профили скорости U^+, усреднённые с помощью пространственного фильтра (см. Раздел 5.3.9 и рисунок 5.81г). Нетрудно подобрать логарифмическую аппроксимацию для некоторого участка этого профиля у горячей или холодной стенки. Однако стоит обратить внимание, что логарифмический закон в основном выполняется на расстояниях $30 \lesssim z^+ \lesssim 130$, тогда можно оценить качество его разрешения на 256 ячейках поперек канала. В этом случае при значении вязкого масштаба у горячей стенки $\delta^+/L = 7.69 \times 10^{-4}$ и пространственного шага $\Delta z = L/n_Z$ оказывается, что на величине пограничного слоя $\Delta y^+ \approx 100$ укладывается 20 ячеек. Для нижней стенки вязкий масштаб составляет $z^+/L = 0.013$, число ячеек $100z^+/\Delta z$, приходящихся на пограничный слой превосходит число ячеек расчетной сетки, в этом



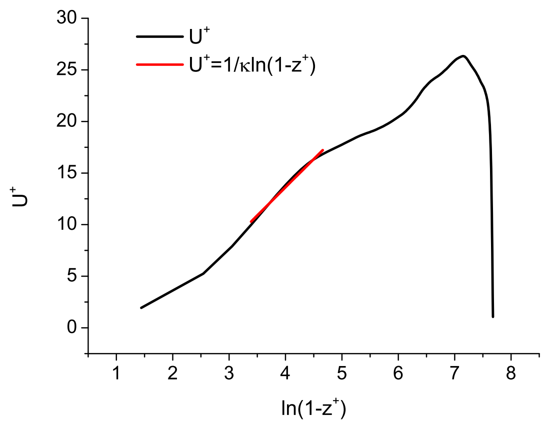
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 5.81: (а) — средний профиль полного напряжения τ в момент времени $t \approx 120$, нормированный на значение τ^* у нижней стенки; (б) — зависимость безразмерной сдвиговой скорости от времени U_{τ^*} (нижняя стенка — сплошные кривые, левая шкала; верхняя стенка — штрихованные кривые, правая шкала); (в) — размер расчетной области, нормированный на вязкий масштаб (сплошные кривые в диапазоне левой шкалы — на единицы холодной стенки, пунктирные кривые в диапазоне правой шкалы — на единицы горячей стенки); (г) — средний профиль скорости U при $t \approx 120$, нормированный на вязкий масштаб, начало системы координат соответствует горячей стенке, красная линия соответствует участку логарифмического погранслоя.

случае оказывается, что толщина логарифмического погранслоя превосходит толщину канала. Объяснения этому стоит искать в существовании завихренных тепловых слоев, в которых вязкость жидкости будет существенно отличаться от значений в глубине канала, что в среднем должно создавать большие значения $\partial\mu/\partial z$ и оказывать влияние на наклон профиля скорости. Однако этого не наблюдается на его пространственно-среднем профиле. В верхней пристеночной области толщина теплового слоя в среднем составляет около $0.03L$, таким образом, на сетке 256^3 на него приходится около 8 ячеек, в то время как логарифмический слой начинается с $30\delta^+/\Delta z \approx 6$ ячейки. Соответственно, часть логарифмического профиля должна лежать в тепловом слое. На рисунке 5.81г представлен безразмерный профиль скорости основного течения $U^+ = f(\ln(z^+))$. Легко видеть, что на отрезке $\ln(z^+) \approx 3.4$–4.7 профиль может быть аппроксимирован линейной функцией $U^+ = 1/\kappa \ln(z^+) + C$, к сожалению, значения константы Кармана κ и C отличается от своих признанных значений $\kappa = 0.41$, $C = 5$, результаты линейной аппроксимации — $\kappa = 0.45 \pm 7.4 \times 10^{-3}$, $C = 1.197 \pm 0.38$. Причинами этого могут быть зависимость вязкости от температуры и недостаточное сеточное разрешение.

5.3.15 Заключение

Результаты численного моделирования напорного течения термовязкой жидкости в плоском слое, представляющем кубическую область, периодически продолженную в двух направлениях, а в третьем, — ограниченную стенками с различной температурой, показывают существование принципиально отличающихся режимов течения. Первый из них реализуется при относительно небольших среднемассовых числах Рейнольдса Re_1 и связан с перестройкой неустойчивого ламинарного профиля под воздействием трёхмерных возмущений в профиль без точки перегиба, отличающийся более высокими расходными характеристиками. Во втором случае происходит турбулизация течения с ускоренной диссипацией, приводящей к кратному уменьшению кинетической энергии и активной генерации завихренности.

Уравнение для ТКЭ обсуждается во многих курсах турбулентности [2; 205; 213], однако, оно рассматривается исключительно с теоретических позиций. В настоящей работе предпринята попытка оценить роль различных членов этого уравнения на основе применения комбинированного пространственно-временного усреднения. К сожалению, несмотря на подробность полученных диаграмм, отсутствие данных других исследований существенно затрудняет анализ влияния процессов производства, диффузии и диссипации турбулентности. Исходя из поведения усредняемых величин на большинстве диаграмм можно выделить три области. В первой из них основную роль играют мелкомасштабные возмущения, определяющие время начала и скорость смешения. Во второй области имеет место крупномасштабное смешение, приводящее к росту членов уравнения для ТКЭ на несколько порядков, а также формированию зоны сильной турбулентности в верхней полуплоскости. Третий участок, который является наиболее длительным ($t \gtrsim 40$) и простирается до момента окончания расчёта, характеризуется сохранением сильной турбулентности в верхней полуплоскости $z \gtrsim 3/4$, а также резким падением амплитуд членов уравнения ТКЭ. Следует отметить существенное влияние анизотропности турбулентности (сохранение сильных пульсаций в направлении основного течения) на интенсивность турбулентности, а также характеристики турбулентного теплопереноса, где основную роль в среднем играет не теплоперенос между стенками $\mathcal{Q}_x^T$, а теплоперенос пульсациями u', так, что $(\mathcal{Q}_\mathrm{X}^T \propto u') \gg (\mathcal{Q}_\mathrm{Z}^T \propto w')$. Программная реализация расчёта компонентов уравнения для ТКЭ, требующая, в общем случае дополнительной обработки ещё нескольких десятков массивов, позволяет поставить вопрос о целесообразности использования данного подхода при анализе турбулентных течений.

В заключение необходимо сделать несколько замечаний относительно проведённого моделирования. В самом общем случае для успешного моделирования завихренных (турбулентных) течений необходимо подобрать численный метод, сочетающий экономичность расчёта с хорошими дисперсионными и диссипативными свойствами, сгенерировать шум с требуемыми свойствами, провести расчёт на максимально подробных сетках, обеспечивающих (по возможности) разрешение плоть до самых мелких масштабов, а затем применить набор цифровых фильтров для теоретического анализа течения. Термин «цифровой фильтр» понимается в обобщённом смысле и включает в себя расчёт интегральных характеристик, статистическое усреднение, выполнение спектрального разложения (преобразования Фурье). В свете этого следует явным образом указать на некоторые методологические отклонения от этой последовательности, допущенные в настоящей работе:

1. Наложение специфических условий с сохранением градиента давления приводит к существенному занижению числа Куранта, необходимого для осуществления расчёта. Повышение CFL приводит к тому, что выражение под логарифмом в инвариантах Римана становится отрицательным. Указанный недостаток следует относить на счёт текущей реализации.

2. Используемый численный метод является явным, поэтому трудоёмкость расчёта на мелких сетках растет как N^4, где N — число точек расчетной сетки по одному направлению, что существенно удлиняет расчёт даже при использовании суперкомпьютеров.
3. Использование шума различной интенсивности для одного и того же Re_1 на различных сетках несомненно вредит математической строгости, однако, это позволяет определиться характером течения в более широком диапазоне параметров, что должно влиять на течение только до перехода к турбулентности, так как трёхмерная турбулентность должна иметь достаточно короткую историю и «забывать» о свойствах возмущений весьма скоро. Кроме того, нет однозначного ответа на вопрос, является ли интенсивность возмущения и его длина корреляции достаточными параметрами, однозначно определяющим эволюцию течения на всех участках (особенно на этапе перехода к турбулентности) или для смены режима течения достаточно локальной амплитуды возмущения. В случае генерации случайного шума на мелкой сетке и последующих выборок из него для более грубых сеток мы также будем иметь дело с отличающимися наборами данных, в одних из которых будут существовать точки с амплитудой, превышающей некоторый критический уровень, необходимый для перестройки потока, а в других — нет. В настоящей работе характеристики шума определялись на основе характерной длины корреляции, а также интенсивности шума по направлениям X и Y, однако, остался в стороне вопрос о других статистических свойствах фильтрованного распределения пульсаций скорости, в частности, средние значения интенсивности, полученные по ансамблю реализаций, а также их дисперсия.
4. Множественность настроечных параметров для корреляционного фильтра затрудняет сравнительный анализ переходных режимов, в том числе на этапе крупномасштабного смешения.
5. Достаточно долгий процесс установления течения, вероятно, обусловлен использованием приближения слабой сжимаемости.

Заключение

Проведённое исследование можно представить в виде совокупности начально-краевых задач для системы уравнений Навье–Стокса, а также задач на нахождение собственных значений уравнения Орра–Зоммерфельда.

1. Отправной точкой исследования явилась задача о форме профиля скорости термовязкой жидкости в установившемся течении в канале, которая в случае экспоненциальной зависимости динамической вязкости от температуры, приводит в выводу *о существовании точки перегиба при определённом значении безразмерного параметра* $\alpha = \beta\Delta T/T_0$. *В случае установившегося распределения температуры профиль скорости*
$$u(y) = -\frac{Ce^{-\alpha y}}{\alpha(-1+e^{\alpha})}(1 - e^{\alpha y} - y + ye^{\alpha}) \tag{5.109}$$
представляет собой универсальную зависимость от α. Следует обратить внимание, что асимметричность $u(y)$ в ТВЖ была установлена другими исследователями, однако, факт существования точки перегиба ими не обсуждался. Таким образом, для данного профиля выполняется необходимое условие неустойчивости для идеальной жидкости. Несмотря на то, что ТВЖ к этому классу не относится, полезным оказывается рассмотрение задачи о линейной устойчивости профиля (5.109) относительно возмущений бесконечно малой амплитуды при различных значениях α.
2. С этой целью было *проведено обобщение уравнения Орра–Зоммерфельда на класс ТВЖ с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры*. Полученное уравнение содержит дополнительные члены, отражающие вклад резкой температурной зависимости динамической вязкости жидкости в характеристики устойчивости течения. Для решения данного уравнения был реализован метод колокации с применением базиса полиномов Чебышева. Проверка численной процедуры проводилась на задаче устойчивости плоского течения Пуазейля, *полученные результаты (спектральные портреты A-, S-, P-ветвей собственных значений фазовой скорости, критическое число Рейнольдса) находятся в согласии с результатами классической работы Орзага* [136]. *Применение данного подхода к профилю ТВЖ в диапазоне* $\alpha = -6\ldots-1.65$ *показало, что при увеличении* $|\alpha|$ *происходит уменьшение критического числа Рейнольдса и расширение области неустойчивости в сторону коротковолновых возмущений*. Завершая описание результатов начального этапа исследований стоит упомянуть *результаты решения параболизованной задачи установления с линейным распределением температуры, показавшие, что длина установления профиля ТВЖ* x *есть резкая функция параметра* α — $x = A(\alpha)\,(Re^*)^{-\alpha}$.

   В дальнейшем совокупность полученных результатов можно разделить на две группы. Первая относится к изучению возможностей численной схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости, на основе моделирования нескольких хорошо известных задач гидродинамики. Вторая группа связана с решением новых задач о течении ТВЖ в двумерной и трёхмерной постановках.
3. В соответствующих главах детально *обсуждались автомодельные свойства процесса установления течения вязкой жидкости в канале. Отношение* U/U_{axial}, *где* U_{axial} — *аналитическое значение осевой скорости, оказывается независящим от перепада давления* Δp, *скорости звука* c, *что связано с особенностями распространения волн давления в продольном направлении расчётной области, была показана достаточно медленная сходимость течения к своим стационарным значениям на заключительном этапе.*

4. Предложена модификация численного метода, касающаяся обработки вариантов значений третьего (и последующих) характеристических чисел, управляющих направлением переноса локальных инвариантов ($\lambda_{3,4} < 0$, $\lambda_{3,4} = 0$, $\lambda_{3,4} > 0$).
5. Сформулированы периодические граничные условия, сохраняющие перепад давления в расчетной области в направлении периодичности.

   Анализ схемы проводится на основе изучения свойств неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и порождаемой ею двумерной турбулентности.
6. *Установлено согласие поведения скоростей диссипации, каскадов кинетической энергии и энстрофии с результатами классической теории двумерной изотропной турбулентности. На основе картин завихренности выделено явление «недоразрешенности слоёв», проявляющейся в возникновении лишнего («паразитного») вихря при свертывании двух вихревых листов (слоев вихревой пелены).* Данное явление существует только на грубых сетках (128^2), однако, полностью симметричная картина эволюции завихренности начинает наблюдаться только при переходе к сетке 1024^2 ячеек.
7. Обсуждение диссипативных характеристик показало, что *в двумерной реализации диссипативные свойства схемы оказываются настолько малыми, что их не удаётся выделить в явном виде при рассмотрении графиков скорости диссипации кинетической энергии, вычисляемой непосредственно, а также на основе теоретических соотношений для моделей несжимаемой жидкости (по кривым энстрофии) и сжимаемого газа (по влиянию тензора скоростей деформации и эффектов дилатации).*
8. *Исследование зависимости инкремента неустойчивости от безразмерного волнового числа показывает хорошее согласие с данными других исследователей, вместе с тем, часто используемый способ расчёта инкремента неустойчивости не всегда оказывается достаточно точным, вследствие чего была предложена его модификация.*

   Таким образом, реализованная схема, отличаясь малой диссипативностью и хорошим вихреразрешением, оказывается вполне конкурентоспособной в сравнении с методами высокого порядка точности.

   В последствии трёхмерная реализация схемы КАБАРЕ была применена для решения задачи Тейлора–Грина о распаде вихря и эволюции турбулентности. На примере этой классической задачи
9. показано, что схема КАБАРЕ, отличающаяся значительной универсальностью, не уступает другим подходам, *как в части воспроизводства вихревых структур при ламинарном и турбулентном распаде, так и интегральных параметров. Поведение последних указывает на то, что механизм численной диссипации оказывается более существенным по сравнению со своим гидродинамическим аналогом. На основе поведения корреляционной функции установлена общая антикорреляционная зависимость между областями сильной завихренности и давления. Кроме того, с точки зрения спектрального подхода показано, что вихрь Тейлора–Грина не согласуется с моделью изотропной турбулентности в силу особенностей исходной постановки задачи.*

   Последняя глава посвящена решению новых задач, связанных со специфическими свойствами ТВЖ, проявляющихся в неоднородных температурных полях. При изучении эволюции течения под воздействием гармонических возмущений малой, но конечной амплитуды установлено, что:
10. *картина смешения в окрестности точки перегиба зависит от частоты возмущений, распространяющихся со стороны входной границы; для любого набора исходных параметров существует частота, соответствующая максимальной скорости смешения. Такая частота называется (около)резонансной.* В процессе её поиска, по мере приближения к искомому значению происходит увеличение глубины проникновения возмущений, при этом происходит генерация волны, соответствующая одной из собственных частот расчётной об-

ласти. *По результатам серии запусков установлено, что резонансная частота является линейной функцией перепада давления* Δp.

11. Показано, *что наибольшая толщина вовлечения или крупномасштабного смешения при различных амплитудах возмущений приходится на окрестность точки перегиба профиля скорости.*
12. Установлено, что *при повышении амплитуды возмущения происходит переход от режима конвективной неустойчивости к режиму абсолютной неустойчивости.*
13. На *основе применения метода Окубо–Вейса можно выделить четыре характерные области течения*: пристеночный слой, в котором должна преобладать филаментация и активная эволюция мелких вихрей; средний слой (ядро потока), где выживают когерентные структуры, имеющие характерную пилообразную форму; зона окрестности точки перегиба, где наблюдаются крупномасштабные «клубы» и превалирует растяжение вовлеченных слоёв жидкости с различной температурой; узкий участок ниже точки перегиба, где могут существовать когерентные структуры.

    Последний участок может также соответствовать зоне начала возвратного движения жидкости.

    Задача о слоистом течении ТВЖ, несмотря на двумерность постановки, оказалась весьма не плохим представлением экспериментов Кэмбэлла (Campbell) и Тёрнера (Turner) [112] — так,
14. удалось подтвердить основные феноменологические результаты их работы, в частности, существование универсального безразмерного комплекса $k_t = \mathrm{Re}/R_\nu$, Re — число Рейнольдса, R_ν — отношение вязкостей между слоями ТВЖ (затопленной струи и окружающей жидкости). Действительно, если k_t превышает некоторое критическое значение, то процесс смешения полностью подавляется, в противном случае он зависит от R_ν.
15. Построены зависимости действительной части инкремента неустойчивости γ от Re при различных R_ν; *установлено, что рассматриваемое течение может быть описано в терминах теории свободного пограничного слоя с соответствующей асимптотической зависимостью толщины потери импульса*

$$\delta_\theta = \sqrt{\left(\frac{C_1 + R_\nu}{1 + R_\nu}\right)^2 \frac{t}{R_\nu} + 1},$$

    то есть $\delta_\theta \propto \sqrt{t}$ и $\delta_\theta \propto 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$; *прослежена аналогия данной задачи с первой задачей Стокса; описаны основные сценарии смешения слоёв ТВЖ, возникающие в пространстве параметров* (R_ν, Re).

    В последнем разделе рассмотрена задача о течении ТВЖ в бесконечном плоском слое, в одном из направлений которого поддерживается постоянный градиент давления.
16. Описание течения в терминах завихренности подтверждает существование двух режимов течения. На основе уровней локальной энстрофии и Q-критерия описана структура течения в горячем пристенке, развитие шпилькообразных вихрей, появвление чрезвычайно длинных вихревых образований («червяков») на дальних стадиях эволюции течения, а также «вымирание» вихрей вследствие диффузии завихренности.
17. Отдельно проведен анализ пульсационных компонент, выполненный на основе комбинированного пространственно-временного усреднения, показывающего существование сильной турбулентности в верхней половине течения в канале. Поведение Z–t-диаграмм показывает общий процесс возмущений (пульсаций) из пристеночной области в ядро потока, приводящий к поддержанию интенсивности турбулентности в диапазоне $\langle \overline{I} \rangle \sim 0.0184$–$0.236$ практически до конца расчёта.
18. На основе анализа слагаемых уравнения для ТКЭ установлено, что область их максимальных значений приходится на участок крупномасштабного смешения $t \approx 20$–45.

Z–t-диаграммы различных компонент турбулентного теплового потока показывают превалирующую роль турбулентных пульсаций в направлении основного течения. Приведены оценки интегральных масштабов на основе корреляционных функций. Оценки вязких масштабов показывают корректность постановки задачи с точки зрения моделирования крупномасштабных структур с $\lambda_x^+ \approx 1000$.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Сону Э.Е. — за постановку научной проблемы, советы и поддержку, которые оказали решающее влияние на развитие данного исследования, профессору Василяку Л.М., к.ф.-м.н. Печеркину В.Я., к.ф.-м.н. Ветчинину С.П. — за ценные советы при подготовке диссертации, д.т.н Тюфтяеву А.С. и к.ф-м.н. Гаджиеву М.Х. — за помощь в организационных вопросах, к.ф.-м.н Терешонку Д.В. — за обсуждение вопросов устойчивости, к.ф.-м.н. Савельеву А.С. — за обсуждение свойств турбулентных течений, своим коллегам, согласившимся стать первыми читателями различных глав данной работы — к.ф.-м.н. Долуденко А.Н., к.ф.-м.н. Панову В.А., к.ф.-м.н. Куроедову А.А., к.ф.-м.н Сидоренко Д.А., к.ф.-м.н Мисуне Н.Г., а также авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

1. *Drazin P. G.*, *Reid W. H.* Hydrodynamic Stability: — 2-е изд. — Cambridge : Cambridge University Press, 07.2004. — URL: https://www.cambridge.org/core/books/hydrodynamic-stability/A0E78BC88D5572AED79CCCE8B977707C.
2. *Davidson P. A.* Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers. — OUP Oxford, 2004. — С. 678. — URL: https://books.google.nl/books?id=rkOmKzujZB4C.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — С. 840.
4. *McDonough J. M.* Introductory Lectures on Turbulence. — CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. — 180 с.
5. *Schmitt F. G.* About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity // Comptes Rendus Mécanique. — 2007. — Сент. — Т. 335, № 9/10. — С. 617—627.
6. *Prandtl L.* Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Zeitschrift fur angew. Math. u. Mechanik. — 1925. — Т. 5, № 2. — С. 136—139. — URL: https://ci.nii.ac.jp/naid/10010165361/en/.
7. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30. — С. 209—303.
8. *Колмогоров А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. — 1941. — С. 19—21.
9. *Von Karman T.* Mechanical similitude and turbulence : NACA Technical memorandum / NACA. — 1931. — NACA-TM—611.
10. *Adrian R. J.* Hairpin vortex organization in wall turbulence // Physics of Fluids. — 2007. — Апр. — Т. 19, № 4. — С. 041301.
11. *Eitel-Amor G.*, *Flores O.*, *Schlatter P.* Hairpin vortices in turbulent boundary layers // Journal of Physics: Conference Series. — 2014. — Апр. — Т. 506. — С. 012008.
12. *Awrejcewicz J.*, *Krysko V. A.* Scenarios of Transition from Harmonic to Chaotic Motion // Understanding Complex Systems. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — С. 225—233.
13. *Гершуни Г. З.*, *Жуховицкий Е. М.* Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. — 1972.
14. Supersonic plasmatron nozzle profiling with the real properties of high temperature working gas / M. K. Gadzhiev [и др.] // High Temperature. — 2015. — Нояб. — Т. 54, № 1. — С. 38—45.
15. *Nagata K.*, *Komori S.* The difference in turbulent diffusion between active and passive scalars in stable thermal stratification // Journal of Fluid Mechanics. — 2001. — Март. — Т. 430. — С. 361—380.
16. *Урманчеев С. Ф.* Гидродинамические эффекты в аномально термовязких и пористых средах : дис. ... канд. / Урманчеев С. Ф. — Башкирский государственный университет Институт механики уфимского научного центра РАН, 2004.
17. *Медведицков А.* Вязкость жидкой серы и бинарной системы сера-йод в дипазоне температур 350...1000 K : дис. ... канд. / Медведицков А.Н. — ИВТАН СССР, 1984.
18. *Э.С. Персиков.* Вязкость магматических расплавов : дис. ... канд. / Э.С. Персиков. — Институт экспериментальной минералогии АН СССР, Черноголовка, 1984.
19. *Moresi L.-N.*, *Solomatov V. S.* Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations // Physics of Fluids. — 1995. — Сент. — Т. 7, № 9. — С. 2154—2162.
20. *Chhabra S.*, *Shipman T. N.*, *Prasad A. K.* The entrainment behavior of a turbulent axisymmetric jet in a viscous host fluid // Experiments in Fluids. — 2004. — Нояб. — Т. 38, № 1. — С. 70—79.
21. *Gréa B.-J.*, *Griffond J.*, *Burlot A.* The effects of variable viscosity on the decay of homogeneous isotropic turbulence // Physics of Fluids. — 2014. — Март. — Т. 26, № 3. — С. 035104.
22. *Yih C.-S.* Instability due to viscosity stratification // Journal of Fluid Mechanics. — 1967. — Февр. — Т. 27, № 02. — С. 337.

23. *Potter M. C.*, *Graber E.* Stability of Plane Poiseuille Flow with Heat Transfer // Physics of Fluids. — 1972. — Т. 15, № 3. — С. 387.
24. *Schäfer P.*, *Herwig H.* Stability of plane Poiseuille flow with temperature dependent viscosity // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1993. — Янв. — Т. 36, № 9. — С. 2441—2448.
25. *Wall D. P.*, *Wilson S. K.* The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Сент. — Т. 323, № -1. — С. 107.
26. *Низамова А. Д.*, *Киреев В. Н.*, *Урманчеев С. Ф.* Некоторые точные решения стационарной системы уравнений для стратифицированного течения двух термовязких жидкостей // Вестник УГАТУ. — 2016. — Т. 20, вып. 72, № 2. — С. 91—95.
27. *Головизнин В. М.*, *Карабасов С. А.*, *Кобринский И. М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными‘ // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 29—48.
28. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. Головизнин [и др.]. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — С. 472. — (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
29. Analysis of Turbulence Models Applied to CFD Drag Simulations of a Small Hatchback Vehicle / F. F. Buscariolo [и др.] // SAE Technical Paper Series. — SAE International, 10.2016.
30. Numerical Study on Aerodynamic Drag Reduction of Racing Cars / S. M. R. Hassan [и др.] // Procedia Engineering. — 2014. — Т. 90. — С. 308—313.
31. Drag reduction via turbulent boundary layer flow control / A. Abbas [и др.] // Science China Technological Sciences. — 2017. — Июль. — Т. 60, № 9. — С. 1281—1290.
32. *Bushnell D. M.* Aircraft drag reduction—a review // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. — 2003. — Янв. — Т. 217, № 1. — С. 1—18.
33. *Menter F.* Zonal Two Equation k-w Turbulence Models For Aerodynamic Flows // 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 07.1993.
34. *Matsushima M.*, *Nakajima T.*, *Roberts P. H.* The anisotropy of local turbulence in the Earth's core // Earth, Planets and Space. — 1999. — Апр. — Т. 51, № 4. — С. 277—286.
35. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth's core / N. Schaeffer [и др.] // Geophysical Journal International. — 2017. — Июнь. — Т. 211, № 1. — С. 1—29.
36. *Kosovichev A. G.*, *Pipin V. V.* Dynamo Wave Patterns Inside the Sun Revealed by Torsional Oscillations. — 2018. — URL: https://arxiv.org/abs/1809.10776.
37. *Reynolds O.* An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1883. — Т. 174. — С. 935—982. — URL: http://www.jstor.org/stable/109431.
38. The Onset of Turbulence in Pipe Flow / K. Avila [и др.] // Science. — 2011. — Июль. — Т. 333, № 6039. — С. 192—196.
39. *Черняк В. Г.*, *Суетин П. Е.* Механика сплошных сред. — М: Физматлит, 2006. — С. 352.
40. *Карман Т.* Турбулентность // Успехи физических наук. — 1939. — Т. 21, № 1. — С. 21—59.
41. *Taylor G. I.* Diffusion by Continuous Movements // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1922. — Т. s2—20, № 1. — С. 196—212.
42. *Taylor G. I.*, *Green A. E.* Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1937. — Т. 158, № 895. — С. 499—521. — eprint: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/158/895/499.full.pdf. — URL: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/158/895/499.
43. *Taylor G. I.* The Spectrum of Turbulence // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1938. — Февр. — Т. 164, № 919. — С. 476—490.
44. *Townsend A. A.*, *Taylor G.* Experimental evidence for the theory of local isotropy // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1948. — Окт. — Т. 44, № 04. — С. 560.

45. *Обухов А. М.* Турбулентность атмосферы и океана. — Л: Гидрометеоиздат, 1988. — С. 414.

46. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339—342.

47. *Миллионщиков М. Д.* Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости // Доклады АН СССР. — 1939. — Т. 22, № 5. — С. 236—240.

48. *Миллионщиков М. Д.* К теории однородной изотропной турбулентности // Доклады АН СССР. —. — Т. 32, № 9. — С. 611—614.

49. *Monin A. S.* On the nature of turbulence // Physics-Uspekhi. — 1978. — Т. 21, № 5. — С. 429—442. — URL: http://ufn.ru/en/articles/1978/5/f/.

50. *Reynolds O.* On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1895. — С. 123—164. — URL: http://www.jstor.org/stable/90643.

51. *Keller L.*, *Friedman A.* Die Differenzialgleichungen fur die turbulenze Bewegnung einer inkompressibler Flussigkeit // Proc. 1st Int. Congr. appl. Mech. — 1924.

52. *Баренблатт Г. И.*, *Простокишин В. М.*, *Корин А. Д.* Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса: уроки исследования // Труды конференции «Турбулентность и волновые процессы», посвященной 100-летию со дня рождения академика Михаила Дмитриевича Миллионщикова (1913-1973). — 26.11.2013.

53. *П. Г. Фрик.* Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Т. II. — ПГТУ, Пермь, 1998. — С. 136.

54. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. — 1985. — Гл. Турбулентность (комментарии А.М. Яглома). 470 с.

55. *Richardson L. F.*, *Lynch P.* Weather Prediction by Numerical Process. — Cambridge University Press, 2007. — (Cambridge Mathematical Library). — URL: https://books.google.ru/books?id=D52d3%5C_bbgg8C.

56. Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres / H. L. Dryden [и др.] ; Nat. Adv. Com. Aeronaut. — 1937. — № 581.

57. *Князев В. А.* Время творит биографии (к 80-летию академика М.Д. Миллионщикова) // Вестник Российской академии наук. — 1993. — Т. 63, № 1. — С. 38—43.

58. *Sonin A.* 2.27 Turbulent Flow and Transport. / Massachusetts Institute of Technology. — 2002. — URL: https://ocw.mit.edu.

59. *Frisch U.* Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov. — Cambridge University Press, 1995. — С. 296.

60. *Orszag S. A.*, *Patterson G. S.* Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence // Physical Review Letters. — 1972. — Янв. — Т. 28, № 2. — С. 76—79.

61. *Berselli L. C.* On the Large Eddy Simulation of the Taylor–Green vortex // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 7, № 2. — S164—S191. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00021-005-0152-z.

62. Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex / D. Drikakis [и др.] // Journal of Turbulence. — 2007. — Янв. — Т. 8. — N20.

63. Direct and Large-Eddy Simulation IX / под ред. J. Fröhlich [и др.]. — Springer International Publishing, 2015.

64. *Garnier E.*, *Adams N.*, *Sagaut P.* Large Eddy Simulation for Compressible Flows. — Springer Netherlands, 2009.

65. *Fernandez P.*, *Nguyen N.*, *Peraire J.* On the ability of discontinuous Galerkin methods to simulate under-resolved turbulent flows. — 10.2018.

66. *Kajzer A.*, *Pozorski J.*, *Szewc K.* Large-eddy simulations of 3D Taylor-Green vortex: comparison of Smoothed Particle Hydrodynamics, Lattice Boltzmann and Finite Volume methods // Journal of Physics: Conference Series. — 2014. — Авг. — Т. 530. — С. 012019.

67. *Brachet M. E.* Direct simulation of three-dimensional turbulence in the TaylorвЂ“Green vortex // Fluid Dynamics Research. — 1991. — Т. 8, № 1—4. — С. 1. — URL: http://iopscience.iop.org/1873-7005/8/1-4/A01.

68. *Bull J. R.*, *Jameson A.* Simulation of the Compressible Taylor Green Vortex using High-Order Flux Reconstruction Schemes // AIAA AVIATION Forum. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 06.2014. — С. –. — URL: https://doi.org/10.2514/6.2014-3210.

69. The influence of pipe length on turbulence statistics computed from direct numerical simulation data / C. Chin [и др.] // Physics of Fluids. — 2010. — Нояб. — Т. 22, № 11. — С. 115107.

70. Numerical investigation of the entrainment and mixing processes in neutral and stably-stratified mixing layers / A. B. Cortesi [и др.] // Physics of Fluids. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 162—185. — URL: http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/11/1/10.1063/1.869910.

71. *DeBonis J.* Solutions of the Taylor-Green Vortex Problem Using High-Resolution Explicit Finite Difference Methods // Aerospace Sciences Meetings. — American Institute of Aeronautics, Astronautics, 01.2013. — С. –. — URL: https://doi.org/10.2514/6.2013-382.

72. *Kim J.*, *Moin P.*, *Moser R.* Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. — 1987. — Апр. — Т. 177, № -1. — С. 133.

73. *Hillewaert k.* Direct Numerical Simulation of the aylor-Green Vortex at Re = 1600 // 2nd International Workshop on High-Order CFD Methods. — Sponsored by DLR, AIAA, AFOSR. 05.2013.

74. Spectral analysis of turbulence based on the DNS of a channel flow / I. A. Bolotnov [и др.] // Computers & Fluids. — 2010. — Апр. — Т. 39, № 4. — С. 640—655.

75. *Gavrilov A. A.*, *Rudyak V. Y.* Direct numerical simulation of the turbulent flows of power-law fluids in a circular pipe // Thermophysics and Aeromechanics. — 2016. — Июль. — Т. 23, № 4. — С. 473—486.

76. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid / H. Kawamura [и др.] // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 1998. — Окт. — Т. 19, № 5. — С. 482—491.

77. *Kozuka M.*, *Seki Y.*, *Kawamura H.* DNS of turbulent heat transfer in a channel flow with a high spatial resolution // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2009. — Июнь. — Т. 30, № 3. — С. 514—524.

78. *Lluesma-Rodriguez F.*, *Hoya S.* DNS of turbulent heat transfer in channel flows / American Institute of Aeronautics ; Astronautics. — С. 1—8.

79. *Seki Y.*, *Kawamura H.* DNS of turbulent heat transfer in a channel flow with a varying streamwise thermal boundary condition // Heat Transfer—Asian Research. — 2006. — Т. 35, № 4. — С. 265—278.

80. *Жлуктов С. В.*, *Аксёнов А. А.*, *Карасёв П. И.* Моделирование отрывного течения с использованием двухпараметрической модели турбулентности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 79—88.

81. *Bardina J. E.*, *Huang P. G.*, *Coakley T. J.* Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development : Report / National Aeronautics ; Space Administration, Ames Research Center. — 1997. — С. 100.

82. *Jimenez J.* Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? // Journal of Turbulence. — 2003. — Июнь. — Т. 4.

83. *Wilcox D. C.* Turbulence Modeling for CFD (Third Edition). — D C W Industries, 2006. — С. 522.

84. *Gramer L.* Kelvin-Helmholtz Instabilities. — 04.2007. — URL: http://www.rsmas.miami.edu/users/isavelyev/GFD-2/KH-I.pdf.

85. *Cushman-Roisin B.* Kelvin–Helmholtz Instability as a Boundary-Value Problem // Environmental Fluid Mechanics. — 2005. — Т. 5, № 6. — С. 507—525. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10652-005-2234-0.

86. *Smyth W. D.* Secondary Kelvin-Helmholtz instability in weakly stratified shear flow // Journal of Fluid Mechanics. — Cambridge, UK, 2003. — Дек. — Т. 497. — С. 67—98. — URL: https://www.cambridge.org/core/article/secondary-kelvin-helmholtz-instability-in-weakly-stratified-shear-flow/EF3493BB5322E136A9A59F0BA47BAA08.

87. Evolution of Kelvin-Helmholtz billows in nature and laboratory / I. De Silva [и др.] // Earth and Planetary Science Letters. — 1996. — Т. 143. — С. 217—231.

88. *Batchelor G. K.* Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous TwoвЂђDimensional Turbulence // Physics of Fluids. — 1969. — Т. 12, № 12. — С. II-233-II—239. — URL: http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/12/12/10.1063/1.1692443.

89. *Kraichnan R. H.* Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence // Physics of Fluids. — 1967. — Т. 10, № 7. — С. 1417—1423. — URL: http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/10/7/10.1063/1.1762301.

90. *Goldstein S.* IX. Three-dimensional vortex motion in a viscous fluid // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1940. — Т. 30, № 199. — С. 85—102. — eprint: http://dx.doi.org/10.1080/14786444008520701. — URL: http://dx.doi.org/10.1080/14786444008520701.

91. Small-scale structure of the TaylorвЂ“Green vortex / M. E. Brachet [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Т. 130. — 411вЂ“452.

92. *Orszag S. A.* Numerical simulation of the Taylor-Green vortex // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering Part 2: International Symposium, Versailles, December 17–21, 1973 / под ред. R. Glowinski, J. L. Lions. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1974. — С. 50—64. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-06769-8_4.

93. Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor-Green vortex / D. Drikakis [и др.] // Journal of Turbulence. — 2009. — Нояб. — Т. 8, № 20. — С. 1—12.

94. Utilization of high order DRP-type schemes and large eddy simulation based on relaxation filtering for turbulent gas flow computations in the case of Taylor-Green vortex breakdown / E. Koromyslov [и др.] // Computational Continuum Mechanics. — 2015. — Т. 8, № 1. — С. 24—34.

95. ZPlus Tech Brief №13 : тех. отч. / ZPlus, LLC. — 2009. — 11 с.

96. *Stanciu I.* A new viscosity-temperature relationship for vegetable oil // Journal of Petroleum Technology and Alternative Fuels. — 2012. — Т. 3, № 2. — С. 19—23.

97. *Фабелинский И. Л.* О макроскопической и молекулярной сдвиговой вязкости // Успехи физических наук. — 1997. — Т. 167, № 7. — С. 721—733.

98. *Дж. Ферри.* Вязкоупругие свойства полимеров. — М:ИЛ, 1963. — С. 240.

99. *Евдокимов И. Н.*, *Елисеев Д. Ю.* Отрицательная аномалия вязкости жидких нефтепродуктов после термообработки // Химия и технология топлив и масел. — 2002. — Т. 3. — С. 26—29.

100. *Ковалева Л. А.*, *Зиннатуллин Р. Р.*, *Шайхисламов Р. Р.* К исследованию влияния температуры обработки на конечную вязкость нефтяных сред // Теплофизика высоких температур. — 2010. — Т. 48, № 5. — С. 796—797.

101. *Duffy B. R.*, *Wilson S. K.* On the gravity-driven draining of a rivulet of fluid with temperature-dependent viscosity down a uniformly heated and cooled substrate // Journal of Engineering Mathhematics. — 2002. — Т. 42, № 3/4. — С. 359—372.

102. *Ghaly A. Y. Seedeeck M. A.* Chebyshev finite difference method for the effects of Chemical reaction, heat and mass transfer on laminar flow along a semi infite horizontal plate with temperature dependent viscosity // Chaos, solutions, Fractals. — 2004. — Янв. — Т. 19, № 1. — С. 61—70.

103. *Aleksandrov A. A.*, *Dzhuraeva E. V.*, *Utenkov V. F.* Viscosity of Aqueous Solutions of Sodium Chloride // High Temperature. — 2012. — Т. 50. — С. 354—358.

104. *Pearson J. R. A.*, *Shah Y. T.*, *Viera E.* Stability of nonisothermal flow in Channels - I. Temperature - dependent Newtonian fluid without heat generation // Chemical Engineering Science. — 1973. — Т. 28. — С. 2079—2088.

105. *Цыдыпов Ш.* Вязкоупругие и теплофизические свойства жидкостей и стеклообразных систем в модели возбужденного состояния : дис. . . . канд. / Цыдыпов Ш.Б. — БГУ, 2006.

106. *Seeton C. J.* Viscosity-temperature correlation for liquids // Tribology Letters. — 2006. — Апр. — Т. 22, № 1. — С. 67—78.

107. *Aristov S.N.and Zelenina S.* Effect of heat transfer on the plane-channel poiseuille flow of a thermo–viscous fluid // Fluid Dynamics. — 2000. — Т. 35, № 2. — С. 217—221.

108. *Polyakov A.* A Steady Viscous Thermogravitational Flow of Capillary Liquid and Heat Transfer in a Vertical Cavity under Asymmetric Heat Conditions // High Temperature. — 2014. — Т. 52, № 1. — С. 72—77.

109. *Konstantinova N.*, *Popel' P.*, *Yagodin D.* The Kinematic Viscosity of Liquid Copper–Aluminum Alloys // High Temperature. — 2009. — Т. 47. — С. 336—341.

110. *Ceotto D.* Thermal Diffusivity, Viscosity and Prandtl Number for Molten Iron and Low Carbon Steel // High Temperature. — 2013. — Т. 51, № 1. — С. 131—134.

111. *Bel'tyukov A.*, *Lad'yanov V.*, *Shishmarin A.* Viscosity of Fe–Si Melts with Silicon Content up to 45 at % // High. — 2014. — Т. 52, № 2. — С. 185—191.

112. *Campbell I.*, *Turner J. S.* The Influence of Viscosity on Fountains in Magma Chambers // Journal of Petrology. — 1986. — Т. 27, № 1. — С. 1—30.

113. Ultrasonic Doppler Velocity Profiler for Fluid Flow / под ред. Y. Takeda. — Springer Japan, 2012.

114. *Бардыштова К. М.*, *Бернштадт Я. А.*, *Богданов Ш. К.* Топлива, смазочные материалы, технические жидкости. Ассортимент и применение: Справ. изд. / под ред. В. М. Школьников. — М.: Химия, 1989.

115. *Киреев В. Н.*, *Урманчеев С. Ф.* Течение жидкостей с температурной аномалией вязкости // Труды Института механики УНЦ РАН. — 2003. — Т. 3. — С. 232—245.

116. *Fink J. H.*, *Park S. O.*, *Greeley R.* Cooling and deformation of sulfur flows // Icarus. — 1983. — Окт. — Т. 56, № 1. — С. 38—50.

117. *Ильясов А. М.*, *Моисеев К. В.*, *Урманчеев С. Ф.* Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. 8, № 4. — С. 51—59.

118. *Урманчеев С. Ф.* Течение термовязких сред // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Т. 3 / под ред. Р.Г. Стронгин. — X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2011. — С. 1197—1199.

119. Особенности конвективных течений аномально термовязкой жидкости / В. С. Кулешов [и др.] // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 16—26.

120. *Низамова А. Д.*, *Киреев В. Н.*, *Урманчеев С. Ф.* Об устойчивости ламинарного режима течения термовязких жидкостей // Вестник Тюменского государственного университета. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2015. — Т. 1, № 2. — С. 104—111.

121. *Danaila L.*, *Antonia R. A.*, *Burattini P.* Progress in studying small-scale turbulence using 'exact' two-point equations // New Journal of Physics. — 2004. — Т. 6, № 1. — С. 128. — URL: http://stacks.iop.org/1367-2630/6/i=1/a=128.

122. Yaglom-like equation in axisymmetric anisotropic turbulence / L. Danaila [и др.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2012. — Т. 3. — С. 241.

123. *Фрик П. Г.* Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций.Часть II. — ПГТУ, Пермь, 1998. — С. 136.

124. Variable Viscosity Jets: Entrainment and Mixing Process / L. Voivenel [и др.] // Whither Turbulence and Big Data in the 21st Century? / под ред. A. Pollard [и др.]. — Cham : Springer International Publishing, 2017. — С. 147—162. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-41217-7_9.

125. *Taylor G. I.* Statistical Theory of Turbulence // Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences. — 1935. — Сент. — Т. 151, № 873. — С. 421—444.

126. *Taguelmimt N.*, *Danaila L.*, *Hadjadj A.* Effects of Viscosity Variations in Temporal Mixing Layer // Flow, Turbulence and Combustion. — 2016. — Т. 96, № 1. — С. 163—181. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10494-015-9649-6.

127. Viscosity of Liquids. Theory, Estimation, Experiment,and Data / D. S. Viswanath [и др.]. — Springer, 2007.

128. *Wall D. P.*, *Wilson S. K.* The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Т. 323. — С. 107—132.

129. *Тихонов А.*, *Самарский А.* Уравнения математичесской физики: Учеб. пособие. - 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.

130. *Hoffmann K. A. Chiang S. T.* Computational Fluid Dynamics. Т. 1. — Engineering Education System, 1998.

131. *Бахвалов Н. С.*, *Жидков Н. П.*, *Кобельков Г. М.* Численные методы. — М: Наука, 1987. — С. 600.

132. *Fay J. A.* Introduction to Fluid Mechanics. — Massachusetts Intitute of Technology, 1998.

133. *Drazin P.*, *Reid W.* Hydrodynamic stability. — Second edition. — Cambrige University Press, 2004. — С. 619.

134. *Squire H. B.* On the Stability for Three-Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow between Parallel Walls // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1933. — Т. 142, № 847. — С. 621—628. — eprint: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/142/847/621.full.pdf. — URL: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/142/847/621.

135. *Pozrikidis C.* Introduction to theoretical and computational fluid dynamics. — 2-е изд. — Oxford University Press, 2011.

136. *Orszag S. A.* Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. — 1971. — Т. 50. — С. 689—703. — Printed in Great Britain.

137. *Giannakis D.*, *Fischer P. F.*, *Rosner R.* A spectral Galerkin method for coupled Orr-Sommerfeld and induction equations for free-surface MHD // Journal of Computational Physics. — 2009. — Т. 228. — С. 1188—1233.

138. *Walker I.*, *Torain II D.*, *Morgan III M.* An eigenvalue search method using the Orr–Sommerfeld equation for shear flow // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2012. — Т. 236. — С. 2795—2802.

139. *Dongarra J.*, *Straughan B.*, *Walker D.* Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems // Applied Numerical Mathematics. — 1996. — Т. 22. — С. 399—434.

140. *Heisenberg W.* On stability and turbulence of fluid flows : Technical memorandum 1291 / National Advisory Comitee for Aeronautics. — 06.1951. — Translation of Uber Stabilitat und Turbulenz von Fliissigkeitsstromen." Anndlen der Physik, Band 74, No. 15, 1924.

141. *Lin C.* On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. Part I - General Theory. // Quart. Appl. Math. — 1945. — Июль. — Т. 3, № 2. — С. 117—142.

142. *Lin C.* On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. Part II - Stability in an Inviscid Fluid. // Quart. Appl. Math. — 1945. — Окт. — Т. 3, № 3. — С. 218—234.

143. *Lin C.* On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. Part III - Stability in a Viscous Fluid. // Quart. Appl. Math. — 1946. — Янв. — Т. 3, № 3. — С. 277—301.

144. *Potter M. C.*, *Graber E.J. Graber J.* Stability of plane Poiselle flow with heat transfer : Technical Note / NASA. — 1970. — TN D—6027.

145. *Schafer P.*, *Herwig H.* Stability of plane Poiseulle flow with temperature dependent viscosity // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1993. — Т. 36, № 9. — С. 2441—2448.

146. *Talon L.*, *Meiburg E.* Plane Poiseuille flow of miscible layers with different viscosities: instabilities in the Stokes flow regime // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — Нояб. — Т. 686. — С. 484—506. — URL: http://journals.cambridge.org/article_S0022112011003417.

147. *Govindarajan R.* Surprising effects of minor viscositygradients // Journal of the Indian Institute of Science. — 2013. — Т. 82, № 2. — С. 121.

148. *Ranganathan B. T.*, *Govindarajan R.* Stabilization and destabilization of channel flow by location of viscosity-stratified fluid layer // Physics of Fluids (1994-present). — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 1—3.

149. Instability due to viscosity stratification downstream of a centerline injector / Q. Cao [и др.] // The Canadian Journal of Chemical Engineering. — 2003. — Т. 81, № 5. — С. 913—922.

150. *Pinarbasi A.*, *Liakopoulos A.* The effect of variable viscosity on the interfacial stability of two-layer Poiseulle flow // Physics of Fluids. — 1995. — Июнь. — Т. 7, № 6. — С. 1318—1324.

151. *Cao Q.*, *Sarkar K.*, *Prasad A. K.* Direct Numerical Simulations of two viscosity-stratified flow // International Journal of Multiphase Flow. — 2004. — Т. 30. — С. 1485—1508.

152. *Schmid P. J. Henningson D. S.* Stability and transition in shear flows. Т. 142. — Springer-Verlag New York, Inc., 2001. — (Applied mathematical sciences).

153. CABARET Scheme for the Numerical Solution of Aeroacoustics Problems: Generalization to Linearized One-Dimensional Euler Equations / V. M. Goloviznin [и др.] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Т. 49, № 12. — С. 2168—2182.

154. *Tam C.*, *Webb J.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // Journal of Computational Physics. — 1993. — № 107. — С. 262—281.

155. *Головизнин В.*, *Самарский А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86—100.

156. *Головизнин В.*, *Самарский А.* Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 101—166.

157. *Iserles A.* Generalized Leapfrog Methods // IMA Journal of Numerical Analysis. — 1986. — Т. 6. — С. 381—392.

158. *Goloviznin V. M.* Balanced characteristic method for 1D systems of hyperbolic conservation laws in eulerian representation // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2006. — Т. 18, № 11. — С. 14—30.

159. Application of dissipation-free numerical method CABARET for solving gasdynamics of combustion and detonation / M. F. Ivanov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Т. 754. — С. 102003.

160. *Остапенко В. В.* О монотонности балансно-характеристической схемы // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 7. — С. 29—42.

161. *Остапенко В. В.* О сильной монотонности схемы «Кабаре» // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 447—460.

162. *Karabasov S.*, *Goloviznin V. M.* New Efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics // AIAA Journal. — 2007. — Т. 45, № 12. — С. 2861—2871.

163. *Semiletov V. A.*, *Karabasov S. A.* CABARET scheme with conservation-flux asynchronous time-stepping for nonlinear aeroacoustics problems // Journal of Computational Physics. — 2013. — Т. 253, Supplement C. — С. 157—165. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113004804.

164. *Данилин А.*, *Соловьев А.*, *Зайцев А.* Модификация схемы "КАБАРЕ"для численного моделирования одномерных детонационных течений с использованием одностадийной необратимой модели химической кинетики // Вычислительные методы и программирование. — 2017. — Янв. — Т. 18, № 1. — С. 1—10.

165. *Karabasov S.*, *Berloff P.*, *Goloviznin V.* CABARET in the ocean gyres // Ocean Modelling. — 2009. — Янв. — Т. 30, № 2/3. — С. 155—168.

166. *Glotov V. Y.*, *Goloviznin V. M.* Cabaret scheme for two-dimensional incompressible fluid in terms of the stream function-vorticity variables // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 144—154. — URL: http://dx.doi.org/10.1134/S2070048212020044.

167. *Glotov V. Y.*, *Goloviznin V. M.* CABARET scheme in velocity-pressure formulation for two-dimensional incompressible fluids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Т. 53, № 6. — С. 721—735. — URL: http://dx.doi.org/10.1134/S0965542513060080.

168. *Ковыркина О. А.*, *Остапенко В. В.* О монотонности двухслойной по времени схемы «кабаре» // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 9. — С. 97—112.

169. *Kovyrkina O. A.*, *Ostapenko V. V.* On the Monotonicity of the CABARET Scheme in the Multidimensional Case // Doklady Mathematics. — 2015. — Т. 91, № 3. — С. 323—328.

170. *Черный Г.* Газовая динамика: Учебник для университетов и втузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — С. 211.

171. *Goloviznin V.*, *Hynes T.*, *Karabasov S.* CABARET finite-difference schemes for the one-dimensional Euler equations // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2001. — Т. 6, № 2. — С. 210—220. — URL: http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13926292.2001.9637160.

172. *Vyaznikov K.*, *Tishkin V.*, *Favorskij A.* Construction of monotone high resolution difference schemes for hyperbolic systems // Matematicheskoe Modelirovanie. — 1989. — Т. 1, № 5. — С. 95—120.

173. *Т. Г. Елизарова И. А. Ш.* Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2013. — Т. 63. — С. 16.

174. *Глотов В. Ю.* Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума : дис. . . . канд. / Глотов В. Ю. — Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук (ИБРАЭ РАН), 2014.

175. *Lipavskii M. V.*, *Tolstykh A. I.*, *Chigirev E. N.* Numerical simulation of shear layer instability using a scheme with ninth-order multioperator approximations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 296—310. — URL: http://dx.doi.org/10.1134/S0965542513030081.

176. *Berger M.*, *Helzel C.* A Simplified h-box Method for Embedded Boundary Grids // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2012. — Янв. — Т. 34, № 2. — A861—A888.

177. *Ayrton H.* On a New Method of Driving off Poisonous Gases // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1919. — Т. 96, № 676. — С. 249—256. — eprint: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/96/676/249.full.pdf. — URL: http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/96/676/249.

178. Intel Math Kernel Library Reference Manual. — 07.2010. — Document Number: 630813-036US.

179. *Sandham N. D.*, *Reynolds W. C.* Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Т. 224. — С. 133—158.

180. *Huerre P.*, *Monkewitz P. A.* Absolute and convective instabilities in free shear layers // Journal of Fluid Mechanics. — Cambridge, UK, 1985. — Окт. — Т. 159. — С. 151—168. — URL: https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S0022112085003147.

181. Simulation of transition and turbulence decay in the TaylorвЂ“Green vortex / D. Drikakis [и др.] // Journal of Turbulence. — 2007. — Т. 8. — N20. — eprint: http://dx.doi.org/10.1080/14685240701250289. — URL: http://dx.doi.org/10.1080/14685240701250289.

182. *Kulikov Y. M.*, *Son E. E.* The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Т. 774, № 1. — С. 012094. — URL: http://stacks.iop.org/1742-6596/774/i=1/a=012094.

183. *Jammy S.*, *Jacobs C.*, *Sandham N.* Enstrophy and kinetic energy data from 3D Taylor-Green vortex simulations. — 2016. — URL: doi:10.5258/SOTON/401892.

184. *Lesieur M.*, *Ossia S.* 3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers: EDQNM study // Journal of Turbulence. — 2000. — Т. 1. — N7. — eprint: http://dx.doi.org/10.1088/1468-5248/1/1/007. — URL: http://dx.doi.org/10.1088/1468-5248/1/1/007.

185. *Skrbek L.*, *Stalp S. R.* On the decay of homogeneous isotropic turbulence // Physics of Fluids. — 2000. — Т. 12, № 8. — С. 1997—2019. — eprint: http://dx.doi.org/10.1063/1.870447. — URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.870447.

186. Systematic bias in the calculation of spectral density from a three-dimensional spatial grid / R. Stepanov [и др.] // Physical Review E. — 2014. — Нояб. — Т. 90, № 5. — С. 053309. — arXiv: 1410.8263 [physics.comp-ph].

187. *Gréa B.-J.*, *Griffond J.*, *Burlot A.* The effects of variable viscosity on the decay of homogeneous isotropic turbulence // Physics of Fluids. — 2014. — Март. — Т. 26, № 3. — С. 035104.

188. Autocorrelation Functions and the Determination of Integral Length with Reference to Experimental and Numerical Data / P. L. O'Neill [и др.]. — 2004. — Янв.

189. *Yaglom A.* Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. — Springer, 1987. — (Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions ; V. 1). — URL: https://books.google.ru/books?id=zM16SgAACAAJ.

190. *Hussain A. K. M. F.* Coherent structures –reality and myth // Physics of Fluids. — 1983. — Т. 26, № 10. — С. 2816—2850. — URL: http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/26/10/10.1063/1.864048.

191. *Dimotakis P. E.* The mixing transition in turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Апр. — Т. 409. — С. 69—98. — URL: https://www.cambridge.org/core/article/mixing-transition-in-turbulent-flows/5E09B0C458D408DA937FC0CA670EE011.

192. *Ohkitani K.* Wave number space dynamics of enstrophy cascade in a forced two-dimensional turbulence // Physics of Fluids A Fluid Dynamics. — 1991. — Т. 3. — С. 1598—1611.

193. *Savitzky A.*, *Golay M. J. E.* Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures // Analytical Chemistry. — 1964. — Т. 36, № 8. — С. 1627—1639.

194. *Basdevant C.*, *Philipovitch T.* On the Validity of the "Weiss Criterion" in Two-dimensional Turbulence // Phys. D. — 1994. — Май. — Т. 73, № 1/2. — С. 17—30. — URL: http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(94)90222-4.

195. *Brown G. L.*, *Roshko A.* On density effects and large structure in turbulent mixing layers // Journal of Fluid Mechanics. — 1974. — Т. 64. — С. 775—816.

196. *Лойцянский Л.* Ламинарный пограничный слой. — Москва:Государственое издательство физико-математической литературы, 1962. — С. 478.

197. *Schlichting H.* Boundary-layer theory / под ред. J. Kestin. — 7th ed. — New York : McGraw-Hil, 1979. — С. 817. — (McGraw-Hill series in mechanical engineering). — URL: http://trove.nla.gov.au/work/4900562.

198. *Brown D. L.* Performance of Under-resolved Two-Dimensional Incompressible Flow Simulations // Journal of Computational Physics. — 1995. — Т. 122, № 1. — С. 165—183. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185712053.

199. *Kulikov Y. M.*, *Son E. E.* Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence // High Temperature. — 2014. — Т. 52, № 5. — С. 723—729. — URL: http://dx.doi.org/10.1134/S0018151X14050216.

200. *Jiménez J.*, *Moin P.* The minimal flow unit in near-wall turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Апр. — Т. 225, № -1. — С. 213.

201. *Klein M.*, *Sadiki A.*, *Janicka J.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // Journal of Computational Physics. — 2003. — Апр. — Т. 186, № 2. — С. 652—665.

202. *Lund T. S.*, *Wu X.*, *Squires K. D.* Generation of Turbulent Inflow Data for Spatially-Developing Boundary Layer Simulations // Journal of Computational Physics. — 1998. — Март. — Т. 140, № 2. — С. 233—258.

203. *Курбацкий А.*, *Курбацкая Л.* Турбулентная циркуляция над поверхностным источником тепла в устойчиво стратифицированной Турбулентная циркуляция над поверхностным источником тепла в устойчиво стратифицированной окружающей среде // Теплофизика и аэромеханика. — 2016. — С. 703—719.

204. *Metcalf M.*, *Reid J. K.* Fortran 90/95 Explained (2Nd Ed.) — New York, NY, USA : Oxford University Press, Inc., 1999.

205. *Lesieur M.* Turbulence in Fluids. — Springer Netherlands, 2008.

206. *DeWolf I.* Divergence-Free Noise / Martian Labs. — 2018. — С. 4.

207. A matching pursuit approach to solenoidal filtering of three-dimensional velocity measurements / D. Schiavazzi [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2014. — Апр. — Т. 263. — С. 206—221.

208. *Silva C. M. de*, *Philip J.*, *Marusic I.* Minimization of divergence error in volumetric velocity measurements and implications for turbulence statistics // Experiments in Fluids. — 2013. — Июнь. — Т. 54, № 7.

209. Weighted divergence correction scheme and its fast implementation / C. Wang [и др.] // Experiments in Fluids. — 2017. — Апр. — Т. 58, № 5.

210. *Holmen V.* Methods of Vortex Identification : науч. отч.

211. *Haller G.* An objective definition of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Февр. — Т. 525. — С. 1—26.

212. *Perry A. E.*, *Henbest S.*, *Chong M. S.* A theoretical and experimental study of wall turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 1986. — Апр. — Т. 165, № -1. — С. 163.

213. *George W. K.* Lectures in Turbulence for the 21st Century. — 13.01.2013. — С. 303.

214. *Jimenez J.* The largest scales of turbulent wall flows : Annual Research Briefs / Center for Turbulence Research. — 1998.

215. *Zeman O.* Dilatation dissipation: The concept and application in modeling compressible mixing layers // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — Февр. — Т. 2, № 2. — С. 178—188.

216. *Passot T.*, *Pouquet A.* Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime // Journal of Fluid Mechanics. — 1987. — Сент. — Т. 181, № -1. — С. 441.

217. *Sillero J. A.*, *Jiménez J.*, *Moser R. D.* Two-point statistics for turbulent boundary layers and channels at Reynolds numbers up to $\delta^+ \approx 2000$ // Physics of Fluids. — 2014. — Окт. — Т. 26, № 10. — С. 105109.

218. *Wallace J. M.* Space-time correlations in turbulent flow: A review // Theoretical and Applied Mechanics Letters. — 2014. — Т. 4, № 2. — С. 022003.

219. *Kraichnan R. H.* Irreversible Statistical Mechanics of Incompressible Hydromagnetic Turbulence // Physical Review. — 1958. — Март. — Т. 109, № 5. — С. 1407—1422.

220. *Kraichnan R. H.* The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. — 1959. — Май. — Т. 5, № 04. — С. 497.

221. *Kraichnan R. H.* Kolmogorov's Hypotheses and Eulerian Turbulence Theory // Physics of Fluids. — 1964. — Т. 7, № 11. — С. 1723.

222. *He G.-W.*, *Wang M.*, *Lele S. K.* On the computation of space-time correlations by large-eddy simulation // Physics of Fluids. — 2004. — Нояб. — Т. 16, № 11. — С. 3859—3867.

223. *Kraichnan R. H.* Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence // Physics of Fluids. — 1965. — Т. 8, № 4. — С. 575.

224. *Richardson L. F.* Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1926. — Апр. — Т. 110, № 756. — С. 709—737.

225. *Kraichnan R. H.*, *Herring J. R.* A strain-based Lagrangian-history turbulence theory // Journal of Fluid Mechanics. — 1978. — Сент. — Т. 88, № 02. — С. 355.

226. *Meneveau C.*, *Lund T. S.*, *Cabot W. H.* A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Июль. — Т. 319, № -1. — С. 353.

227. *He G.-W.*, *Zhang J.-B.* Elliptic model for space-time correlations in turbulent shear flows // Physical Review E. — 2006. — Май. — Т. 73, № 5.

228. *Kaneda Y.*, *Gotoh T.* Lagrangian velocity autocorrelation in isotropic turbulence // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1991. — Авг. — Т. 3, № 8. — С. 1924—1933.

229. *Kaneda Y.* Lagrangian and Eulerian time correlations in turbulence // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1993. — Нояб. — Т. 5, № 11. — С. 2835—2845.

230. *Wills J. A. B.* On convection velocities in turbulent shear flows // Journal of Fluid Mechanics. — 1964. — Нояб. — Т. 20, № 03. — С. 417.

231. *Zhao X.*, *He G.-W.* Space-time correlations of fluctuating velocities in turbulent shear flows // Physical Review E. — 2009. — Апр. — Т. 79, № 4.

232. *Zhao X.*, *He G.-W.* Space-time correlations of fluctuating velocities in turbulent shear flows // Physical Review E. — 2009. — Апр. — Т. 79, № 4.

233. *Hogg J.*, *Ahlers G.* Reynolds-number measurements for low-Prandtl-number turbulent convection of large-aspect-ratio samples // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Май. — Т. 725. — С. 664—680.

234. *Favre A. J.*, *Gaviglio J. J.*, *Dumas R.* Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. — 1957. — Июнь. — Т. 2, № 04. — С. 313.

235. *Favre A. J.*, *Gaviglio J. J.*, *Dumas R. J.* Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. — 1958. — Янв. — Т. 3, № 04. — С. 344.

236. *Kolpin M. A.* The flow in the mixing region of a jet // Journal of Fluid Mechanics. — 1964. — Апр. — Т. 18, № 04. — С. 529.

237. *Goldschmidt V. W.*, *Young M. F.*, *Ott E. S.* Turbulent convective velocities (broadband and wavenumber dependent) in a plane jet // Journal of Fluid Mechanics. — 1981. — Апр. — Т. 105, № -1. — С. 327.

238. *Bonnet J. P.*, *Delville J.*, *Garem H.* Space and space-time longitudinal velocity correlations in the turbulent far wake of a flat plate in incompressible flow // Experiments in Fluids. — 1986. — Т. 4, № 4. — С. 189—196.

239. *Bullock K. J.*, *Cooper R. E.*, *Abernathy F. H.* Structural similarity in radial correlations and spectra of longitudinal velocity fluctuations in pipe flow // Journal of Fluid Mechanics. — 1978. — Окт. — Т. 88, № 03. — С. 585.

240. *Baars W. J.*, *Hutchins N.*, *Marusic I.* Reynolds number trend of hierarchies and scale interactions in turbulent boundary layers // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2017. — Февр. — Т. 375, № 2089. — С. 20160077.

241. *Balakumar B. J.*, *Adrian R. J.* Large- and very-large-scale motions in channel and boundary-layer flows // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2007. — Март. — Т. 365, № 1852. — С. 665—681.

242. *Hutchins N.*, *Marusic I.* Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Май. — Т. 579. — С. 1.

243. Large-scale features in turbulent pipe and channel flows / J. P. Monty [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Окт. — Т. 589.

244. A comparison of turbulent pipe, channel and boundary layer flows / J. P. Monty [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2009. — Июль. — Т. 632. — С. 431.

245. *JIMÉNEZ J.*, *PINELLI A.* The autonomous cycle of near-wall turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 1999. — Июнь. — Т. 389. — С. 335—359.

Список рисунков

Список таблиц