

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Объединенный институт высоких температур Российской академии наук» (ОИВТ РАН)

На правах рукописи

Родин Михаил Максимович

**Развитие теории электростатического взаимодействия  
заряженных тел на малых расстояниях между ними**

Специальность 1.3.9 —  
«Физика плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Филиппов Анатолий Васильевич

Москва — 2022

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Взаимодействие двух заряженных сферических частиц в плазме в режиме слабого и умеренного экранирования</b>	9
1.1 Общее аналитическое решение задачи. Случай постоянных зарядов	9
1.2 Случай постоянных потенциалов поверхностей . . . . .	12
1.3 Методика расчет силы взаимодействия в режиме слабого и умеренного экранирования . . . . .	13
<b>Глава 2. Электростатическое взаимодействие двух проводящих макрочастиц</b> . . . . .	16
2.1 Распределение электростатического потенциала системы из двух проводящих макрочастиц . . . . .	16
2.2 Потенциал взаимодействия частиц. Емкостные и потенциальные коэффициенты . . . . .	20
<b>Глава 3. Взаимодействие двух диэлектрических шаров и точечного заряда</b> . . . . .	27
3.1 Электростатический потенциал и поверхностная плотность заряда	27
3.1.1 Распределение потенциала в случае диэлектрических частиц . . . . .	27
3.1.2 Плотность связанных зарядов на сферических поверхностях	31
3.2 Силы взаимодействия частиц . . . . .	33
3.2.1 Точечный заряд в поле макрочастиц . . . . .	33
3.2.2 Силы, действующие на сферические частицы . . . . .	35
3.3 Момент силы . . . . .	45
3.4 Улучшение сходимости выражений, описывающих влияние точечной частицы . . . . .	48
3.4.1 Поверхностная плотность заряда . . . . .	48
3.4.2 Электростатический потенциал диэлектрического шара в присутствии точечного заряда . . . . .	58

3.4.3	Сила взаимодействия . . . . .	62
3.5	Результаты расчетов . . . . .	66
3.5.1	Сила взаимодействия . . . . .	66
3.5.2	Поверхностная плотность заряда . . . . .	71
3.6	Решение задачи без учета согласованности потенциалов сферических частиц с потенциалом точечной . . . . .	74
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>77</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>79</b>
<b>Приложение А. . . . .</b>		<b>83</b>
A.1	Интегралы некоторых тригонометрических функций . . . . .	83
A.2	Свойства присоединенных функций Лежандра . . . . .	85
A.3	Интегралы от выражений, содержащих присоединенные функции Лежандра . . . . .	89

## Введение

Задача об электростатическом взаимодействии заряженных тел конечно-го размера имеет давнюю историю. Пуассон рассматривал взаимодействие двух проводящих сферических частиц с использованием метода разложения по полиномам Лежандра [4], Кельвин решал эту задачу методом изображений и с помощью разложения по полиномам Лежандра в бисферической системе координат [5]. Максвелл получил выражение для потенциала в сферической системе координат с точностью до 22-го порядка по межчастичному расстоянию [6]. Рассел использовал для нахождения потенциала взаимодействия частиц емкостные коэффициенты и получил асимптотические формулы для этих величин в пределе близко расположенных частиц [7]. Эти результаты были также получены в работах [8; 9] в рамках исследования вопроса о возможности притяжения разноименно заряженных проводящих шаров.

В плазме электростатическое поле макрочастиц экранируется, но при определенных условиях эффектами экранирования можно пренебречь, и сила взаимодействия частиц оказывается близкой к силе в вакууме или однородном диэлектрике. Ранее взаимодействие проводящих сферических частиц в однородной диэлектрической среде рассматривалось во многих работах (см. работы [9—13] и литературу, цитированную в них). Незначительно более сложный случай диэлектрических частиц освещен в [14—16], исследование взаимодействия макрочастицы с точечным зарядом в плазме проведено в [12; 17].

Тема исследования является **актуальной**, так как в механизме взаимодействия заряженных макроскопических объектов электростатическая сила часто играет главенствующую роль. Одним из примеров таких систем является пылевая плазма, широко распространенная в космосе [18—20] и образующаяся в качестве побочного продукта в термоядерных реакторах [21] и установках газового разряда [22]. Среди других примеров можно назвать молекулярные кластеры [23], аэрозоли в атмосферах планет и спутников [24—26] и частицы порошковых красок [27]. При этом именно взаимодействие на малых расстояниях играет решающую роль в таких процессах, как коагуляция и агломерация пылевых частиц [28], слияние заряженных микроскопических капель [29] и др.

**Целью** данной работы является развитие существующей теории электростатического взаимодействия заряженных тел в различных средах, разработка новых и усовершенствование имеющихся методов определения основных характеристик системы из двух взаимодействующих заряженных частиц конечного размера, обобщение известных результатов на случай большего количества частиц.

**Задачи**, которые необходимо было решить для достижения поставленной цели:

1. Определить условия, при которых задачу о взаимодействии пылевых частиц конечного размера в плазме или электролите можно свести к задаче о взаимодействии в однородном диэлектрике.
2. Разработать методику вычисления емкостных коэффициентов системы из двух проводящих сферических частиц и на их основе найти потенциальную энергию взаимодействия.
3. Исследовать влияние дополнительной частицы пренебрежимо малого размера на характер взаимодействия пары сферических диэлектрических частиц, вычислить силы, действующие на каждую из них, и найти распределение заряда на поверхностях частиц конечного размера.
4. Разработать методику улучшения сходимости рядов, определяющих вклады точечной частицы в электростатический потенциал системы, действующие в ней силы и поверхностную плотность заряда на сферических частицах.
5. Определить степень обоснованности использованного комплексного подхода к решению задачи и оценить допустимость пренебрежения нарушением симметрии, возникающим вследствие рассмотрения третьей частицы.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритм вычисления силы взаимодействия макрочастиц с постоянными потенциалами поверхностей в плазме при слабом экранировании посредством нахождения силы взаимодействия в однородном диэлектрике.
2. Методика расчета емкостных и потенциальных коэффициентов системы из двух сферических частиц конечного размера в широком диапазоне расстояний между ними.

3. Методика расчета силы электростатического взаимодействия двух сферических частиц в присутствии третьей точечной частицы для исследования перехода пары макрочастиц в режим притяжения и определения условий, когда необходим учет взаимной поляризации сферических частиц.
4. Метод выделения дельта-члена в электростатическом потенциале и плотности связанных зарядов для устранения расходимости рядов, вызванной точечностью третьей частицы.

#### **Научная новизна:**

1. Впервые был разработан способ нахождения емкостных и потенциальных коэффициентов системы из двух макроскопических проводящих частиц, не сопряженный с необходимостью численного решения системы линейных уравнений высокого порядка и обладающий при этом достаточной для приложений точностью в широком диапазоне межчастичных расстояний.
2. Было выполнено оригинальное исследование влияния третьей частицы на переход пары одноименно заряженных диэлектрических шаров в режим притяжения в наиболее общем случае произвольного взаимного расположения всех трех частиц.
3. Впервые было предложено аналитическое преобразование формул для плотности заряда на поверхности диэлектрика и силы взаимодействия частиц, позволяющее существенно улучшить сходимость входящих в них рядов и получить достоверные данные для этих величин при достаточно малых расстояниях между точечной частицей и сферической поверхностью.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключаются, во-первых, в том, что предложенный метод расчета емкостных коэффициентов системы из двух проводящих шаров может быть использован для нахождения потенциала взаимодействия пылевых частиц в плазме, который позволяет определить условия фазовых переходов в пылевой плазме, частоты пылеакустических колебаний и коэффициенты переноса пылевых частиц. Во-вторых, развитая в работе теория электростатического взаимодействия трех частиц дает возможность учесть влияние соседей на пару сферических частиц и тем самым расширить и дополнить результаты предыдущих исследований.

**Публикации** автора [1–3] достаточно полно раскрывают содержание работы. Основные результаты прошли **апробацию** на следующих конференциях:

1. Всероссийская (с международным участием) конференция «Физика низкотемпературной плазмы» (ФНТП–2017), Казань, Россия, 5–9 июня 2017 г.
2. III международная конференция «Научные чтения памяти Александра Михайловича Дыхне», Троицк, Москва, 3 ноября 2017 г.
3. XXXIII International Conference on Equations of State for Matter (ELBRUS 2018), Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, March 1–6, 2018.
4. Team Meeting on “Electrostatic Manipulation of Nano-Scale Objects of Lunar Regolith”, Берн, Швейцария, 29 января – 1 февраля 2019 г.
5. 16-й Российский Симпозиум «Фундаментальные основы атомистического многомасштабного моделирования» (ФОАММ–2019), Новый Афон, Абхазия, 15–26 августа 2019 г.
6. IV международная конференция «Научные чтения памяти Александра Михайловича Дыхне», Троицк, Москва, 31 октября 2019 г.
7. XXXV International Conference on Equations of State for Matter (ELBRUS 2020), Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, March 1–6, 2020.
8. XXXVI International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter (ELBRUS 2021), March 1–6, 2021.
9. Scientific-Coordination Session on “Non-Ideal Plasma Physics”, Moscow, Russia, December 9–10, 2021.
10. XXXVII Fortov International Conference on Equation of State for Matter (ELBRUS 2022), Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, March 1–6, 2022.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. В первой главе рассмотрено взаимодействие двух пылевых частиц в равновесной плазме, сформулированы условия для возможности сведения поставленной задачи к задаче о взаимодействии частиц в однородном диэлектрике. Выделены случаи постоянных зарядов и постоянных потенциалов поверхностей макрочастиц, описан алгоритм вычисления силы взаимодействия макрочастиц в плазме в режиме слабого и умеренного экранирования [1].

Во второй главе настоящей работы предложен метод расчета потенциальных и емкостных коэффициентов системы из двух проводящих сферических

частиц в однородном диэлектрике, основанный на сшивке приближенных формул [30] в области больших межчастичных расстояний с асимптотическими выражениями [7], дающими точные результаты при сильном сближении частиц. С помощью этих величин рассчитана потенциальная энергия взаимодействия во всем диапазоне межчастичных расстояний [2; 3].

В третьей главе рассмотрено взаимодействие трех заряженных частиц, две из которых имеют конечные размеры и диэлектрические проницаемости, а одна является точечной. Получены аналитические формулы для сил, действующих на сферические частицы, и для плотности заряда на их поверхностях. Предложен метод устранения расходимости при численном суммировании рядов, входящих в выражения для этих величин, на основе полученных данных исследовано влияние точечной частицы на возникновение притяжения между одноименно заряженными диэлектрическими шарами.

Полный объем диссертации составляет 92 страницы с 18 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 48 наименований.



# Глава 1. Взаимодействие двух заряженных сферических частиц в плазме в режиме слабого и умеренного экранирования

## 1.1 Общее аналитическое решение задачи. Случай постоянных зарядов

Рассмотрим две сферические частицы с радиусами  $a_1$ ,  $a_2$  и диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , находящиеся на расстоянии  $R$  друг от друга. Ось  $z$  проведем вдоль вектора, соединяющего их центры и направленного от первой частицы ко второй. Рассматриваемая задача является аксиально-симметричной. Положение точки наблюдения  $P$  относительно первой частицы определяется расстоянием  $r_1$  до ее центра и углом  $\theta_1$  между вектором  $\mathbf{r}_1$  и осью  $z$ . Для удобства последующего разложения потенциала второй частицы определим аналогично расстояние  $r_2$  и угол  $\theta_2$  (см. рис. 1.1).

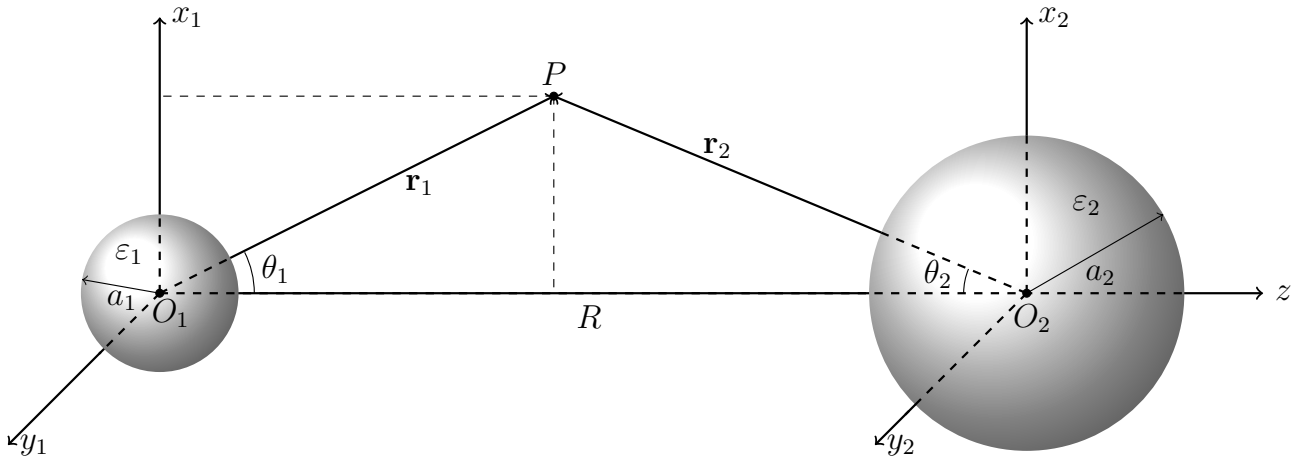


Рисунок 1.1 — Схема взаимодействия двух сферических частиц.

Поскольку, как мы полагаем, внутри сферических частиц свободных зарядов нет, потенциалы во внутренних областях  $\phi_I$  и  $\phi_{II}$  подчиняются уравнению Лапласа:

$$\Delta\phi_I(r_1, \theta_1) = 0, \quad \Delta\phi_{II}(r_2, \theta_2) = 0,$$

Во внешнем пространстве, занятом плазмой с постоянной экранирования  $k_D = 1/r_D$  ( $r_D$  — дебаевский радиус), потенциалы частиц  $\phi_1$  и  $\phi_2$  являются решением

уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\phi_i - k_D^2\phi_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Его общее решение, удовлетворяющее граничным условиям для диэлектрика [31; 32] ( $\sigma_{i,f}$  – плотность свободного заряда на  $i$ -ой частице)

$$\begin{aligned} \phi_{\text{I}}|_{r_1=a_1} - \phi|_{r_1=a_1} &= 0, & \phi_{\text{II}}|_{r_2=a_2} - \phi|_{r_2=a_2} &= 0, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial\phi_{\text{I}}}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a_1} - \varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial r_1}\Big|_{r_1=a_1} &= 4\pi\sigma_{1,f}, & \varepsilon_2 \frac{\partial\phi_{\text{II}}}{\partial r_2}\Big|_{r_2=a_2} - \varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial r_2}\Big|_{r_2=a_2} &= 4\pi\sigma_{2,f}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

имеет вид [33]:

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta_1) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_1)}{\sqrt{\tilde{r}_1}}, \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta_2) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{r}_2)}{\sqrt{\tilde{r}_2}}, \quad (1.2)$$

где  $P_n$  – полиномы Лежандра,  $K_{n+1/2}$  – модифицированные функции Бесселя 3-го рода, или функции Макдональда,  $\tilde{r}_i = k_D r_i$ ,  $i = 1, 2$ . После переразложения потенциалов во взаимных системах координат с использованием формулы сложения Макдональда [34] и теоремы сложения для полиномов Лежандра [30] приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \phi_1(r_2, \mu_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu_2) \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{r}_2, \tilde{R}) A_m, \\ \phi_2(r_1, \mu_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu_1) \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{r}_1, \tilde{R}) B_m. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\tilde{R} = k_D R$ ,  $\mu_i = \cos\theta_i$ , а коэффициенты  $b_{nm}$  определены в Приложении статьи [35]. После подстановки суммарного потенциала в граничные условия можно получить систему уравнений для определения коэффициентов разложения  $A_n$  и  $B_n$ . В случае, когда при изменении межчастичного расстояния полные

заряды макрочастиц остаются постоянными, система имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon \frac{K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + n(\varepsilon_1 - \varepsilon) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{3/2}} \right] A_n + \\ & \quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ n\varepsilon_1 \frac{b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\tilde{a}_1} - \varepsilon \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1} \right] B_m = \sigma_{1,n}, \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \left[ n\varepsilon_2 \frac{b_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R})}{\tilde{a}_2} - \varepsilon \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_2} \right] A_m + \\ & \quad + \left[ \varepsilon \frac{K_{n+3/2}(\tilde{a}_2)}{\tilde{a}_2^{1/2}} + n(\varepsilon_2 - \varepsilon) \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}{\tilde{a}_2^{3/2}} \right] B_n = \sigma_{2,n}, \quad (1.4) \end{aligned}$$

где  $\sigma_{i,n}$  – коэффициенты разложения плотности поверхностного заряда по полиномам Лежандра. По найденным коэффициентам  $A_n$ ,  $B_n$  можно рассчитать силу взаимодействия частиц (более подробно см. работу [35]):

$$F_{1z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} [\Xi_{n-1} - (n-1)\Psi_{n-1}] [\Xi_n + (n+1)\Psi_n], \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_n &= A_n \frac{nK_{n+1/2}(\tilde{a}_1) - \tilde{a}_1 K_{n+3/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \tilde{a}_1 \frac{\partial b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R})}{\partial \tilde{a}_1}, \\ \Psi_n &= A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1^{1/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) B_m. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этой же работе показано, что при больших межчастичных расстояниях сила, действующая на  $i$ -ую ( $i = 1, 2$ ) макрочастицу, хорошо описывается выражением ( $j = 3 - i$ ):

$$F_{a,ij} = -\frac{q_1 q_2 (1 + \tilde{R})}{\varepsilon R^2} e^{-\tilde{L}} \frac{1}{(1 + \tilde{a}_j)} \frac{1}{\left(1 + \tilde{a}_i + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} \tilde{a}_i^2\right)}, \quad (1.7)$$

где  $\tilde{L} = \tilde{R} - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2$ . При  $\varepsilon_i \rightarrow \infty$  формула (1.7) описывает силу, соответствующую DLVO-потенциалу [36].

## 1.2 Случай постоянных потенциалов поверхностей

В исследуемом случае взаимодействия в равновесной плазме или электролите постоянными, то есть не зависящими от расстояния между частицами, следует считать потенциалы их поверхностей:

$$(\phi_1 + \phi_2)|_{r_i=a_i} = \phi_{i,s}, \quad i = 1, 2;$$

где  $\phi_{1s}, \phi_{2s}$  – потенциалы поверхностей частиц (в равновесной плазме и электролитах эти величины равны и совпадают с плавающим потенциалом [37]). В этом случае система (1.4) упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} A_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_1)}{\sqrt{\tilde{a}_1}} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m b_{nm}(\tilde{a}_1, \tilde{R}) &= \phi_{1s} \delta_{n0}, \\ B_n \frac{K_{n+1/2}(\tilde{a}_2)}{\sqrt{\tilde{a}_2}} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m b_{nm}(\tilde{a}_2, \tilde{R}) &= \phi_{2s} \delta_{n0}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Как видно из рассмотрения потенциала уединенной пылевой частицы конечного размера [1], постоянные потенциалы поверхностей частиц  $\phi_{i,s}$  связаны с их зарядами на бесконечности  $Q_i = q_i|_{R=\infty}$  следующими соотношениями:

$$\phi_{1s} = \frac{Q_1}{\varepsilon a_1 (1 + \tilde{a}_1)}, \quad \phi_{2s} = \frac{Q_2}{\varepsilon a_2 (1 + \tilde{a}_2)}. \quad (1.9)$$

В случае постоянных потенциалов величины  $\Psi_n$  для  $n \geq 1$  обращаются в нуль, поэтому сила взаимодействия определяется выражением:

$$F_{1z} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \Xi_{n-1} \Xi_n. \quad (1.10)$$

В работе [35] было показано, что на больших расстояниях  $k_D R \gg 1$  сила описывается выражением

$$F_\phi = -a_1 a_2 \varepsilon \phi_{1s} \phi_{2s} \frac{1 + \tilde{R}}{R^2} e^{-\tilde{L}},$$

которое посредством (1.9) приводится к виду:

$$F_\phi = -\frac{Q_1 Q_2}{(1 + \tilde{a}_1)(1 + \tilde{a}_2)} \frac{1 + \tilde{R}}{\varepsilon R^2} e^{-\tilde{L}}. \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что сила и в случае постоянных потенциалов при больших межчастичных расстояниях определяется выражением, следующим из DLVO-потенциала, но с зарядами при  $R = \infty$ .

### 1.3 Методика расчет силы взаимодействия в режиме слабого и умеренного экранирования

Будем теперь считать, что плазменные эффекты экранирования не слишком велики, то есть  $\tilde{a}_{1,2} \lesssim 1$ , что выполняется в большинстве экспериментов с пылевой плазмой. В работе [35] было показано, что при этом условии в случае, когда при изменении расстояния между сферическими частицами их полные заряды остаются постоянными, сила взаимодействия частиц при малых  $L$  хорошо описывается формулой ( $i = 1, 2, j = 3 - i$ )

$$F_{q,ij} = F_{q,\text{ud}} f_{ij}, \quad (1.12)$$

где  $F_{q,\text{ud}}$  – сила взаимодействия частиц в однородном диэлектрике,  $f_{ij}$  – плазменная поправка:

$$f_{ij} = \frac{(1 + \tilde{R}) e^{-(\tilde{R} - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)}}{(1 + \tilde{a}_j) \left(1 + \tilde{a}_i + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i + 2\varepsilon} \tilde{a}_i^2\right)}. \quad (1.13)$$

Возможность сведения рассматриваемой в данной главе задачи к задаче о взаимодействии макрочастиц в однородном диэлектрике именно на малых расстояниях актуальна, поскольку формула сложения Макдональда при близких аргументах функций Инфельда и Макдональда очень медленно сходится, а учет большого числа членов разложения делает систему (1.4) плохо обусловленной [35]. Отметим, что введенная плазменная поправка (1.13) в том числе фигурирует в выражении (1.7), которое с точностью до нее дает кулоновскую силу взаимодействия точечных зарядов.

Если же постоянными при изменении межчастичного расстояния остаются не заряды частиц, а потенциалы их поверхностей, то получить соотношение вида (1.12) не удастся – несмотря на то, что на больших расстояниях сила взаимодействия, как и при постоянных зарядах, хорошо описывается формулой, соответствующей DLVO-потенциалу. Причина в том, что в данном случае по мере сближения заряды макрочастиц уменьшаются, причем степень уменьшения зависит также и от постоянной экранирования  $k_D$ . Тем не менее, если есть возможность определять реальные заряды на частицах по их потенциалам для каждого значения межчастичного расстояния, то использование формулы (1.12) становится правомерным, так что и в случае постоянных потенциалов на малых расстояниях удастся свести рассматриваемую задачу к нахождению силы взаимодействия частиц в однородном диэлектрике.

Именно, если потенциалы поверхностей  $\phi_{i,s}$  частиц не зависят от угловых координат, можно ввести емкостные и потенциальные коэффициенты, которые определяются соотношениями [31; 32]:

$$q_1 = C_{11}\phi_{1s} + C_{12}\phi_{2s}, \quad q_2 = C_{12}\phi_{1s} + C_{22}\phi_{2s}; \quad (1.14)$$

$$\phi_{1s} = S_{11}q_1 + S_{12}q_2, \quad \phi_{2s} = S_{12}q_1 + S_{22}q_2. \quad (1.15)$$

Емкостные коэффициенты  $C_{ij}$  можно находить непосредственно из системы (1.8) при  $n = 0$ , решая ее сперва при  $\phi_{2s} = 0$ , а затем при  $\phi_{1s} = 0$ . Если же  $R \gg \max(a_1, a_2)$ , с учетом монопольного и дипольного членов можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_{a,11} &= \varepsilon a_1 \frac{1 + \tilde{a}_1}{D_a}, & C_{a,22} &= \varepsilon a_2 \frac{1 + \tilde{a}_2}{D_a}, \\ C_{a,12} &= C_{a,21} = \varepsilon \frac{a_1 a_2 e^{-\tilde{L}}}{R D_a}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$D_a = 1 - \frac{\exp\left(-2\tilde{R} + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2\right)}{\tilde{R}^2} \operatorname{sh}(\tilde{a}_1) \operatorname{sh}(\tilde{a}_2).$$

При  $k_D = 0$  из (1.16) следует (см. [32]):

$$\begin{aligned} C_{b,11} &= \varepsilon \frac{a_1}{D_b}, & C_{b,22} &= \varepsilon \frac{a_2}{D_b}, \\ C_{b,12} = C_{b,21} &= -\varepsilon \frac{a_1 a_2}{R} \frac{1}{D_b}, \end{aligned}$$

где  $D_b = 1 - a_1 a_2 / R^2$ .

Как видно из (1.14), при равных потенциалах поверхности макрочастиц заряд каждой из них определяется суммой собственного и взаимного емкостных коэффициентов, что позволяет ввести следующие корректирующие факторы:

$$c_{1,pl} = \frac{C_{a,11} + C_{a,12}}{C_{b,11} + C_{b,12}}, \quad c_{2,pl} = \frac{C_{a,22} + C_{a,21}}{C_{b,22} + C_{b,21}}. \quad (1.17)$$

Расчеты показывают, что данные для емкостей  $C_1 = C_{11} + C_{12}$  и  $C_2 = C_{21} + C_{22}$ , полученные с учетом экранирования из системы (1.8) при  $n = 0$ , прекрасно согласуются с найденными для частиц, взаимодействующих в однородном диэлектрике, и домноженными на факторы (1.17). С ростом постоянной экранирования согласие ухудшалось, но и при  $k_D = 10^3 \text{ см}^{-1}$  отличие не превышало 5%.

Таким образом, предлагаемый алгоритм вычисления силы взаимодействия макрочастиц с постоянными потенциалами поверхностей в плазме при слабом экранировании заключается в следующем. Сначала по имеющимся емкостным коэффициентам системы из двух макрочастиц, помещенных в однородный диэлектрик, с помощью (1.17) находят емкости частиц в плазме или электролите. Далее, по заданным потенциалам поверхности согласно (1.14) вычисляются текущие заряды макрочастиц и подставляются в известную (см., например, [11; 15]) формулу для силы взаимодействия в однородном диэлектрике, после чего полученное значение умножается на плазменный фактор (1.13). Ввиду сказанного актуальной становится задача о нахождении емкостных коэффициентов системы из двух частиц, находящихся в вакууме или однородном диэлектрике, и в следующей главе предлагается метод ее решения.

## Глава 2. Электростатическое взаимодействие двух проводящих макрочастиц

### 2.1 Распределение электростатического потенциала системы из двух проводящих макрочастиц

Рассмотрим две проводящие сферические частицы радиусов  $a_1$  и  $a_2$ , находящиеся в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\varepsilon$  на расстоянии  $R$  друг от друга. Ось  $z$  направим вдоль вектора, соединяющего их центры и направленного от первой макрочастицы ко второй. Рассматриваемая задача является аксиально-симметричной. Положение точки наблюдения  $P$  относительно первой частицы определяется расстоянием  $r_1$  до ее центра и углом  $\theta_1$  между вектором  $\mathbf{r}_1$  и осью  $z$ . Для удобства последующего разложения потенциала второй частицы определим аналогично расстояние  $r_2$  и угол  $\theta_2$ , причем последний, как и  $\theta_1$ , откладывается от положительного направления оси  $z$ .

Введем сферическую систему координат  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  с началом в центре первой частицы. Электростатический потенциал рассматриваемой системы подчиняется уравнению Лапласа [32]

$$\Delta\phi = 0,$$

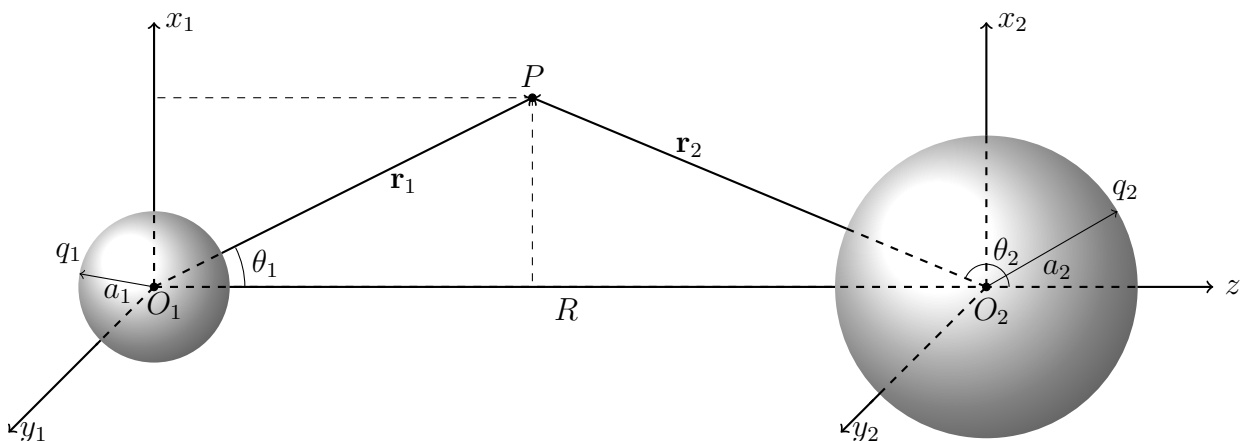


Рисунок 2.1 — Схема взаимодействия двух проводящих сферических частиц.



частными решениями которого являются шаровые функции [38]:

$$r^{-n-1}P_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{pmatrix}, \quad r^n P_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{pmatrix},$$

где  $P_n^m(\cos\theta)$  – присоединенные функции Лежандра. В данной работе используется определение без учета фазы Кондона–Шортли:

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad (2.1)$$

где введено обозначение  $\mu = \cos\theta$ ,  $P_n(\mu)$  – полиномы Лежандра [30].

Общим решением уравнения Лапласа является суперпозиция шаровых гармоник с произвольными коэффициентами. Учет аксиальной симметрии позволяет отбросить все члены, для которых  $m \neq 0$ , так что гармоники с точностью до постоянных коэффициентов переходят в функции  $r^{-n-1}P_n(\mu)$  и  $r^n P_n(\mu)$ .

Рассмотрим потенциал, создаваемый первой макрочастицей. В соответствии со сказанным выше, имеет место разложение

$$\phi_1(r_1, \mu_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_n}{r_1^{n+1}} + \alpha_n r_1^n \right) P_n(\mu_1), \quad (2.2)$$

где  $A_n$  и  $\alpha_n$  – некоторые коэффициенты. Поскольку электрическое поле внутри проводника равно нулю [32], потенциал в этой области постоянен. Во внешнем же пространстве потенциал на бесконечности должен быть конечным (постоянную составляющую потенциала выберем из условия, что на бесконечности он равен 0), следовательно, при  $r > a_1$  создаваемый первой макрочастицей потенциал равен

$$\phi_1(r_1, \mu_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(\mu_1)}{r_1^{n+1}}. \quad (2.3)$$

Перейдем теперь в систему координат  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  с началом центре второй частицы. Потенциал, создаваемый ею во внешнем пространстве, будет иметь аналогичный вид:

$$\phi_2(r_2, \mu_2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\mu_2)}{r_2^{n+1}}. \quad (2.4)$$

Здесь и далее второй нижний индекс у коэффициентов указывает на систему координат, в которой произведено разложение.

Полный потенциал системы, очевидно, равен сумме  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Однако для удобства его подстановки в граничные условия на поверхности первой или второй сферы следует привести его к виду (2.2). Для этого функции  $r_1^{-n-1}P_n(\mu_1)$  и  $r_2^{-n-1}P_n(\mu_2)$ , по которым раскладываются потенциалы макрочастиц в собственных системах координат, сами должны быть разложены по базисам  $r_2^{-n-1}P_n(\mu_2)$ ,  $r_2^n P_n(\mu_2)$  и  $r_1^{-n-1}P_n(\mu_1)$ ,  $r_1^n P_n(\mu_1)$ , соответственно. Необходимые для этого формулы были получены еще Максвеллом [6] (более подробно см. [30]). При условии, что  $r_1 < R$  и  $r_2 < R$ , они имеют следующий вид:

$$\frac{P_n(\mu_2)}{r_2^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{R^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{r_1}{R}\right)^k P_k(\mu_1), \quad (2.5)$$

$$\frac{P_n(\mu_1)}{r_1^{n+1}} = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{r_2}{R}\right)^k P_k(\mu_2). \quad (2.6)$$

Подстановка (2.5) в (2.4) и (2.6) в (2.3) приводит к искомому виду потенциалов:

$$\begin{aligned} \phi_2(r_1, \mu_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{B_k}{R^{k+n+1}} r_1^n P_n(\mu_1), \\ \phi_1(r_2, \mu_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{A_k}{R^{k+n+1}} r_2^n P_n(\mu_2), \end{aligned}$$

Таким образом в системе  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  полный потенциал выражается формулой

$$\phi(r_1, \mu_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{r_1^{n+1}} + \frac{r_1^n}{R^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{B_k}{R^{k+1}} \right] P_n(\mu_1), \quad (2.7)$$

а в координатах  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$

$$\phi(r_2, \mu_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{r_2^n}{R^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{A_k}{R^{k+1}} + \frac{B_n}{r_2^{n+1}} \right] P_n(\mu_2). \quad (2.8)$$

Обратимся к граничным условиям, накладываемым на полный потенциал системы в случае проводящих макрочастиц. Имеем:

$$\begin{aligned} \phi|_{r_1=a_1} &= \phi_{1s}, & \phi|_{r_2=a_2} &= \phi_{2s}, & (2.9) \\ -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a_1} &= 4\pi\sigma_1, & -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2} &= 4\pi\sigma_2. & (2.10) \end{aligned}$$

Здесь  $\phi_{1s}$  и  $\phi_{2s}$  – потенциалы поверхностей частиц,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – плотности заряда на них. Так как частицы являются проводниками, их границы представляют собой эквипотенциальные поверхности, то есть потенциалы  $\phi_{1s}$  и  $\phi_{2s}$  не зависят не только от азимутального угла  $\varphi$  (что обусловлено аксиальной симметрией задачи), но и от полярного угла  $\theta$ . Поэтому в соответствующих системах координат потенциалы поверхностей раскладываются по многочленам Лежандра тривиально и совпадают с нулевой гармоникой в выражениях для полного потенциала. В соответствии с граничными условиями (2.9) получаем:

$$\phi_{1s} = \frac{A_0}{a_1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{R^{k+1}}, \quad \phi_{2s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}} + \frac{B_0}{a_2}.$$

Перед тем как перейти к высшим гармоникам, рассмотрим вторую пару граничных условий (2.10). Интегрирование по поверхностям частиц дает

$$-\frac{\varepsilon a_1^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a_1} d\mu = q_1, \quad -\frac{\varepsilon a_2^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2} d\mu = q_2,$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – полные заряды на макрочастицах. Подставив сюда выражения для полного потенциала (2.7) и (2.8), получим в каждом из двух условий ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^1 P_n(\mu) d\mu,$$

все члены которого, кроме нулевого, исчезают в силу соотношения [30]

$$\int_{-1}^1 \mu^k P_n(\mu) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

После сокращений приходим к простому результату:

$$A_0 = q_1/\varepsilon, \quad B_0 = q_2/\varepsilon. \quad (2.11)$$

Таким образом, коэффициенты при нулевых гармониках в разложениях потенциалов макрочастиц в собственных системах координат однозначно связаны с их полными зарядами. Пользуясь этим, перепишем выражения для потенциалов поверхностей:

$$\phi_{1s} = \frac{q_1}{\varepsilon a_1} + \frac{q_2}{\varepsilon R} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{R^{k+1}}, \quad (2.12)$$

$$\phi_{2s} = \frac{q_1}{\varepsilon R} + \frac{q_2}{\varepsilon a_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}}. \quad (2.13)$$

Вернемся к граничным условиям (2.9). Зафиксировав номер гармоники  $n \geq 1$  и воспользовавшись (2.11), получим систему уравнений, задающую коэффициенты разложения потенциалов частиц по полиномам Лежандра ненулевого порядка:

$$A_n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{a_1^{2n+1}}{R^{k+n+1}} B_k = -\frac{a_1^{2n+1}}{R^{n+1}} \frac{q_2}{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

$$(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{a_2^{2n+1}}{R^{k+n+1}} A_k + B_n = (-1)^{n+1} \frac{a_2^{2n+1}}{R^{n+1}} \frac{q_1}{\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Система (2.14), (2.15) может быть решена с заданной точностью аналитически [6] или численно [14]. Полученные коэффициенты задают распределение полного потенциала системы из двух макрочастиц и позволяют определить потенциалы их поверхностей.

## 2.2 Потенциал взаимодействия частиц. Емкостные и потенциальные коэффициенты

Потенциальная энергия взаимодействия двух макрочастиц может быть найдена с помощью емкостных или потенциальных коэффициентов, которые

определены для макрочастиц с не зависящими от угловых координат потенциалами поверхностей. Это условие выполняется в рассматриваемом случае проводников, а также для любых макрочастиц, помещенных в плазму или электролит, где потоки заряженных частиц поддерживают потенциалы их поверхностей равными плавающему потенциалу [37]. В случае, когда  $\phi_{1s}$  и  $\phi_{2s}$  не зависят также и от межчастичного расстояния, энергия взаимодействия записывается как [11; 12; 39]

$$U_\phi = \frac{1}{2} (a_1 - C_{11}) \phi_{1s}^2 - C_{12} \phi_{1s} \phi_{2s} + \frac{1}{2} (a_2 - C_{22}) \phi_{2s}^2, \quad (2.16)$$

где  $C_{ij}$  – емкостные коэффициенты (1.14). Отметим, что это выражение описывает потенциал взаимодействия без учета вкладов изолированных частиц, поэтому при стремлении межчастичного расстояния к бесконечности энергия  $U_\phi$  приближается к нулю.

Когда при изменении расстояния между частицами остаются постоянными их заряды, потенциал взаимодействия выражается в терминах потенциальных коэффициентов (1.15):

$$U_q = \frac{1}{2} \left( S_{11} - \frac{1}{a_1} \right) q_1^2 + S_{12} q_1 q_2 + \frac{1}{2} \left( S_{22} - \frac{1}{a_2} \right) q_2^2. \quad (2.17)$$

Стоит обратить внимание, что из (2.17) с использованием (1.14) можно получить

$$U_q = \frac{1}{2} (C_{11} - a_1) \phi_{1s}^2 + C_{12} \phi_{1s} \phi_{2s} + \frac{1}{2} (C_{22} - a_2) \phi_{2s}^2 \equiv -U_\phi; \quad (2.18)$$

этот момент освещен особо в [39].

В случае постоянных зарядов макрочастиц потенциал также может быть найден интегрированием силы взаимодействия, которая определяется коэффициентами (2.14), (2.15). В работе [12] с точностью до членов  $R^{-7}$  включительно была получена следующая приближенная формула:

$$U_{q,a} = \frac{q_1 q_2}{R} \left[ 1 + \frac{10}{3} \left( \frac{a_1 a_2}{R^2} \right)^3 \right] - \frac{q_1^2}{2R^2} \frac{a_2^3}{R^2 - a_2^2} - \frac{q_2^2}{2R^2} \frac{a_1^3}{R^2 - a_1^2}. \quad (2.19)$$

Для нахождения потенциальных коэффициентов воспользуемся полученными формулами для потенциалов поверхностей макрочастиц. Сначала, положив  $q_2 = 0$ , решим систему (2.14), (2.15), с помощью полученных коэффици-

ентов  $A_n$  и  $B_n$  из (2.12), (2.13) найдем потенциалы  $\phi_{1s}$  и  $\phi_{2s}$  и по (1.15) вычислим  $S_{11}$  и  $S_{12}$ ; затем, обнулив  $q_1$ , аналогичным образом найдем  $S_{22}$ . Следуя этой процедуре, с точностью до  $R^{-17}$  получаем:

$$\begin{aligned}
S_{a,11} &= \frac{1}{a_1} - \frac{a_2^3}{R^4} \left\{ \frac{R^2}{R^2 - a_2^2} - \frac{a_1 a_2^3 (R^2 + 2a_2^2)}{R^6} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1 a_2^3 R^2}{(R^2 - a_1^2)^3} \left[ 1 + \frac{a_1^2}{R^2} + \frac{2a_2^2(1 + 2a_1^2/R^2)}{R^2 - a_1^2} \right] \right\}, \\
S_{a,12} &= \frac{1}{R} + \frac{a_1 a_2}{R^3} \left( 1 - \frac{R^2}{R^2 - a_1^2} - \frac{R^2}{R^2 - a_2^2} + \frac{R^2}{R^2 - a_1^2 - a_2^2} \right), \\
S_{a,22} &= \frac{1}{a_2} - \frac{a_1^3}{R^4} \left\{ \frac{R^2}{R^2 - a_1^2} - \frac{a_1^3 a_2 (R^2 + 2a_1^2)}{R^6} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1^3 a_2 R^2}{(R^2 - a_2^2)^3} \left[ 1 + \frac{a_2^2}{R^2} + \frac{2a_1^2(1 + 2a_2^2/R^2)}{R^2 - a_2^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

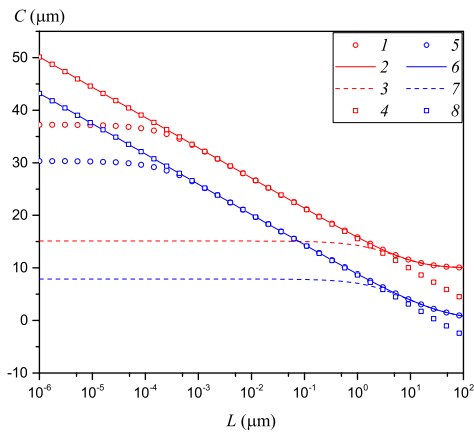
Очевидно, что матрицы, состоящие из емкостных и потенциальных коэффициентов, обратны друг другу, что позволяет получить  $C_{ij}$  из  $S_{ij}$  и наоборот.

Когда макрочастицы достаточно близки друг к другу, так что разделяющее их расстояние  $L = R - a_1 - a_2$  меньше их радиусов, выражения (2.20) теряют точность из-за плохой сходимости рядов, входящих в формулы для перерасложения потенциалов. В этой области следует воспользоваться асимптотическими формулами, полученными Расселом [7; 8]:

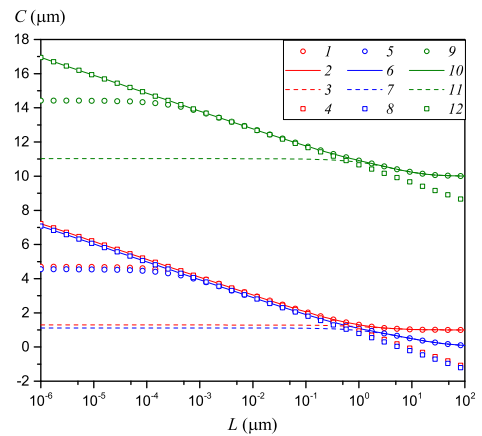
$$\begin{aligned}
C_{as,11} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) - \psi \left( \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) + O(L^2) \right], \\
C_{as,12} &= -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) + \gamma + O(L^2) \right], \\
C_{as,22} &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{L} \right) - \psi \left( \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) + O(L^2) \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь  $\psi(z)$  – дигамма-функция [40],  $\gamma = -\psi(1) = 0.5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Данные, полученные описанными выше способами, сравнивались с результатами вычислений в бисферической системе координат [11; 12], где удается получить явные выражения для емкостных коэффициентов в виде рядов. Как



(a)



(b)

Рисунок 2.2 — Емкостные коэффициенты  $C_{11}$  (кривые 1–4),  $C_{12}$  (кривые 5–8) и  $C_{22}$  (кривые 9–12) макрочастиц равных ( $a_1 = a_2 = 10$  мкм, левый график) и отличающихся радиусов ( $a_1 = 1$  мкм,  $a_2 = 10$  мкм, правый график) как функции межчастичного расстояния  $L$ . Символы 1, 5, 9 – результат решения системы (2.14), (2.15) при  $n_{\max} = 500$ , сплошные линии 2, 6, 10 – данные, полученные в бисферических координатах [11; 12]. Результаты расчетов по приближенным (2.20) и асимптотическим формулам (2.21) обозначены, соответственно, пунктирными линиями 3, 7, 11 и символами 4, 8, 12.

видно из рисунка 2.2, области применимости асимптотических формул (2.21) и приближенных выражений (2.20) не перекрываются. Для осуществления перехода из одной области в другую вводится функция  $f(L)$ , с помощью которой сшитые емкостные коэффициенты записываются как

$$C_{ij} = C_{\text{as},ij} f + C_{\text{a},ij} (1 - f). \quad (2.22)$$

В данной работе использовалась функция

$$f(L) = \exp \left[ -\frac{4L(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} \right]. \quad (2.23)$$

На рисунке 2.3 зависимости потенциала взаимодействия  $U$  от расстояния между поверхностями частиц  $L$ , полученные из сшитых емкостных коэффициентов (2.22), сравнены с результатами расчетов с использованием коэффициентов, вычисленных в бисферических координатах [11; 12], и с приближенной формулой (2.19). В случае постоянных потенциалов мы положили  $\phi_{1s} = \phi_{2s}$ , а при постоянных зарядах  $q_1 = a_1 \phi_{s0}$ ,  $q_2 = a_2 \phi_{s0}$ , так что  $q_i \propto a_i$  (здесь  $\phi_{s0}$  – потенциал уединенной макрочастицы). На рисунке также заметна область притяжения частиц разных радиусов в случае не зависящих от расстояния зарядов на них [9; 16].

Видно, что в области  $L \sim \min(a_1, a_2)$  расхождение с расчетами в бисферических координатах заметно, но не превышает 3% при постоянных зарядах (см. рисунок 2.4а) и 1% в случае постоянных потенциалов поверхностей (рис. 2.4б). Формула (2.19), как видно из рисунка 2.3, обнаруживает хорошее соответствие с кривыми 1 и 2 при близких радиусах, однако для сильно отличающихся макрочастиц на малых расстояниях согласие заметно ухудшается. Относительные ошибки вычислений потенциала взаимодействия показаны на рисунке 2.4. В качестве отсчетных величин приняты результаты, полученные в бисферической системе координат с точностью в 12 знаков. Видно, что в случае постоянных зарядов величина ошибки нарастает с уменьшением радиуса меньшей макрочастицы и достигает максимального значения при десятикратном отличии в радиусах. При постоянных потенциалах поверхностей, напротив, с уменьшением  $a_1$  наблюдается падение ошибки от 1% в случае одинаковых частиц до 0.2% при  $a_1 = 0.1a_2$ . Также стоит отметить систематический характер отклонений полученных результатов от точных значений, что указывает на принципиаль-



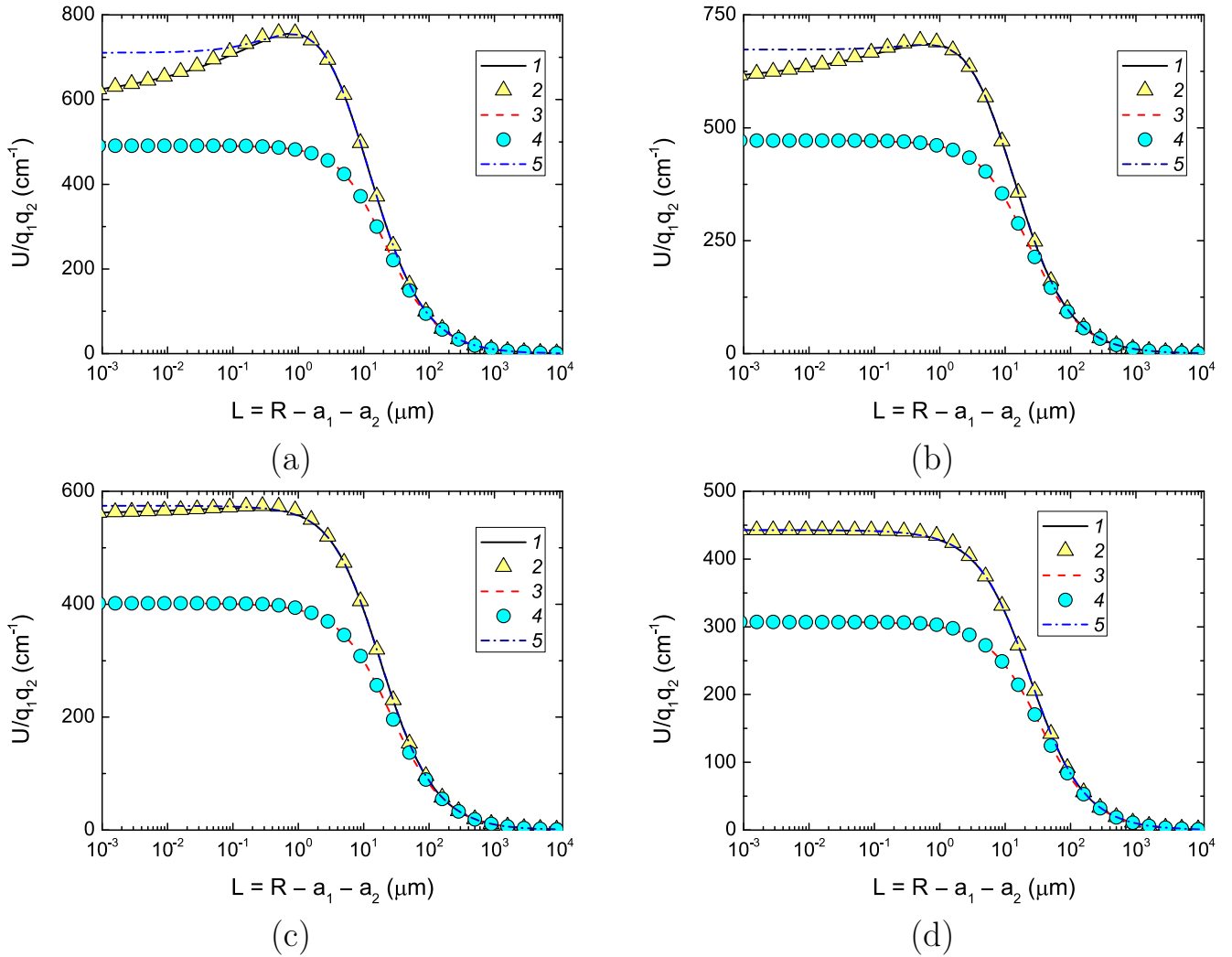


Рисунок 2.3 — Потенциал взаимодействия как функция межчастичного расстояния при различных отношениях радиусов частиц:  $a_2/a_1 = 10$  (а),  $a_2/a_1 = 5$  (б),  $a_2/a_1 = 2$  (в) и  $a_2/a_1 = 1$  (д); при этом  $a_2 = 10$  мкм во всех случаях. Сплошные кривые 1 и символы 2 рассчитаны для случая постоянных зарядов согласно (2.17) с использованием емкостных коэффициентов, полученных соответственно в бисферических координатах [11; 12] и сшитых по формуле (2.22); данные для постоянных потенциалов (2.16) представлены аналогично пунктирными кривыми 3 и символами 4. Штрихпунктирные линии 5 получены с использованием формулы (2.19) для постоянных зарядов макрочастиц.

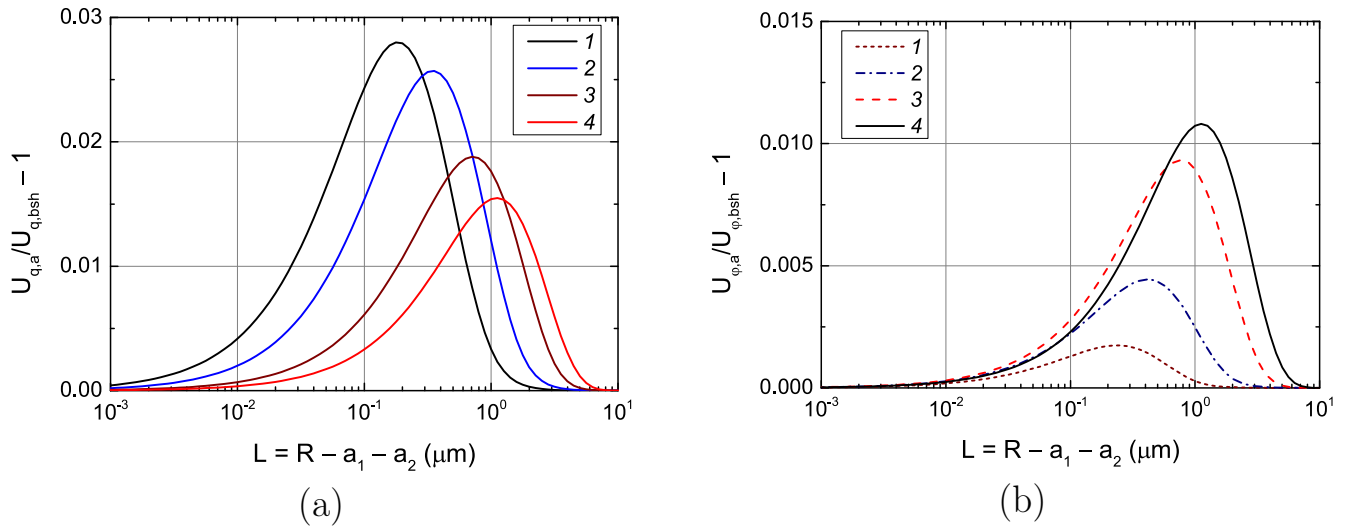


Рисунок 2.4 — Отклонения результатов вычисления потенциала взаимодействия с использованием емкостных коэффициентов, полученных сшивкой ( $U_{q,a}$  и  $U_{\phi,a}$ ) относительно рассчитанного в бисферической системе координат ( $U_{q,bs}$  и  $U_{\phi,bs}$ ) при постоянных зарядах (а) и постоянных потенциалах (б). Кривые 1 получены для  $a_1 = 1$  мкм, 2 для  $a_1 = 2$  мкм, 3 —  $a_1 = 5$  мкм и 4 —  $a_1 = 10$  мкм при  $a_2 = 10$  мкм во всех случаях.

ную возможность уменьшения ошибки при более подходящем выборе функции сшивки  $f(L)$ ; однако такая функция представляла бы более сложную зависимость от размеров макрочастиц и имела бы более громоздкий вид, чем (2.23).

## Глава 3. Взаимодействие двух диэлектрических шаров и точечного заряда

### 3.1 Электростатический потенциал и поверхностная плотность заряда

#### 3.1.1 Распределение потенциала в случае диэлектрических частиц

В этой главе мы будем исследовать взаимодействие трех заряженных частиц, две из которых по-прежнему являются сферическими, но, в отличие от предыдущей главы, имеют конечные диэлектрические проницаемости, а третья является точечной. В общем случае задача теперь не является аксиально-симметричной, однако имеет место симметрия относительно плоскости  $xz$ , которую мы провели через третью частицу (см. рис. 3.1). Частицы находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\varepsilon$ , их полные заряды полагаются не зависящими от межчастичных расстояний и равными  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_0$ . Положение точечного заряда  $q_0$  в системах координат, связанных с первым и вторым шаром, задается тройками  $(R_1, \theta_{01}, 0)$  и  $(R_2, \theta_{02}, 0)$ , соответственно; положение точки наблюдения  $P$  относительно него определяется вектором  $\mathbf{r}_0$ , из центра первого шара он виден под углом  $\gamma$ . Отметим, что поскольку система координат с началом в центре второй частицы получена сдвигом системы координат, связанной с первой, на  $R$  вдоль оси  $z$  без изменения ориентации осей, то  $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$ .

Аналогично проделанному в предыдущем разделе, запишем разложение потенциалов шаров во внешнем пространстве в собственной и взаимной системах координат. В силу симметрии ненулевыми могут быть только коэффициенты при функциях, четных по азимутальному углу, то есть пропорциональных  $\cos m\varphi$  (см. формулы в начале второй главы). В этой главе нам будет удобнее пользоваться отдельными обозначениями для коэффициентов, с которыми потенциал  $i$ -ой частицы ( $i = 1, 2$ ) представляется в переменных, связанных с  $j$ -ой ( $j = 3-i$ ). На систему координат, в которой произведено разложение, указывает второй нижний индекс:

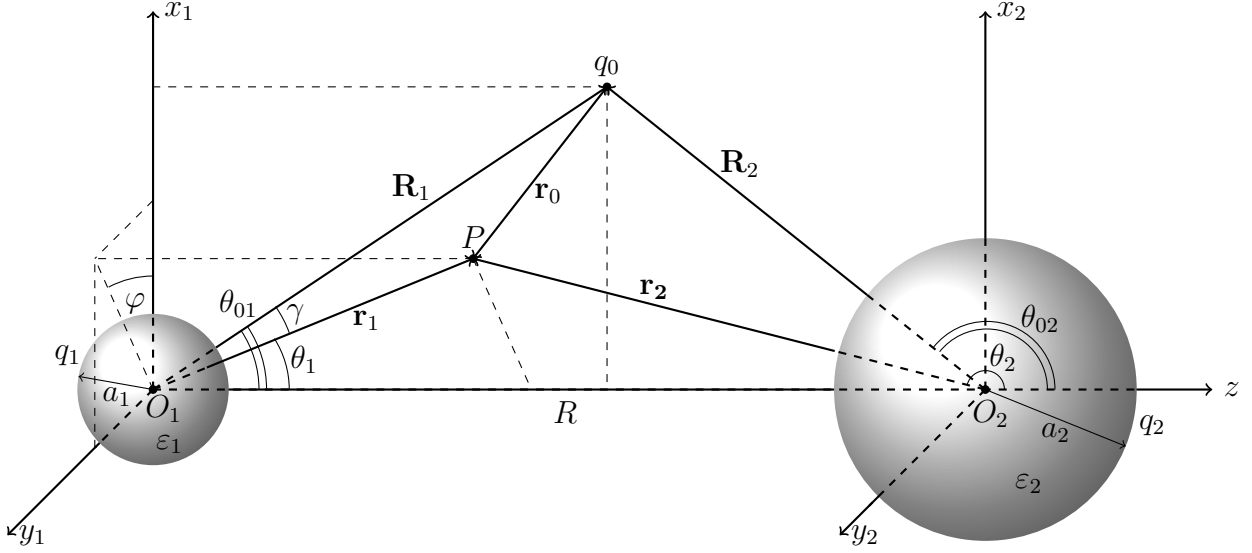


Рисунок 3.1 — Геометрия задачи о взаимодействии двух сферических частиц с точечной.

$$\phi_1 = \sum_{n,m} A_{n,1}^m r_1^{-n-1} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \sum_{n,m} A_{n,2}^m r_2^n P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi, \quad (3.1)$$

$$\phi_2 = \sum_{n,m} B_{n,2}^m r_2^{-n-1} P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi = \sum_{n,m} B_{n,1}^m r_1^n P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi. \quad (3.2)$$

Здесь и далее, если не оговорено иное, сумма с нижним индексом  $n, m$  подразумевает двойное суммирование в пределах  $m = \overline{0, n}$  и  $n = \overline{0, \infty}$ . Переразложение потенциалов во взаимных системах координат (вторые равенства в (3.1), (3.2)) произведено согласно формулам ( $r_i < R$ )

$$\frac{P_n^m(\mu_1)}{r_1^{n+1}} = \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-m} (n+k)!}{(n-m)! (k+m)!} \left(\frac{r_2}{R}\right)^k P_k^m(\mu_2),$$

$$\frac{P_n^m(\mu_2)}{r_2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-m}}{R^{n+1}} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n-m)! (k+m)!} \left(\frac{r_1}{R}\right)^k P_k^m(\mu_1),$$

являющимся обобщением (2.5), (2.6). В соответствии с ними, коэффициенты переразложения выражаются через коэффициенты разложения в собственных системах координат следующим образом:

$$A_{n,2}^m = \frac{1}{R^n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} (k+n)!}{(k-m)! (n+m)!} \frac{A_{k,1}^m}{R^{k+1}}, \quad B_{n,1}^m = \frac{1}{R^n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-m} (k+n)!}{(k-m)! (n+m)!} \frac{B_{k,2}^m}{R^{k+1}}. \quad (3.3)$$

Обратимся теперь к потенциалу, создаваемому точечной частицей. Его величина спадает обратно пропорционально расстоянию от заряда до точки наблюдения  $r_0$ ; поскольку

$$r_0 = \sqrt{R_1^2 + r_1^2 - 2R_1r_1 \cos \gamma} = R_1 \sqrt{1 - 2(r_1/R_1) \cos \gamma + (r_1/R_1)^2},$$

при  $r_1 < R_1$  мы можем воспользоваться производящей функцией полиномов Лежандра [31]:

$$\left[ 1 - 2\frac{r_1}{R_1} \cos \gamma + \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^n P_n(\nu), \quad (3.4)$$

где

$$\nu = \cos \gamma = \cos \theta_{01} \cos \theta_1 + \sin \theta_{01} \sin \theta_1 \cos \varphi.$$

Согласно теореме сложения [41],

$$P_n(\nu) = \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \quad (3.5)$$

так что мы можем записать разложение потенциала  $\phi_0$  в системе координат с началом в центре первой сферы в нужном нам виде:

$$\phi_0(r_1, \mu_1, \varphi) = \sum_{n,m} C_{n,1}^m r_1^n P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \quad (3.6)$$

причем

$$C_{n,1}^m = \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{q_0}{\varepsilon R_1^{n+1}} P_n^m(\mu_{01}). \quad (3.7)$$

Аналогично получаем разложение во второй системе координат:

$$\phi_0(r_2, \mu_2, \varphi) = \sum_{n,m} C_{n,2}^m r_2^n P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi, \quad C_{n,2}^m = \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{q_0}{\varepsilon R_2^{n+1}} P_n^m(\mu_{02}), \quad (3.8)$$

где координаты  $(R_2, \mu_{02})$ , задающие положение точечного заряда относительно второй макрочастицы, связаны с  $(R_1, \mu_{01})$  как

$$R_2^2 = R_1^2 + R^2 - 2R_1R\mu_{01}, \quad R_1\mu_{01} - R_2\mu_{02} = R.$$

Полученные представления потенциалов каждой из трех частиц (3.1), (3.2), (3.6), (3.8) позволяют записать полный потенциал системы во внешнем пространстве, выраженный в нужных переменных. Кратко его можно записать в следующем виде ( $i = 1, 2$ ):

$$\phi(r_i, \mu_i, \varphi) = \sum_{n,m} D_{n,i}^m(r_i) P_n^m(\mu_i) \cos m\varphi, \quad (3.9)$$

где

$$D_{n,1}^m(r_1) = \frac{A_{n,1}^m}{r_1^{n+1}} + B_{n,1}^m r_1^n + C_{n,1}^m r_1^n, \quad D_{n,2}^m(r_2) = A_{n,2}^m r_2^n + \frac{B_{n,2}^m}{r_2^{n+1}} + C_{n,2}^m r_2^n. \quad (3.10)$$

В случае диэлектрического материала сферических частиц следует также рассмотреть распределение потенциала в объеме, занятом ими. В силу конечности потенциала его разложение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_I(r_1, \mu_1, \varphi) &= \sum_{n,m} \alpha_n^m r_1^n P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \\ \phi_{II}(r_2, \mu_2, \varphi) &= \sum_{n,m} \beta_n^m r_2^n P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

На поверхностях диэлектрических частиц внешний (3.9) и внутренний (3.11) потенциалы должны удовлетворять граничным условиям (1.1). Мы ограничимся простейшим случаем равномерного распределения свободного заряда  $\sigma_{i,f} = q_i/4\pi a_i^2$ , так что подстановка нулевой гармоники во вторую пару граничных условий приводит к результату, аналогичному (2.11):

$$A_{0,1}^0 = q_1/\varepsilon, \quad B_{0,2}^0 = q_2/\varepsilon. \quad (3.12)$$

Для краткой записи разложения производной потенциала введем обозначения, аналогичные (3.10):

$$\begin{aligned} E_{n,1}^m(r_1) &= -(n+1) \frac{A_{n,1}^m}{r_1^{n+1}} + nB_{n,1}^m r_1^n + nC_{n,1}^m r_1^n, \\ E_{n,2}^m(r_2) &= nA_{n,2}^m r_2^n - (n+1) \frac{B_{n,2}^m}{r_2^{n+1}} + nC_{n,2}^m r_2^n, \end{aligned} \quad (3.13)$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \phi(r_i, \mu_i, \varphi) = \frac{1}{r_i} \sum_{n,m} E_{n,i}^m(r_i) P_n^m(\mu_i) \cos m\varphi. \quad (3.14)$$

Тогда при  $n \geq 1$  первая и вторая пара граничных условий (1.1) дает

$$\begin{aligned} \alpha_n^m a_1^n - D_{n,1}^m(a_1) &= 0, & \beta_n^m a_2^n - D_{n,2}^m(a_2) &= 0, \\ \varepsilon_1 n \alpha_n^m a_1^n - \varepsilon E_{n,1}^m(a_1) &= 0; & \varepsilon_2 n \beta_n^m a_2^n - \varepsilon E_{n,2}^m(a_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

откуда после исключения коэффициентов  $\alpha_n^m, \beta_n^m$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,1}^m}{a_1^{n+1}} + \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} (B_{n,1}^m + C_{n,1}^m) a_1^n &= 0, \\ \frac{n(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{n\varepsilon_2 + (n+1)\varepsilon} (A_{n,2}^m + C_{n,2}^m) a_2^n + \frac{B_{n,2}^m}{a_2^{n+1}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку коэффициенты  $C_{n,i}^m$  целиком определяются величиной и положением точечного заряда, с помощью (3.3) из системы (3.16) можно найти коэффициенты разложения  $A_{n,1}^m, B_{n,2}^m$  потенциалов шаров в собственных системах координат.

### 3.1.2 Плотность связанных зарядов на сферических поверхностях

Как обсуждалось во введении к данной работе, одноименно заряженные тела на близких расстояниях могут испытывать притяжение вследствие взаимного перераспределения заряда на их поверхностях. При этом вклад в отталкивание всегда дает свободный заряд, распределение которого  $\sigma_{i,f}$  ( $i = 1, 2$ ) мы считаем равномерным. Получим выражение для плотности связанных зарядов  $\sigma_{i,b} = \sigma_i - \sigma_{i,f}$ , возмущение которой может вызвать притяжение. Плотность полного заряда  $\sigma_i$  на поверхности диэлектрика определяется скачком напряженности электрического поля:

$$\left. \frac{\partial \phi_{\text{I}}}{\partial r_1} \right|_{r_1=a_1} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r_1} \right|_{r_1=a_1} = \frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon}, \quad \left. \frac{\partial \phi_{\text{II}}}{\partial r_2} \right|_{r_2=a_2} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r_2} \right|_{r_2=a_2} = \frac{4\pi\sigma_2}{\varepsilon}.$$

Тогда с учетом второй пары граничных условий (1.1) находим:

$$\sigma_{1,b} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4\pi} \left. \frac{\partial \phi_I}{\partial r_1} \right|_{r_1=a_1} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} n \alpha_n^m a_1^{n-1} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi,$$

$$\sigma_{2,b} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{4\pi} \left. \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r_2} \right|_{r_2=a_2} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} n \beta_n^m a_2^{n-1} P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi,$$

откуда легко прийти к следующим компактным выражениям:

$$\sigma_{1,b} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \frac{A_{n,1}^m}{a_1^{n+2}} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{2,b} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \frac{B_{n,2}^m}{a_2^{n+2}} P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi. \quad (3.18)$$

В дальнейшем, однако, нам будет удобнее пользоваться другой формой записи. Подставив в (3.17)  $A_{n,1}^m$  из первого уравнения системы (3.16), а в (3.18) –  $B_{n,2}^m$  из второго, получаем:

$$\sigma_{1,b} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} \frac{n(2n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} (B_{n,1}^m + C_{n,1}^m) a_1^{n-1} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \quad (3.19)$$

$$\sigma_{2,b} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} \frac{n(2n+1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{n\varepsilon_2 + (n+1)\varepsilon} (A_{n,2}^m + C_{n,2}^m) a_2^{n-1} P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi. \quad (3.20)$$

Здесь, благодаря множителю  $n$  в общем члене ряда, мы можем воспользоваться краткой записью для двойной суммы, учитывающей нулевую гармонику. Отметим, что полученные выражения позволяют разделить вклады соседних частиц – сферической и точечной – в плотность заряда на рассматриваемой макрочастице. В дальнейшем на то, влияние какой из частиц описывает та или иная величина, будет указывать ее верхний индекс.



## 3.2 Силы взаимодействия частиц

### 3.2.1 Точечный заряд в поле макрочастиц

В предыдущих разделах мы показали, как может быть найдено пространственное распределение электростатического потенциала, создаваемого системой из двух частиц конечного размера и одной точечной. С его помощью мы, в частности, могли бы вычислить кулоновскую силу, действующую на точечный заряд со стороны электрического поля заряженных макрочастиц. Однако использование формул (3.9) (за вычетом вклада точечной частицы) для нахождения поля, действующего на заряд  $q_0$ , невыгодно, поскольку они имеют смысл только при  $r_i < R$ , что накладывает ограничения на положение точечного заряда:  $\min(R_1, R_2) < R$ . Целесообразнее представить искомую силу как сумму двух условно независимых составляющих:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathbf{F}_0^{(1)} + \mathbf{F}_0^{(2)} = -q_0 \nabla \phi_1|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1} - q_0 \nabla \phi_2|_{\mathbf{r}_2=\mathbf{R}_2} = \\ &= -q_0 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r_1 \sin \theta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \Big|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1} - \\ &\quad - q_0 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial r_2} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r_2 \sin \theta_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right) \Big|_{\mathbf{r}_2=\mathbf{R}_2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь мы использовали покомпонентное представление оператора набла в сферических координатах.

Выпишем единичные векторы  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (3.22)$$

С помощью выписанных равенств мы можем найти проекции силы по каждому из трех направлений. Вычислим сперва  $z$ -компоненту силы  $\mathbf{F}_0^{(1)}$ , действующей со стороны первой макрочастицы. После подстановки потенциала (3.1) в коор-

динахах  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  получаем:

$$\begin{aligned} F_{0z}^{(1)} &= \left( \mathbf{F}_0^{(1)}, \mathbf{e}_z \right) = -q_0 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \right) \Big|_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1} = \\ &= q_0 \sum_{n,m} \frac{A_{n,1}^m}{R_1^{n+2}} \left[ (n+1) \mu_{01} P_n^m(\mu_{01}) + \sqrt{1 - \mu_{01}^2} \frac{\partial P_n^m(\mu_{01})}{\partial \theta_1} \right]. \end{aligned}$$

Упростив выражение в скобках с помощью формулы (А.18) Приложения, найдем:

$$F_{0z}^{(1)} = q_0 \sum_{n,m} \frac{A_{n,1}^m}{R_1^{n+2}} (n-m+1) P_{n+1}^m(\mu_{01}).$$

Выразив  $P_n^m(\mu_{01})$  через  $C_{n,1}^m$  согласно (3.7), можно привести этот результат к виду

$$F_{0z}^{(1)} = \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0} (n+m+1)!}{2 (n-m)!} A_{n,1}^m C_{n+1,1}^m. \quad (3.23)$$

Ясно, что  $z$ -проекция силы взаимодействия точечного заряда и второй макро-частицы находится аналогично из потенциала (3.2) с использованием (3.8). В итоге для полной силы, действующей на точечную частицу в направлении оси  $z$ , получаем:

$$F_{0z} = \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0} (n+m+1)!}{2 (n-m)!} (A_{n,1}^m C_{n+1,1}^m + B_{n,2}^m C_{n+1,2}^m). \quad (3.24)$$

Найдем теперь составляющую силы вдоль оси  $x$ . Имеем:

$$\begin{aligned} F_{0x}^{(1)} &= \left( \mathbf{F}_0^{(1)}, \mathbf{e}_x \right) = \\ &= -q_0 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} \sin \theta_1 \cos \varphi + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \cos \theta_1 \cos \varphi - \frac{1}{r_1 \sin \theta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \Big|_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1} = \\ &= q_0 \sum_{n,m} \frac{A_{n,1}^m}{R_1^{n+2}} \left[ (n+1) \sqrt{1 - \mu_{01}^2} P_n^m(\mu_{01}) - \mu_{01} \frac{\partial P_n^m(\mu_{01})}{\partial \theta_1} \right]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать, воспользовавшись формулами (А.19), (А.20) Приложения. Если условиться считать, что присоединенные функции Лежандра с отрицательным верхним индексом тождественно

равны нулю, эти формулы можно объединить и записать в виде ( $m = \overline{0, n}$ ):

$$(n+1) \sqrt{1-\mu^2} P_n^m - \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{1+\delta_{m0}}{2} [P_{n+1}^{m+1} - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}].$$

Тогда

$$F_{0x}^{(1)} = q_0 \sum_{n,m} \frac{1+\delta_{m0}}{2} \frac{A_{n,1}^m}{R_1^{n+2}} [P_{n+1}^{m+1}(\mu_{01}) - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\mu_{01})].$$

Наконец, воспользовавшись определением коэффициентов  $C_{n,1}^m$ , после сдвига индексов находим:

$$F_{0x}^{(1)} = \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1+\delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} (A_{n,1}^m C_{n+1,1}^{m+1} - A_{n+1,1}^{m+1} C_{n+2,1}^m). \quad (3.25)$$

Для вклада второй сферической частицы имеет место аналогичная формула. Таким образом,  $x$ -проекция полной силы равна

$$F_{0x} = \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1+\delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\ \times (A_{n,1}^m C_{n+1,1}^{m+1} - A_{n+1,1}^{m+1} C_{n+2,1}^m + B_{n,2}^m C_{n+1,2}^{m+1} - B_{n+1,2}^{m+1} C_{n+2,2}^m). \quad (3.26)$$

Из геометрии задачи ясно, что силы взаимодействия частиц должны лежать в плоскости симметрии ( $x, z$ ). Действительно, составляющая  $F_{0y}$  силы, действующей на точечный заряд, согласно (3.21) и (3.22) содержит множитель  $\sin \varphi$  во вкладах, соответствующих первым двум компонентам градиента, и ряд с общим членом, пропорциональным  $\sin m\varphi$ , во вкладе от третьей компоненты. Ясно, что при  $\varphi = 0$  это дает ноль.

### 3.2.2 Силы, действующие на сферические частицы

Перейдем к вычислению силы, действующей на первую из двух диэлектрических макрочастиц. На элемент поверхности частицы действует сила, опреде-

ляемая максвелловским тензором напряжений [39]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ (\mathbf{n}, \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n} \right] \Big|_{r_1=a_1} = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) \mathbf{e}_r + E_r E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_r E_\varphi \mathbf{e}_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля, компоненты которого в сферических координатах на границе первой сферы имеют вид:

$$\begin{aligned} E_r &= - \frac{\partial \phi}{\partial r_1} \Big|_{r_1=a_1} = - \frac{1}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n E_n^m P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \\ E_\theta &= - \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} \Big|_{r_1=a_1} = - \frac{1}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_n^m \frac{\partial P_n^m(\mu_1)}{\partial \theta_1} \cos m\varphi, \\ E_\varphi &= - \frac{1}{r_1 \sin \theta_1} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \Big|_{r_1=a_1} = \frac{1}{a_1 \sin \theta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_n^m P_n^m(\mu_1) m \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $D_n^m = D_{n,1}^m(a_1)$ ,  $E_n^m = E_{n,1}^m(a_1)$  (см. определения (3.10) и (3.13)).

Согласно (3.22) и (3.27),  $z$ -проекция силы, действующей на элемент поверхности первого диэлектрического шара, равна

$$f_{1z} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) \cos \theta_1 - E_r E_\theta \sin \theta_1 \right].$$

Интегральную силу представим в виде

$$F_{1z} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (I_1 - I_2 - I_3), \quad (3.29)$$

где

$$I_1 = a_1^2 \int_{S_1} E_r^2 \cos \theta d\Omega, \quad I_2 = a_1^2 \int_{S_1} (E_\theta^2 + E_\varphi^2) \cos \theta d\Omega, \quad I_3 = 2a_1^2 \int_{S_1} E_r E_\theta \sin \theta d\Omega;$$

здесь  $S_1$  указывает на поверхность первой частицы, через  $\Omega$  обозначен телесный угол. Кроме того, выше и в последующих выкладках мы для краткости не пишем индекс у переменных  $\theta_1$  и  $\mu_1$  и не указываем аргумент функций Лежандра, всюду полагая его равным  $\mu_1$ .

Отметим, что интеграл  $I_1$  дает силу, действующую на проводник, так как в этом случае компоненты  $E_\theta$  и  $E_\varphi$  были бы равны нулю. Вычислим его:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu \left( \sum_{n,m} E_n^m P_n^m \cos m\varphi \sum_{l,k} E_l^k P_l^k \cos k\varphi \right) d\mu d\varphi = \\
&= \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} E_l^k \int_{-1}^1 \mu P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi = \\
&\stackrel{(1)}{=} \pi \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) E_n^m \sum_l E_l^m \int_{-1}^1 \mu P_n^m P_l^m d\mu = \\
&\stackrel{(2)}{=} 4\pi \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} E_n^m E_{n+1}^m.
\end{aligned}$$

Равенство (1) получено из симметричности выражения в его левой части (в частности, использованной здесь формулы (A.1) из Приложения) относительно перестановки индексов  $n$  и  $l$ . Переход (2) осуществлен с использованием интеграла (A.22). Также здесь и далее, если не оговорено иное, сумма с двойным нижним индексом  $n, m$  подразумевает двойное суммирование в пределах  $m = \overline{0, n}$  и  $n = \overline{0, \infty}$ .

Для вычисления второго интеграла воспользуемся тригонометрическими соотношениями (A.1), (A.2) и формулой (A.23):

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu \left( \sum_{n,m} D_n^m \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos m\varphi \sum_{l,k} D_l^k \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} \cos k\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n,m} D_n^m P_n^m m \sin m\varphi \sum_{l,k} D_l^k P_l^k k \sin k\varphi \right) d\mu d\varphi = \\
&= \sum_{n,m} D_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n,m} D_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \mu P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} m \sin m\varphi k \sin k\varphi d\varphi = \\
&= \pi \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) D_n^m \sum_l D_l^m \int_{-1}^1 \mu \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} + \frac{m^2}{1 - \mu^2} P_n^m P_l^m \right) d\mu = \\
&= 4\pi \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} n(n+2) D_n^m D_{n+1}^m.
\end{aligned}$$

Найдем последнее слагаемое (3.29):

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \left( \sum_{n,m} E_n^m P_n^m \cos m\varphi \sum_{l,k} D_l^k \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} \cos k\varphi \right) d\mu d\varphi = \\
&= 2 \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi = \\
&\stackrel{(A.1)}{=} 2\pi \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) E_n^m \sum_l D_l^m \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} d\mu = \\
&\stackrel{(A.24)}{=} -2\pi \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) \frac{2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} E_n^m D_{n+1}^m + \\
&\quad + 2\pi \sum_{l,m} (1 + \delta_{m0}) \frac{2l}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} E_{l+1}^m D_l^m = \\
&= 4\pi \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} [n E_{n+1}^m D_n^m - (n+2) E_n^m D_{n+1}^m].
\end{aligned}$$

Здесь уже подынтегральная функция не является симметричной относительно перестановки индексов, поэтому финальное выражение состоит из двух слагаемых.

Полученные выражения для  $I_1, I_2$  и  $I_3$  отличаются только множителями, стоящими после факториалов. После подстановки найденных интегралов в (3.29), приходим к следующей комбинации:

$$\begin{aligned}
E_n^m E_{n+1}^m - n(n+2) D_n^m D_{n+1}^m - n E_{n+1}^m D_n^m + (n+2) E_n^m D_{n+1}^m &= \\
&= (E_n^m - n D_n^m) (E_{n+1}^m + (n+2) D_{n+1}^m).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись определением введенных коэффициентов (3.10), (3.13), после приведения подобных слагаемых получаем:

$$F_{1z} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} A_{n,1}^m (B_{n+1,1}^m + C_{n+1,1}^m). \quad (3.30)$$

Заметим, что если раскрыть скобки и записать  $F_{1z}$  как сумму двух рядов, то второй из них, отвечающий за взаимодействие с точечной частицей, окажется

равным взятой с обратным знаком силе  $F_{0z}^{(1)}$  в виде (3.23) – как и должно быть согласно третьему закону Ньютона.

Перейдем к вычислению  $x$ -проекции силы, действующей на первую диэлектрическую частицу. Для элементарной силы имеем:

$$f_{1x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_x) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) \sin \theta \cos \varphi + E_r E_\theta \cos \theta \cos \varphi - E_r E_\varphi \sin \varphi \right].$$

Полную силу снова представим как сумму вспомогательных интегралов:

$$F_{1x} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (I_1 - I_2 - I_3), \quad (3.31)$$

где

$$I_1 = a_1^2 \int_{\check{S}_1} E_r^2 \sin \theta \cos \varphi d\Omega, \quad I_2 = a_1^2 \int_{\check{S}_1} (E_\theta^2 + E_\varphi^2) \sin \theta \cos \varphi d\Omega,$$

$$I_3 = 2a_1^2 \int_{\check{S}_1} (-E_r E_\theta \cos \theta \cos \varphi + E_r E_\varphi \sin \varphi) d\Omega.$$



Вклад от первого члена совпадает с силой  $F_{1x}$ , действующей на проводник:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \left( \sum_{n,m} E_n^m P_n^m \cos m\varphi \sum_{l,k} E_l^k P_l^k \cos k\varphi \right) d\mu \cos \varphi d\varphi = \\
&= \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} E_l^k \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&\stackrel{(A.3)}{=} \pi \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) E_n^m \sum_l E_l^{m+1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} d\mu = \\
&\stackrel{(A.25)}{=} \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{m0}) \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} E_n^m E_{n+1}^{m+1} - \\
&- \pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+1} (1 + \delta_{m0}) \frac{2}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} E_{l+1}^m E_l^{m+1} = \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \times \\
&\quad \times \left[ (n+m+2) E_n^m E_{n+1}^{m+1} - (n-m) E_{n+1}^m E_n^{m+1} \right].
\end{aligned}$$

При подстановке интеграла (A.3) мы снова воспользовались симметричностью преобразуемого выражения относительно одновременной перестановки  $n \leftrightarrow l$  и  $m \leftrightarrow k$ .

Вычислим второй член. С помощью тождеств (A.3), (A.4) и (A.26) получим:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \left( \sum_{n,m} D_n^m \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos m\varphi \sum_{l,k} D_l^k \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} \cos k\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n,m} D_n^m P_n^m m \sin m\varphi \sum_{l,k} D_l^k P_l^k k \sin k\varphi \right) d\mu \cos \varphi d\varphi = \\
&= \sum_{n,m} D_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi + \\
&\quad + \sum_{n,m} D_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} m \sin m\varphi k \sin k\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \pi \sum_{n,m} (1+\delta_{m0}) D_n^m \sum_l D_l^{m+1} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{m(m+1)}{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} \right) d\mu = \\
&= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1+\delta_{m0}) \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} D_n^m D_{n+1}^{m+1} - \\
&\quad - \pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+1} (1+\delta_{m0}) \frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} D_{l+1}^m D_l^{m+1} = \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1+\delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \times \\
&\quad \times n(n+2) [(n+m+2) D_n^m D_{n+1}^{m+1} - (n-m) D_{n+1}^m D_n^{m+1}].
\end{aligned}$$

Последний интеграл разобьем на два:

$$\begin{aligned}
I_3^{(1)} &= -2a_1^2 \int_{S_1} E_r E_\theta \cos \theta \cos \varphi d\Omega = \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mu \left( \sum_{n,m} E_n^m P_n^m \cos m\varphi \sum_{l,k} D_l^k \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} \cos k\varphi \right) d\mu \cos \varphi d\varphi = \\
&\stackrel{(A.3)}{=} -\pi \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 \mu P_n^m \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} d\mu - \\
&\quad - \pi \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 \mu P_n^{k+1} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3^{(2)} &= 2a_1^2 \int_{S_1} E_r E_\varphi \sin \varphi d\Omega = \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \sum_{n,m} E_n^m P_n^m \cos m\varphi \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l,k} D_l^k P_l^k k \sin k\varphi \right) d\mu \sin \varphi d\varphi = \\
&\stackrel{(A.5)}{=} -\pi \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{m+1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m P_l^{m+1} d\mu + \\
&\quad + \pi \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 \frac{k}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^{k+1} P_l^k d\mu.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\pi \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 P_n^m \left( \mu \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{m+1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^{m+1} \right) d\mu - \\
&\quad - \pi \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 P_n^{k+1} \left( \mu \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} - \frac{k}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^k \right) d\mu = \\
&= 2\pi \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \left[ - (n+2)(n+m+2) E_n^m D_{n+1}^{m+1} - \right. \\
&\quad \left. - n(n-m) E_{n+1}^m D_n^{m+1} + (n+2)(n-m) E_{n+1}^{m+1} D_{n+1}^m + n(n+m+2) E_{n+1}^{m+1} D_n^m \right].
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегралами (A.27) и (A.28).

Как и в случае с  $z$ -проекцией силы, найденные выражения для интегралов, входящих в (3.31), отличаются лишь последними множителями. Рассмотрев слагаемые в квадратных скобках, пропорциональные  $(n+m+2)$  и  $(n-m)$  по отдельности, легко привести подобные и прийти следующему выражению для искомой проекции силы:

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \times \\
&\quad \times \left\{ (n+m+2) (E_n^m - nD_n^m) [E_{n+1}^{m+1} + (n+2) D_{n+1}^{m+1}] - \right. \\
&\quad \left. - (n-m) (E_{n+1}^{m+1} - nD_n^{m+1}) [E_{n+1}^m + (n+2) D_{n+1}^m] \right\}.
\end{aligned}$$

После подстановки коэффициентов  $D_n^m$ ,  $E_n^m$  и сдвига индекса  $n$  получаем окончательно:

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\
&\quad \times \left[ A_{n,1}^m (B_{n+1,1}^{m+1} + C_{n+1,1}^{m+1}) - A_{n+1,1}^{m+1} (B_{n+2,1}^m + C_{n+2,1}^m) \right]. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Полученное выражение, как и в случае с  $z$ -компонентой, позволяет выделить вклад точечной частицы, который с точностью до знака совпадает с (3.25).

Проекция силы, действующей на второй шар, вычисляются совершенно аналогично, так что приведем соответствующие формулы без дополнительных

обоснований. Сила вдоль оси  $z$  равна

$$F_{2z} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} B_{n,2}^m (A_{n+1,2}^m + C_{n+1,2}^m), \quad (3.33)$$

а вдоль оси  $x$

$$F_{2x} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\ \times \left[ B_{n,2}^m (A_{n+1,2}^{m+1} + C_{n+1,2}^{m+1}) - B_{n+1,2}^{m+1} (A_{n+2,2}^m + C_{n+2,2}^m) \right]. \quad (3.34)$$

Как показывают расчеты, непосредственное использование полученных формул для плотности связанных зарядов (3.17), (3.19) и для проекций силы (3.30), (3.32) в области малых межчастичных расстояний приводит к расходимости. Особенно это заметно при визуализации распределения заряда по поверхности сферической частицы, где из-за близости точечного заряда и вызванного им дельтаобразного пика плотности на сферической поверхности возникают чередующиеся области противоположных знаков, тем более явные, чем меньше число учитываемых членов в рядах и чем мельче сетка. Для решения этой проблемы зададимся целью преобразовать ряды, содержащие коэффициенты разложения потенциала точечной частицы  $C_{n,i}^m$  ( $i = 1,2$ ), так чтобы под знаком суммы не оставалось медленно сходящихся выражений.

### 3.3 Момент силы

В ряде работ (см., например, [42—46]) было экспериментально обнаружено собственное вращение пылевых частиц в пылевой плазме. В работе [17] было показано, что к этому может приводить неоднородное распределения свободного заряда на поверхности пылевой частицы. Получим выражение для момента силы электростатического взаимодействия, действующей на первую частицу, в рассматриваемом случае равномерной зарядки макрочастиц, расположенных, однако, с нарушением аксиальной симметрии.

Момент силы, действующий на элемент поверхности первой частицы, определяется формулой

$$\mathbf{m}_1 = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1], \quad (3.35)$$

где  $\mathbf{f}_1$  – элементарная сила (3.27). Поскольку  $\mathbf{r}_1 = a_1 \mathbf{e}_r$ , выражение (3.35) после подстановки (3.27) принимает вид:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} E_r (E_\theta \mathbf{e}_\varphi - E_\varphi \mathbf{e}_\theta),$$

где компоненты электрического поля выражаются формулами (3.28). Пользуясь (3.22), запишем проекции элементарного момента на декартовы оси:

$$\begin{aligned} m_{1x} &= (\mathbf{m}_1, \mathbf{e}_x) = -\frac{\varepsilon a_1}{4\pi} E_r (E_\theta \sin \varphi + E_\varphi \cos \theta \cos \varphi), \\ m_{1y} &= (\mathbf{m}_1, \mathbf{e}_y) = \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} E_r (E_\theta \cos \varphi - E_\varphi \cos \theta \sin \varphi), \\ m_{1z} &= (\mathbf{m}_1, \mathbf{e}_z) = \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} E_r E_\varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Момент силы, действующей на частицу целиком, определяется интегралом от (3.35) по первой сферической поверхности. Из соображений симметрии ясно, что ненулевой может оказаться только проекция полного момента силы на ось  $y$ . Действительно, для  $z$ -компоненты будем иметь:

$$M_{1z} = -\frac{\varepsilon a_1}{4\pi} \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi k \sin k\varphi d\varphi = 0,$$

поскольку интеграл по азимутальному углу дает ноль, как и всякий интеграл такого вида с нечетным количеством синусов в подынтегральном выражении. Из этих же соображений получаем:

$$\begin{aligned} M_{1x} &= \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} D_l^k \left( - \int_{-1}^1 P_n^m \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi \sin \varphi d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \text{ctg } \theta P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi k \sin k\varphi \cos \varphi d\varphi \right) = 0. \end{aligned}$$

Для  $y$ -проекции имеем:

$$M_{1y} = \frac{\varepsilon a_1^3}{4\pi} \int_{S_1} (E_r E_\theta \cos \varphi - E_r E_\varphi \cos \theta \sin \varphi) d\Omega = \frac{\varepsilon a_1}{4\pi} (I_1 + I_2),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 P_n^m \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &\stackrel{(A.3)}{=} \frac{\pi}{2} \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 P_n^m \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} d\mu + \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 P_n^{k+1} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} d\mu \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n,m} E_n^m \sum_{l,k} D_l^k \int_{-1}^1 \operatorname{ctg} \theta P_n^m P_l^k d\mu \int_0^{2\pi} \cos m\varphi k \sin k\varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &\stackrel{(A.5)}{=} \frac{\pi}{2} \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 \frac{(m+1)\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m P_l^{m+1} d\mu - \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 \frac{k\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^{k+1} P_l^k d\mu. \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получаем:

$$\begin{aligned} M_{1y} &= \frac{\varepsilon a_1}{8} \sum_{n,m,l} (1 + \delta_{m0}) E_n^m D_l^{m+1} \int_{-1}^1 P_n^m \left( \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{(m+1)\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^{m+1} \right) d\mu + \\ &\quad + \frac{\varepsilon a_1}{8} \sum_{n,k,l} (1 + \delta_{k0}) E_n^{k+1} D_l^k \int_{-1}^1 P_n^{k+1} \left( \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} - \frac{k\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^k \right) d\mu = \\ &\stackrel{(A.29)}{=} \frac{\varepsilon a_1}{4} \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{2n+1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} (E_n^m D_n^{m+1} - E_n^{m+1} D_n^m). \end{aligned}$$

Перейдя к коэффициентам разложения потенциалов частиц в первой системе координат и сдвинув индекс  $n$ , приходим к окончательному выражению:

$$M_{1y} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n,m} (1 + \delta_{m0}) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\ \times \left[ A_{n+1,1}^{m+1} (B_{n+1,1}^m + C_{n+1,1}^m) - A_{n+1,1}^m (B_{n+1,1}^{m+1} + C_{n+1,1}^{m+1}) \right]. \quad (3.36)$$

Но поскольку первое уравнение системы на коэффициенты разложения (3.16)

$$\frac{A_{n,1}^m}{a_1^{n+1}} + \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} (B_{n,1}^m + C_{n,1}^m) a_1^n = 0$$

позволяет выразить  $A_{n,1}^m$  через сумму  $B_{n,1}^m + C_{n,1}^m$  независимо от индекса  $m$ , выражение в квадратных скобках (3.36) обращается в нуль для любой пары индексов  $n, m$ . Поэтому проекция  $M_{1y}$  также оказывается нулевой.

### 3.4 Улучшение сходимости выражений, описывающих влияние точечной частицы

#### 3.4.1 Поверхностная плотность заряда

Рассмотрим вклад третьей частицы в плотность связанных зарядов на поверхности первого диэлектрического шара. Согласно (3.19), с учетом определения коэффициентов  $C_{n,1}^m$  (3.7), запишем:

$$\sigma_{1,b}^{(0)} = -\frac{q_0}{4\pi a_1 R_1} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)! n(2n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(n+m)! n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \times \\ \times t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi, \quad (3.37)$$

где мы ввели обозначение  $t = a_1/R_1$ . Напомним, что верхний индекс указывает на то, влияние какой из частиц описывает данная величина.



Отметим сходство (3.37) со следующим представлением дельта-функции [41]:

$$\delta(\mu_{01} - \mu_1) \delta(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) \times \\ \times P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi; \quad (3.38)$$

оно указывает, что при  $t \rightarrow 1$  (т.е.  $L_1 = R_1 - a_1 \rightarrow 0$ ) и при  $n \rightarrow \infty$ , когда

$$\frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} + r_n^{(1)}, \quad r_n^{(1)} \rightarrow 0, \quad (3.39)$$

распределение (3.37) соответствует действию отрицательного точечного заряда с абсолютной величиной

$$q_{01} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{a_1}{R_1} q_0, \quad (3.40)$$

расположенного на поверхности марочастицы и имеющего угловые координаты  $(\theta_{01}, 0)$ . В дальнейшем мы получим этот же результат более строго.

Для повышения порядка малости общего члена ряда, входящего в выражение для плотности заряда (3.37), воспользуемся разложением (3.39), для чего найдем остаточный член:

$$r_n^{(1)} = \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon}.$$

Легко видеть, что он убывает с ростом  $n$  на порядок быстрее, чем левая часть (3.39). Ряд, соответствующий ведущему члену разложения, найдем с помощью комбинации производящей функции полиномов Лежандра (3.4) и теоремы сложения для сферических функций (3.5):

$$(1 - 2t\nu + t^2)^{-1/2} = \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi; \quad (3.41)$$

это равенство уже было нам полезно в разделе 3.1.1 при разложении потенциала точечной частицы. Из него нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ = 2t^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^{n+1/2} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ = 2t^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} - 2\nu + t \right)^{-1/2} = \frac{1-t^2}{(1-2t\nu+t^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{1,b}^{(0)} = \frac{q_{01}}{4\pi a_1^2} \left[ -\frac{1-t^2}{(1-2t\nu+t^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(2n+1)\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi \right], \quad (3.42) \end{aligned}$$

где  $q_{01}$  определяется равенством (3.40). Заметим, что при  $\nu = 1$  по мере приближения точечной частицы к поверхности сферической знаменатель первого слагаемого в квадратных скобках стремится к нулю на два порядка быстрее, чем выражение в числителе. Как показывают расчеты, после выделения этой сингулярности ряд в последнем слагаемом сходится достаточно быстро; это преимущество будет продемонстрировано позднее.

Уточним разложение (3.39), для чего представим множитель, входящий в общий член ряда (3.42), в виде

$$\frac{(2n+1)\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} = \frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x}, \quad x = \frac{1}{n+1},$$

и разложим его по степеням  $x$  в окрестности  $x = 0$ . Если ограничиться нулевым приближением, будем иметь:

$$\frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x} = \left[ \frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x} \right] \Big|_{x=0} + r_n^{(2)} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} + r_n^{(2)}, \quad (3.43)$$

причем остаточный член равен

$$r_n^{(2)} = \frac{(2n+1)\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon}.$$

В нулевом по  $x$  приближении ряд в (3.42) легко суммируется по формуле (3.41):

$$\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\nu + t^2}},$$

что позволяет написать следующее выражение для плотности:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,b}^{(0)} = & \frac{q_{01}}{4\pi a_1^2} \left[ -\frac{1-t^2}{(1-2t\nu+t^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-2t\nu+t^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Отметим более быстрое стремление общего члена полученного ряда к нулю в сравнении с (3.42). Усилим результат, увеличив порядок разложения (3.43):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x} = & \left[ \frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x} \right] \Big|_{x=0} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\varepsilon(2-x)}{\varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 x} \right] \Big|_{x=0} x + r_n^{(3)} = \\ = & \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2} \frac{1}{n+1} + r_n^{(3)}. \end{aligned}$$

Остаточный член в этом случае равен

$$r_n^{(3)} = r_n^{(2)} - \frac{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2} \frac{1}{n+1} = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2} \frac{\varepsilon}{(n+1)[n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon]}. \quad (3.45)$$

Рассмотрим линейный по  $x$  член разложения. С точностью до множителя, зависящего только от диэлектрических проницаемостей, он равен

$$s = \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{t^n}{n+1} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi. \quad (3.46)$$

Приведем этот ряд к виду (3.41) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ts)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n,m} \frac{2}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{t^{n+1}}{n+1} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ &= \sum_{n,m} \frac{2}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} t^n P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-2t\nu+t^2}}. \end{aligned}$$

Интегрируя в предположении, что  $\nu \neq 1$ , находим:

$$s = \frac{1}{t} \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t\nu+t^2}} = \frac{1}{t} \left[ \ln \left( t - \nu + \sqrt{1-2t\nu+t^2} \right) + C(\nu) \right],$$

где  $C(\nu)$  – неизвестная функция. Подставив  $t = 1$  в определение  $s$  (3.46) и в последнее равенство, получим:

$$C(\nu) = \sum_{n,m} \frac{2}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{n+1} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi - \ln \left( 1 - \nu + \sqrt{2-2\nu} \right).$$

Теорема сложения позволяет упростить ряд в правой части и привести его к следующему виду [47]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \frac{2}{1+\delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} P_n(\nu) = \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \right), \end{aligned}$$

так что  $C(\nu) = -\ln(1-\nu)$ , и, следовательно,

$$s = \frac{1}{t} \ln \frac{t - \nu + \sqrt{1-2t\nu+t^2}}{1-\nu}. \quad (3.47)$$

В случае  $\nu = 1$

$$\frac{\partial(ts)}{\partial t} = \frac{1}{1-t} \Rightarrow s = \frac{1}{t} \int \frac{dt}{1-t} = \frac{1}{t} [-\ln(1-t) + C_1].$$

Для нахождения постоянной интегрирования положим  $t = 0$  (что соответствует третьей частице на бесконечности), тогда в (3.46) останется только член ряда

с  $n = 0$ , равный единице. Но

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1,$$

так что  $C_1 = 0$ . Заметим, что

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \ln \frac{t - \nu + \sqrt{1 - 2t\nu + t^2}}{1 - \nu} = -\ln(1-t),$$

поэтому функция в (3.47) непрерывно продолжается на  $\nu = 1$ .

Итак, собирая (3.44), (3.45) и (3.47), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,b}^{(0)} = & \frac{q_{01}}{4\pi a_1^2} \left[ -\frac{1-t^2}{(1-2t\nu+t^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-2t\nu+t^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon(\varepsilon_1-\varepsilon)}{(\varepsilon_1+\varepsilon)^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t-\nu+\sqrt{1-2t\nu+t^2}}{1-\nu} + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1-\varepsilon)}{(\varepsilon_1+\varepsilon)^2} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{n,m} \frac{2}{1+\delta_{m0}} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{t^n}{n+1} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi \right]. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Проведем сравнение полученных модифицированных формул (3.42), (3.44) и (3.48). Каждая из них содержит ряд, начинающийся с единицы (с точностью до безразмерного множителя перед знаком суммы), которому предшествует определенная функция угловых координат, параметрически задаваемая отношением радиуса первой частицы к расстоянию от ее центра до точечного заряда, а также диэлектрическими проницаемостями материала макрочастицы и среды. Ограничимся пока частным случаем расположения третьей частицы на оси  $z$ , что делает задачу аксиально-симметричной; это соответствует следующим условиям:  $m = 0$ ,  $\mu_{01} = 1$ , и, следовательно,  $\nu = \mu_1$ . Упомянутые функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_1) &= -\frac{1-t^2}{(1-2t\mu_1+t^2)^{3/2}}, \\ f_2(\theta_1) &= f_1(\theta_1) + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu_1+t^2}}, \\ f_3(\theta_1) &= f_2(\theta_1) + \frac{\varepsilon(\varepsilon_1-\varepsilon)}{(\varepsilon_1+\varepsilon)^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t-\mu_1+\sqrt{1-2t\mu_1+t^2}}{1-\mu_1}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

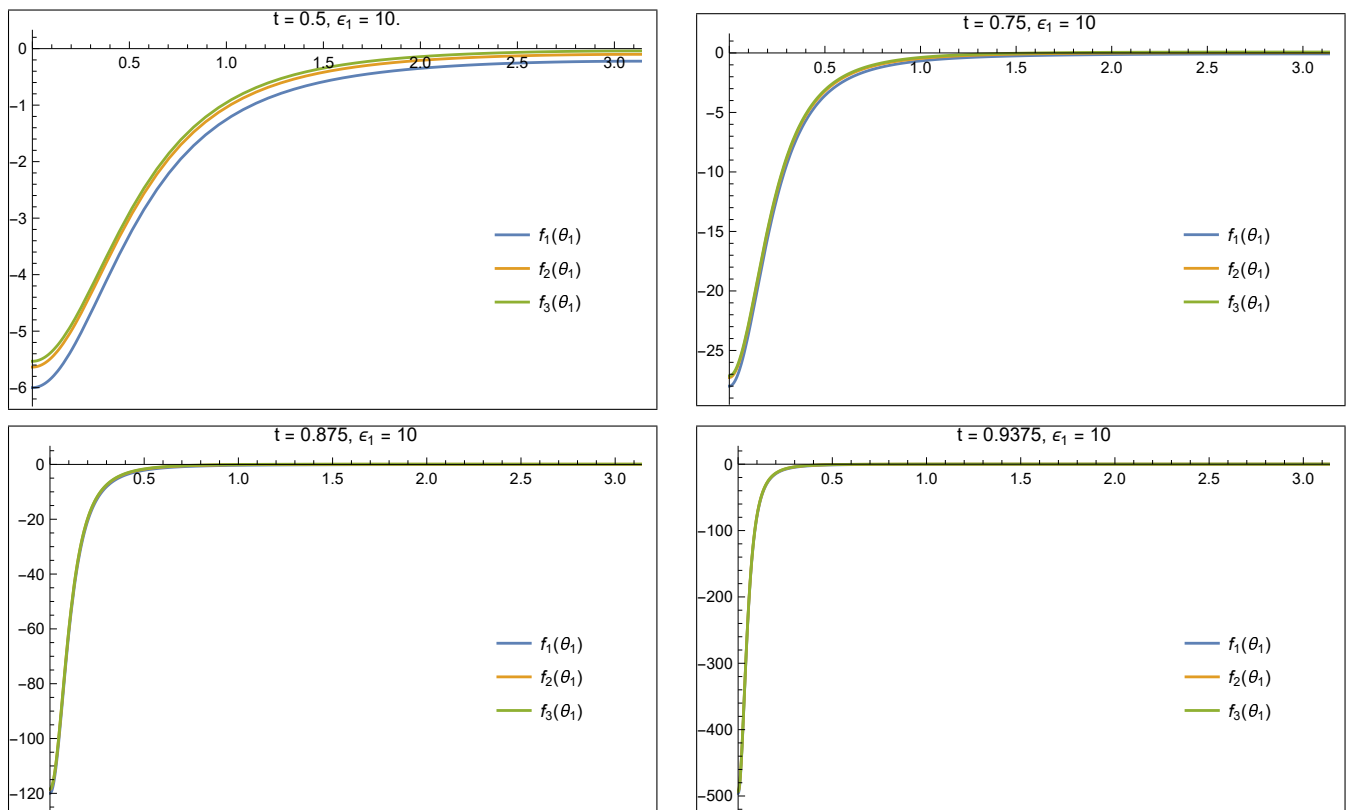


Рисунок 3.2 — Графики функций  $f_{1,2,3}(\theta_1)$  для различных межчастичных расстояний:  $L_1 = R_1 - a_1 = a_1$  на первом графике,  $a_1/3$  на втором,  $a_1/7$  на третьем и  $a_1/15$  на четвертом.

На рисунке 3.2 представлены графики этих функций для различных значений параметра  $t$ . Ясно видно, что по мере приближения точечной частице к сферической все большая часть площади под графиками прижимается к вертикали. Это вполне согласуется с указанным в начале раздела сходством исходного ряда для плотности (3.37) и представления дельта-функции (3.38), имеющим место при  $t \rightarrow 1$ . Чтобы определить величину заряда, сосредоточенного в данном случае на полюсе макрочастицы, найдем интегралы от функций (3.49). Поскольку, как нетрудно проверить,

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2) d\mu}{(1-2t\mu+t^2)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{t} \ln \frac{t-\mu+\sqrt{1-2t\mu+t^2}}{1-\mu} d\mu = 2,$$

то

$$\int_{-1}^1 f_1(\theta_1) d\mu_1 = -2, \quad \int_{-1}^1 f_2(\theta_1) d\mu_1 = -2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad \int_{-1}^1 f_3(\theta_1) d\mu_1 = -2 \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2}.$$

В рассматриваемом аксиально-симметричном случае интегралы по поверхности первой макрочастицы получаются из выписанных выше домножением на  $2\pi a_1^2$ , так что с учетом множителя перед квадратными скобками в (3.42) получаем, что в первом приближении эффективный заряд на полюсе сферической частицы равен  $-q_{01}$ , как мы и предполагали в начале раздела. В приближениях более высокого порядка (3.44) и (3.48) соответствующее выражение выглядит несколько более сложно, что связано с использованием более точного представления, чем (3.39). Наконец, отметим, что полученные значения эффективного заряда совпадают с интегралом от нулевой гармоники ряда в соответствующем приближении, что необходимо для равенства нулю интеграла от полной плотности связанных зарядов. В этом смысле можно говорить, что ненулевое первое слагаемое ряда описывает равномерное распределение поверхностного заряда, какое породилось бы точечным зарядом в центре макрочастицы с той же абсолютной величиной, что эффективный заряд на полюсе, но имеющим противоположный знак.

Как видно из рисунка 3.2, различие между функциями  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  тем заметнее, чем меньше по модулю значения этими функциями достигаются – а также чем меньше диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$ , что ясно из самого опре-

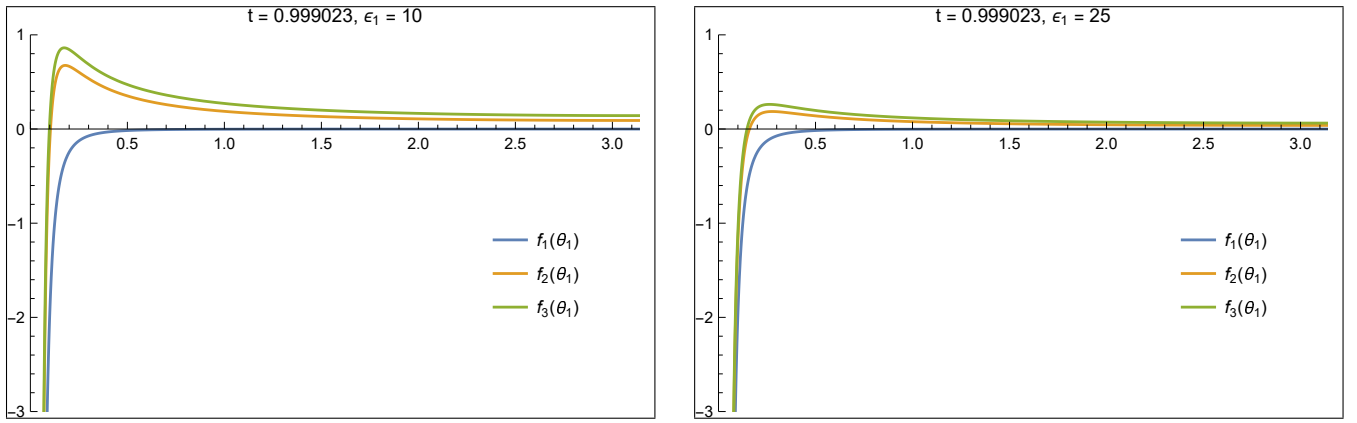


Рисунок 3.3 — Графики функций  $f_{1,2,3}(\theta_1)$  при  $L_1 = a_1/1023$  для случаев  $\varepsilon_1 = 10$  и  $\varepsilon_1 = 25$ .

деления (3.49). Последнюю зависимость проиллюстрируем для случая очень близкого расположения частиц, когда становится очевидным качественное различие между  $f_1$  и  $f_{2,3}$  начиная с некоторого  $\theta_1$  (см. рис. 3.3). Именно, функции  $f_{2,3}$  при отдалении от полюса пересекают уровень нуля и достигают максимума, после чего убывают, сохраняя положительный знак. Достижимый максимум тем резче, чем меньше проницаемость диэлектрической частицы, но при выбранных параметрах по модулю он не превышает  $10^{-6}$  от значения функции в нуле. Отсутствие описанных особенностей у функции  $f_1$  подчеркивает простоту первого приближения, однако из последующего будет видно, что точность, даваемая формулой (3.42), оказывается достаточной для численных расчетов на выбранном масштабе межчастичных расстояний.

Чтобы продемонстрировать это, изобразим на одном графике угловые зависимости  $\sigma_{1,b}^{(0)}(\theta_1)$  для аксиально-симметричной геометрии, рассчитанные по исходной формуле (3.37) и по модифицированной (3.42). На рисунке 3.4 приведены результаты расчетов для следующих параметров частиц:  $a_1 = 1$  мкм,  $q_1 = 10^2 e$ ,  $\varepsilon_1 = 25$ ,  $q_0 = 50e$ ,  $L_1 = 10$  нм. Видно, что данные, полученные с использованием исходной формулы, обнаруживают плохую сходимость для данной геометрии, в то время как модифицированная формула (3.42) не обладает этим недостатком. Колебания кривой 1 оказываются тем заметнее, чем меньше число учитываемых членов ряда  $N$  и чем мельче сетка. Отметим, что изначально поставленная в данной главе задача предполагает решение системы линейных уравнений с матрицей порядка  $N \times N$  (в силу конечности размера двух частиц из трех), производимое  $N + 1$  раз (в силу отсутствия аксиальной симметрии), что накладывает определенные ограничения на количество учиты-



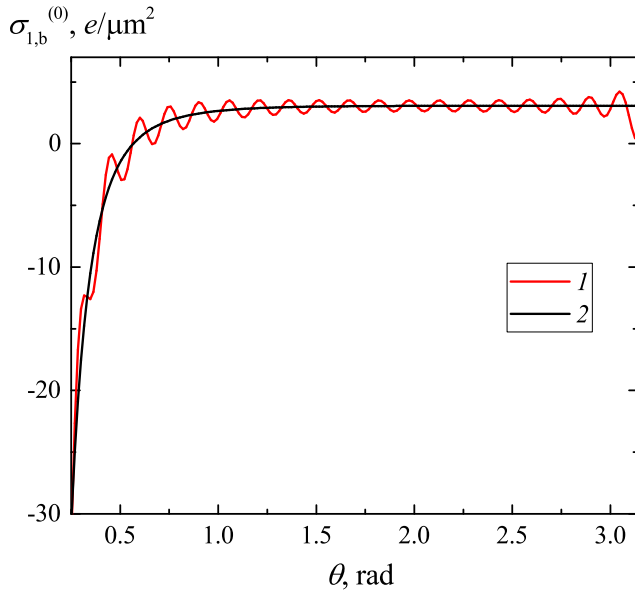


Рисунок 3.4 — Вклад точечной частицы в плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара. Кривая 1 — расчеты по исходной формуле (3.37), 2 — по модифицированной (3.42)

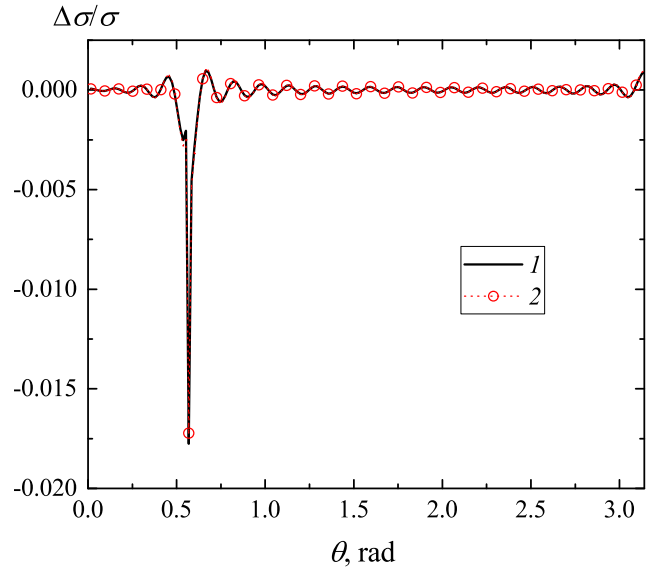


Рисунок 3.5 — Относительное отклонение данных, полученных для плотности  $\sigma_{1,b}^{(0)}$  по формулам (3.42) (кривая 1) и (3.44) (символы 2, значения увеличены в 100 раз) от результатов расчета по (3.48).

ваемых членов. В вспомогательной задаче, обсуждаемой сейчас, такая проблема не возникает, однако из соображений релевантности мы положили  $N$  таким же, как и в финальных расчетах, а именно  $N = 40$ ; диапазон изменения аргумента также в обоих случаях поделен равномерно на  $I = 200$  частей.

На масштабе, выбранном на графике 3.4 было бы невозможно различить кривые, соответствующие расчетам по той или иной модификации формулы для плотности (3.37). Их сравнение приведено на рисунке 3.5, где в качестве референтных выбраны результаты расчетов по (3.48); данные получены при тех же параметрах, что и для рисунка 3.4. Несмотря на плохую сходимость рассчитанного отношения и систематически возникающий пик на уровне  $\sim 0.5$  рад, из анализа результатов для различных  $N$  и  $I$  можно заключить, что погрешность, даваемая формулой (3.42), не слишком велика. В дальнейшем мы будем пользоваться именно ею, не в последнюю очередь из-за применимой к ней наглядной физической интерпретации, которой будет уделено внимание в следующем разделе.

Для вычисления вклада соседней макрочастицы  $\sigma_{i,b}^{(j)}$  ( $i = 1, 2; j = 3 - i$ ) мы будем пользоваться исходными формулами (3.19), (3.20), так как в случае

частиц конечного размера они дают хорошую сходимость и не нуждаются в модификации. Ввиду сказанного для полной плотности связанных зарядов на поверхности первой макрочастицы будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,b}(\mu_1, \varphi) = & \frac{q_{01}}{4\pi a_1^2} \left[ -\frac{R_1 (R_1^2 - a_1^2)}{(a_1^2 + R_1^2 - 2a_1 R_1 \nu)^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(2n+1)\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)! a_1^n}{(n+m)! R_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi \right] - \\ & - \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} \frac{n(2n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} B_{n,1}^m a_1^{n-1} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi; \quad (3.50) \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались определением параметра  $t$ . Для второй частицы справедлива аналогичная формула:

$$\begin{aligned} \sigma_{2,b}(\mu_2, \varphi) = & \frac{q_{02}}{4\pi a_2^2} \left[ -\frac{R_2 (R_2^2 - a_2^2)}{(a_2^2 + R_2^2 - 2a_2 R_2 \nu_2)^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(2n+1)\varepsilon}{n\varepsilon_2 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)! a_2^n}{(n+m)! R_2^n} P_n^m(\mu_{02}) P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi \right] - \\ & - \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n,m} \frac{n(2n+1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{n\varepsilon_2 + (n+1)\varepsilon} A_{n,2}^m a_2^{n-1} P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi, \quad (3.51) \end{aligned}$$

где

$$q_{02} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 + \varepsilon} \frac{a_2}{R_2} q_0, \quad \nu_2 = \cos \theta_{02} \cos \theta_2 + \sin \theta_{02} \sin \theta_2 \cos \varphi.$$

### 3.4.2 Электростатический потенциал диэлектрического шара в присутствии точечного заряда

Как было показано в разделе 3.2.2, формулы для проекций полной силы, действующей на первую макрочастицу, также допускают разделение вкладов второй и третьей частиц, причем последний, в согласии с третьим законом Ньютона, может быть получен из силы, действующей на точечный заряд со стороны первого шара. Эта сила определяется градиентом электростатического потен-

циала шара, причем влияние второй макрочастицы проявляется в значениях коэффициентов разложения  $A_{n,1}$  потенциала  $\phi_1$  (3.1) по шаровым функциям в первой системе координат. Однако из первого уравнения системы (3.16) видно, что это влияние также можно отделить от вклада точечной частицы, который выражается через известные коэффициенты  $C_{n,1}$  и может быть рассмотрен независимо:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sum_{n,m} \frac{A_{n,1}^m}{r_1^{n+1}} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ &= \frac{A_{0,1}^0}{r_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} (B_{n,1}^m + C_{n,1}^m) \frac{a_1^{2n+1}}{r_1^{n+1}} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ &= \frac{q_1}{\varepsilon r_1} - \frac{q_0}{\varepsilon r_1} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{a_1^{2n+1}}{R_1^{n+1} r_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi - \\ &\quad - \sum_{n,m} \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} B_{n,1}^m \frac{a_1^{2n+1}}{r_1^{n+1}} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенством для  $A_{0,1}^0$  (3.12) и определением коэффициентов  $C_{n,1}^m$  (3.7), а также перешли к суммированию с  $n = 0$ , поскольку в рядах в правой части соответствующий член равен нулю. Отбросив ряд, содержащий  $B_{n,1}^m$ , и перейдя к аксиально-симметричной геометрии, мы получим известное [31; 32] решение задачи о взаимодействии диэлектрического шара с точечным зарядом. Предполагая, что именно выражение, описывающее это взаимодействие, приводит к ухудшению сходимости всего выражения для силы, модифицируем его подобно тому, как это было сделано в разделе 3.4.1 для вычисления плотности связанных зарядов.

Воспользуемся снова разложением (3.39) в общем члене ряда. Имеем:

$$\begin{aligned}&- \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{a_1^{2n+1}}{R_1^{n+1} r_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi = \\ &= - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{a_1}{R_1} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(a_1^2/R_1)^n}{r_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi + \\ &+ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{a_1}{R_1} \sum_{n,m} \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(a_1^2/R_1)^n}{r_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi.\end{aligned}$$

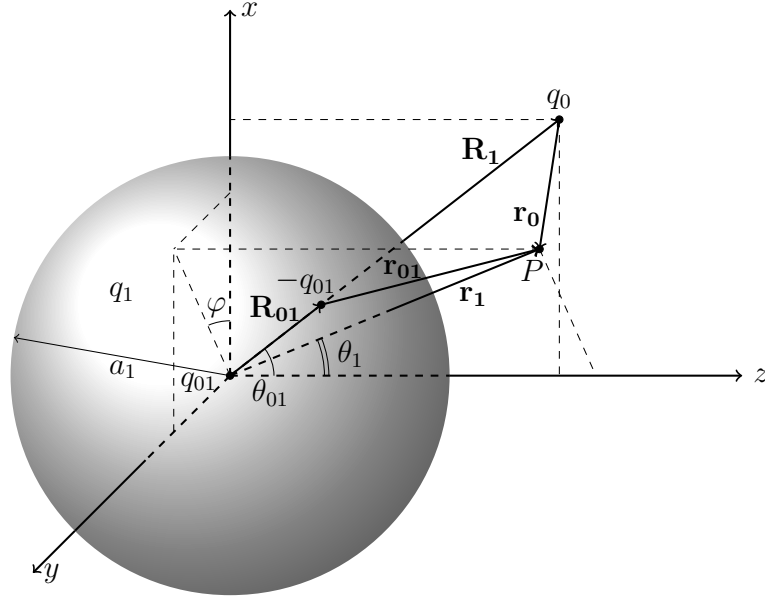


Рисунок 3.6 — Положение зарядов-изображений, возникающих при взаимодействии сферической и точечной частиц.

Введем расстояние  $R_{01} = a_1^2/R_1$ , определяющее инверсный образ точки, в которой находится заряд  $q_0$ , относительно поверхности сферы. Тогда, положив  $t = R_{01}/r_1$ , из (3.41) получим, что ряд в первом слагаемом равен  $r_1/r_{01}$ , где  $r_{01} = \sqrt{r_1^2 + R_{01}^2 - 2r_1R_{01}\nu}$  — расстояние от образа до точки наблюдения (см. рис. 3.6). Воспользовавшись обозначением (3.40), получим:

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{q_{01}}{\varepsilon r_1} - \frac{q_{01}}{\varepsilon r_{01}} + \\ & + \frac{q_{01}}{\varepsilon r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{a_1^{2n}}{R_1^n r_1^n} P_n^m(\mu_{01}) P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi - \\ & - \sum_{n,m} \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} B_{n,1}^m \frac{a_1^{2n+1}}{r_1^{n+1}} P_n^m(\mu_1) \cos m\varphi. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Таким образом, после преобразования ряда, отражающего влияние третьей частицы, мы в явном виде выделили вклады двух зарядов-изображений:  $+q_{01}$  в центре сферы (второе слагаемое (3.52), отвечающее  $n = 0$  в преобразованном ряде) и  $-q_{01}$  на расстоянии  $R_{01}$  от него. Эта интерпретация во многом схожа с теми рассуждениями, которые мы приводили в контексте преобразованной формулы для поверхностной плотности заряда.

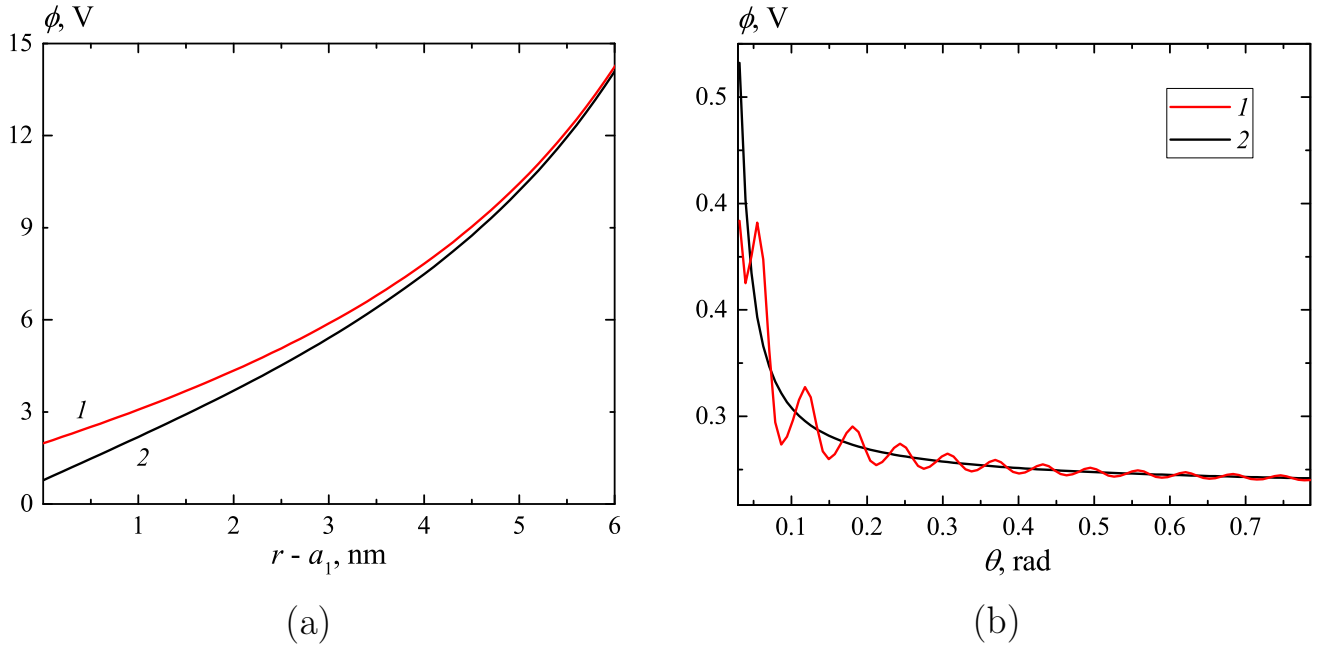


Рисунок 3.7 — Электростатический потенциал заряженного диэлектрического шара, найденный по формулам (3.53) и (3.54) (кривые 1 и 2, соответственно).

График (а) – зависимость от  $r_1$  при фиксированном  $\theta_1 = 0$ ; график (б) – зависимость от  $\theta_1$  при фиксированном  $r_1 = a_1 + 0.5L_1$ .

Продemonстрируем преимущество в скорости сходимости потенциала, рассчитанного по новой формуле, на примере системы из двух частиц – сферической и точечной – расположенных аксиально-симметрично. В этом случае исходная формула для потенциала диэлектрического шара совпадает с представленной в литературе [31; 32]. Слегка преобразовав ее с помощью введенного эффективного заряда  $q_{01}$ , запишем:

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon r_1} - \frac{q_{01}}{\varepsilon r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\varepsilon_1 + \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{a_1^{2n}}{R_1^n r_1^n} P_n(\mu_1). \quad (3.53)$$

Модифицированная формула в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{q_{01}}{\varepsilon r_1} - \frac{q_{01}}{\varepsilon r_{01}} + \frac{q_{01}}{\varepsilon r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{a_1^{2n}}{R_1^n r_1^n} P_n(\mu_1). \quad (3.54)$$

Отметим в очередной раз, что общий член ряда в преобразованном потенциале (3.54) при  $R_1 \sim a_1$  убывает на порядок быстрее в сравнении с исходным (3.53).

Сравнение результатов расчетов по данным формулам представлено на графиках 3.7. Первый из них показывает зависимость потенциала на полярной оси от расстояния между поверхностью диэлектрического шара и точкой наблюдения  $r_1 - a_1 \in (0; L_1)$ ; правый конец кривой обрезан из соображений наглядности, поскольку в этой области значение потенциала велико, а данные расчетов по старой и новой формулам отличаются мало – в отличие от области, близкой к сферической поверхности. Второй представляет угловую зависимость потенциала при  $r_1 = a_1 + 0.5L_1$ . Видно, что модифицированная формула для потенциала обеспечивает большую устойчивость, в особенности в области, близкой к полярной оси. Параметры частиц и расстояние между ними соответствуют рисунку 3.4

По аналогии с проделанным в разделе 3.4.1 нетрудно увеличить еще на порядок скорость убывания общего члена ряда для потенциала  $\phi_1$ , однако возникающий при этом логарифмический член не поддается интуитивно понятной физической трактовке, какая была предложена для второго и третьего слагаемых формулы (3.54). При этом выигрыш в точности расчетов, как можно убедиться, не оказывается существенным, так что в данной работе было решено ограничиться модификацией, представленной выше.

### 3.4.3 Сила взаимодействия

Напомним, что путем раскрытия скобок в формулах (3.30) и (3.32) вклады второй и третьей частиц в силу, действующую на первую, можно разделить. Сейчас мы не ставим перед собой цель каким-либо образом усовершенствовать метод нахождения силы взаимодействия частиц конечного размера, и потому будем находить ее проекции по уже полученным формулам:

$$F_{1z}^{(2)} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} A_{n,1}^m B_{n+1,1}^m, \quad (3.55)$$

$$F_{1x}^{(2)} = -\varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} (A_{n,1}^m B_{n+1,1}^{m+1} - A_{n+1,1}^{m+1} B_{n+2,1}^m). \quad (3.56)$$

Верхний индекс в скобках здесь указывает на вклад второй частицы.

Выражение же для силы со стороны точечной частицы нуждается в улучшении. Для этого будем отталкиваться от силы, с которой первая частица действует на третью, а затем прибегнем к третьему закону Ньютона. Воспользуемся представлением потенциала первой сферы (3.52). С учетом формул перехода от прямоугольных координат к сферическим (3.22) получаем:

$$F_{0z}^{(1)} = -q_0 \nabla_z \phi_1|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1} = -q_0 \left( \mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} - \sqrt{1 - \mu_1^2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right) \Big|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1},$$

$$F_{0x}^{(1)} = -q_0 \nabla_x \phi_1|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1} = -q_0 \left( \sqrt{1 - \mu_1^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} + \mu_1 \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right) \Big|_{\mathbf{r}_1=\mathbf{R}_1}.$$

Ясно, что вклады от первых трех слагаемых в формуле для потенциала (3.52) проще всего найти из закона Кулона, поскольку речь идет о взаимодействии точечных зарядов. Тем не менее покажем это на примере наименее очевидного третьего слагаемого. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \frac{1}{r_{01}} = \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + R_{01}^2 - 2r_1 R_{01} \nu}} = -\frac{r_1 - R_{01} \nu}{(r_1^2 + R_{01}^2 - 2r_1 R_{01} \nu)^{\frac{3}{2}}},$$

и, поскольку  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 \Leftrightarrow (r_1 = R_1 \wedge \mu_1 = \mu_{01} \wedge \varphi = 0) \Rightarrow \nu = 1$ , или, иными словами, векторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_{01}$  сонаправлены, в точке  $\mathbf{R}_1$  эта производная равна  $-(R_1 - R_{01})^{-2}$ .

Дифференцирование по углу дает:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{1}{r_{01}} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + R_{01}^2 - 2r_1 R_{01} \nu}} = \frac{r_1 R_{01}}{(r_1^2 + R_{01}^2 - 2r_1 R_{01} \nu)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \nu}{\partial \theta_1},$$

где

$$\frac{\partial \nu}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\cos \theta_{01} \cos \theta_1 + \sin \theta_{01} \sin \theta_1 \cos \varphi) = -\cos \theta_{01} \sin \theta_1 + \sin \theta_{01} \cos \theta_1 \cos \varphi,$$

что при  $\theta_1 = \theta_{01}$  и  $\varphi = 0$  дает ноль.

Дифференцирование рядов, входящих в (3.54), выполняется так же, как в разделе 3.2.1, и с привлечением тех же тождеств для присоединенных функций Лежандра. Поменяв знаки полученных выражений и учтя вклад второй сферической частицы, приходим к следующим формулам для проекций силы,

действующей на первый диэлектрический шар:

$$\begin{aligned}
F_{1z} = & \left[ -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon R_1^2} - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} + \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon (R_1 - R_{01})^2} \right] \mu_{01} - \\
& - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{a_1^{2n}}{R_1^{2n}} P_n^m(\mu_{01}) P_{n+1}^m(\mu_{01}) + \\
& + q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} (n-m+1) B_{n,1}^m \frac{a_1^{2n+1}}{R_1^{n+2}} P_{n+1}^m(\mu_{01}) - \\
& - \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} A_{n,1}^m B_{n+1,1}^m. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Напомним, что для первой макрочастицы положительное значение  $z$ -проекции соответствует притяжению, отрицательное – отталкиванию. Второе и третье слагаемые в (3.57) описывают кулоновское взаимодействие точечного заряда  $q_0$  с двумя его изображениями, причем третье слагаемое быстро растет по абсолютной величине по мере сближения сферической и точечной частиц, что на достаточно малых межчастичных расстояниях приводит к возникновению притяжения.

Для силы, действующей на первый шар вдоль оси  $x$ , имеем:

$$\begin{aligned}
F_{1x} = & \left[ -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon R_1^2} - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} + \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon (R_1 - R_{01})^2} \right] \sqrt{1 - \mu_{01}^2} - \\
& - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{a_1^{2n}}{R_1^{2n}} P_n^m(\mu_{01}) \times \\
& \times \left[ P_{n+1}^{m+1}(\mu_{01}) - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\mu_{01}) \right] + \\
& + q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{n(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} B_{n,1}^m \frac{a_1^{2n+1}}{R_1^{n+2}} \times \\
& \times \left[ P_{n+1}^{m+1}(\mu_{01}) - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\mu_{01}) \right] - \\
& - \varepsilon \sum_{n,m} \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} (A_{n,1}^m B_{n+1,1}^{m+1} - A_{n+1,1}^{m+1} B_{n+2,1}^m). \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Следует заметить, что формула (3.58) не учитывает смену знака  $x$ -проекции силы при  $\sin \theta_{01} < 0$ . Для второй макрочастицы имеют место аналогичные формулы, причем, имея в виду общее направление оси  $z$  в обеих системах координат,



$L_1 = 1$ нм	$N$	10	100	1000	7000
	(3.59)	0.002561	1.176466	181.6372	1.330869
	(3.60)	1.330985	1.330961	1.330886	1.330886
$L_1 = 10^2$ нм	$N$	2	5	20	100
	(3.59)	0.531242	1.644432	3.415502	1.182855
	(3.60)	1.186597	1.184037	1.182610	1.182800
$L_1 = 10^4$ нм	$N$	1	5	10	20
	(3.59)	-8.501968	-9.526930	-9.526930	-9.526930
	(3.60)	-9.539907	-9.526930	-9.526930	-9.526930

Таблица 1 — Сравнение расчетов по формулам (3.59) и (3.60) для силы взаимодействия сферической и точечной частиц с параметрами, соответствующими рисункам 3.4 и 3.7. Результаты, полученные для различных межчастичных расстояний, выражены, соответственно, в  $10^{-2}$ ,  $10^{-6}$  и  $10^{-10}$  дин.

мы считаем, что положительное значение  $F_{2z}$  означает отталкивание от первой частицы, а отрицательное — притяжение к ней.

Сравнение формул для силы до и после выделения вкладов зарядов-изображений снова проведем для случая взаимодействия диэлектрического шара с точечным зарядом. Из потенциала (3.53) можно получить формулу для силы взаимодействия:

$$F_{1z} = -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon R_1^2} + \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(\varepsilon_1 + \varepsilon) a_1^{2n}}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon R_1^{2n}}; \quad (3.59)$$

мы снова видоизменили известный [31] результат с использованием обозначения  $q_{01}$  ради большего сходства с альтернативной формулой. Последняя в рассматриваемой геометрии получается из (3.57) отбрасыванием двух последних слагаемых, описывающих, соответственно, опосредованное и непосредственное влияние второй макрочастицы, а также условиями  $m = 0$ ,  $\mu_{01} = 1$ . Это приводит нас к следующему:

$$F_{1z} = -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon R_1^2} - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} + \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon (R_1 - R_{01})^2} - \frac{q_0 q_{01}}{\varepsilon R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\varepsilon a_1^{2n}}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon R_1^{2n}}. \quad (3.60)$$

Это выражение также можно было найти с помощью потенциала в виде (3.54).

Из таблицы 1 видно, что расчеты по формуле (3.60) с учетом всего нескольких первых членов ряда уже приводят к результату, отличающемуся от окончательного только в третьей-четвертой значащей цифре. Для достижения такой точности при расчетах с использованием исходной формулы (3.59), если  $L_1$  достаточно мало, может потребоваться вплоть до нескольких тысяч членов.

Напомним, что в силу вычислительных ограничений, накладываемых геометрией исходной задачи, при расчетах мы учитывали лишь первые  $N = 40$  членов разложения потенциала. Как видно из полученных в этом разделе данных, этого вполне достаточно для достижения приемлемой точности при вычислении вклада точечного заряда в силу взаимодействия.

## 3.5 Результаты расчетов

### 3.5.1 Сила взаимодействия

В работах [15; 16] исследовался вопрос о том, при каких соотношениях размеров, зарядов и диэлектрических проницаемостей две одноименно заряженные сферические частицы по мере сближения могут начать притягиваться друг к другу. Проанализируем влияние третьей частицы на этот переход. Рассмотрим сперва пару одинаковых диэлектрических шаров, которые, согласно [16], ни на каких расстояниях притяжения не испытывают. Расчеты показывают, что присутствие третьей частицы приводит к изменению характера их взаимодействия, только когда расстояние между их поверхностями достаточно мало, причем, как видно из рисунка 3.8, сам точечный заряд должен находиться в очень ограниченной области между ними. При этом понятно, что смена знака проекции силы, действующей на каждую из сфер, происходит вследствие притяжения к точечной частице, обусловленного третьим слагаемым в формуле (3.57), на малых расстояниях преобладающим над остальными.

Рассмотрим теперь сферические частицы с таким соотношением размеров и зарядов, при которых притяжение между ними возможно (мы выбрали параметры, соответствующие кривой 2 рисунка 5 в статье [16]), и расположим их

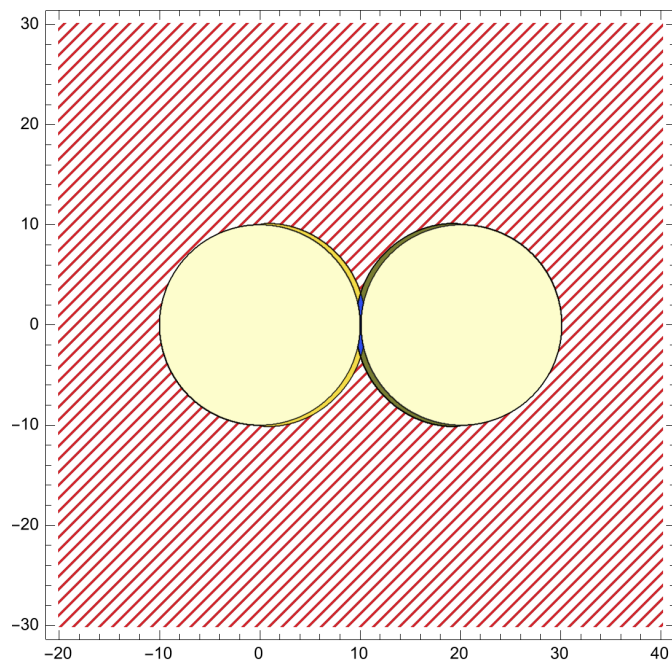


Рисунок 3.8 — Соотношение знаков сил, действующих вдоль оси  $z$  на одинаковые диэлектрические шары ( $a_1 = a_2 = 10$  мкм,  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$ ), в зависимости от положения точечного заряда величины  $q_0 = 50e$ . Расстояние между сферическими поверхностями  $L = 100$  нм. Красный цвет соответствует отталкиванию ( $F_{1z} < 0$ ,  $F_{2z} > 0$ ), синий — притяжению; желтый и зеленый указывают на случаи совпадающих знаков (положительные и отрицательные, соответственно).

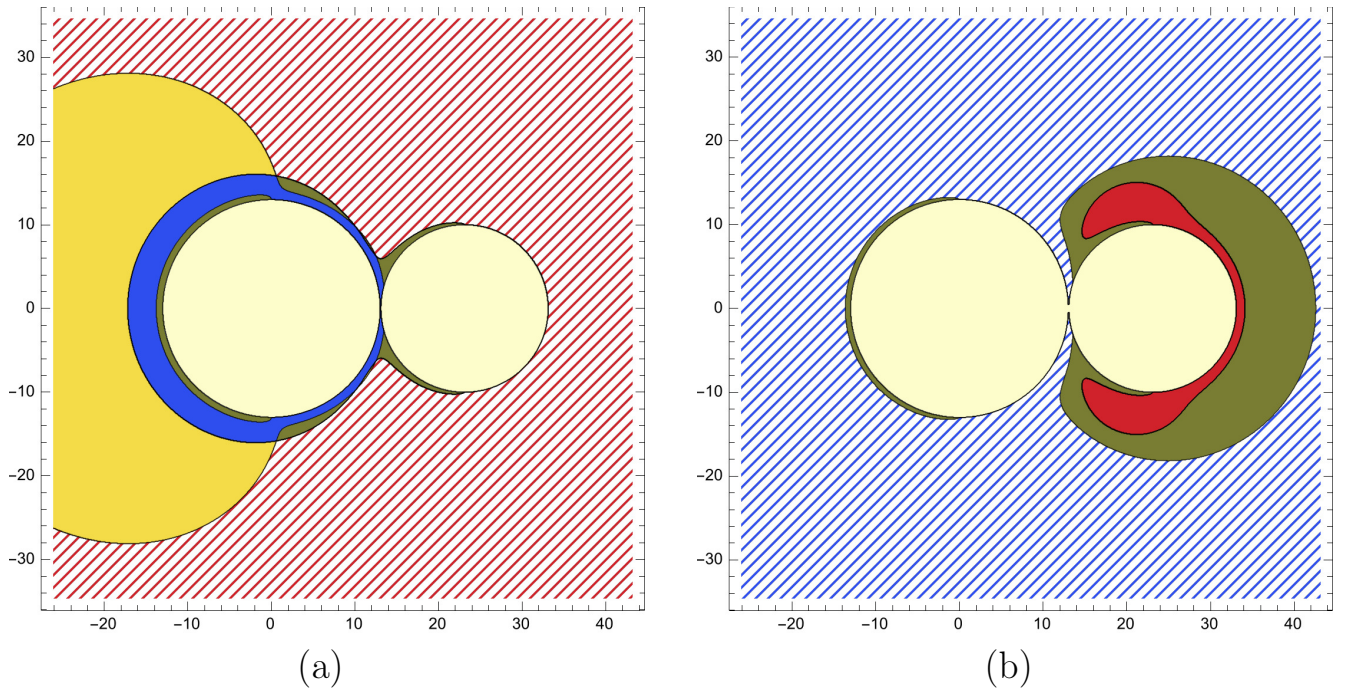


Рисунок 3.9 — Области притяжения и отталкивания сферических частиц в зависимости от положения точечной. Параметры частиц те же, что на рисунке 3.8, за исключением размера и заряда первой: здесь  $a_1 = 1.3a_2$ ,  $q_1 = 3q_2$ .

Межчастичное расстояние на левом графике  $L = 100$  нм, на правом  $L = 70$  нм.

на расстоянии чуть большем и чуть меньшем переходного. Как и следовало ожидать, в этом случае влияние третьей частицы качественно заметнее и проявляется в более широком диапазоне изменения ее координат. На рисунке 3.9а сферические частицы в отсутствие точечной отталкиваются друг от друга – и продолжают отталкиваться (красный цвет), если последняя находится в правой полуплоскости, т.е. при  $z_0 > 0$ , не считая области вблизи поверхностей шаров при  $0 < z_0 < R$  (все неравенства приближенные). Притяжение (синий цвет) возникает, когда точечный заряд расположен в кольцевидной области вокруг большей из сфер, за исключением тонких участков (зеленого цвета) внутри при  $z_0 < 0$  и снаружи при  $z_0 > 0$ . В этих участках, а также у поверхности второй частицы со стороны, обращенной к первой (то есть при  $a_1 < z_0 < R$ ), знаки обеих сил отрицательные, а в довольно широкой области за большей из частиц, наоборот, положительные (желтый цвет). В этих случаях нельзя говорить ни об отталкивании, ни о притяжении.

На правом графике рисунка 3.9 показано, как положение неполяризуемой частицы влияет на режим взаимодействия диэлектрических шаров с теми же

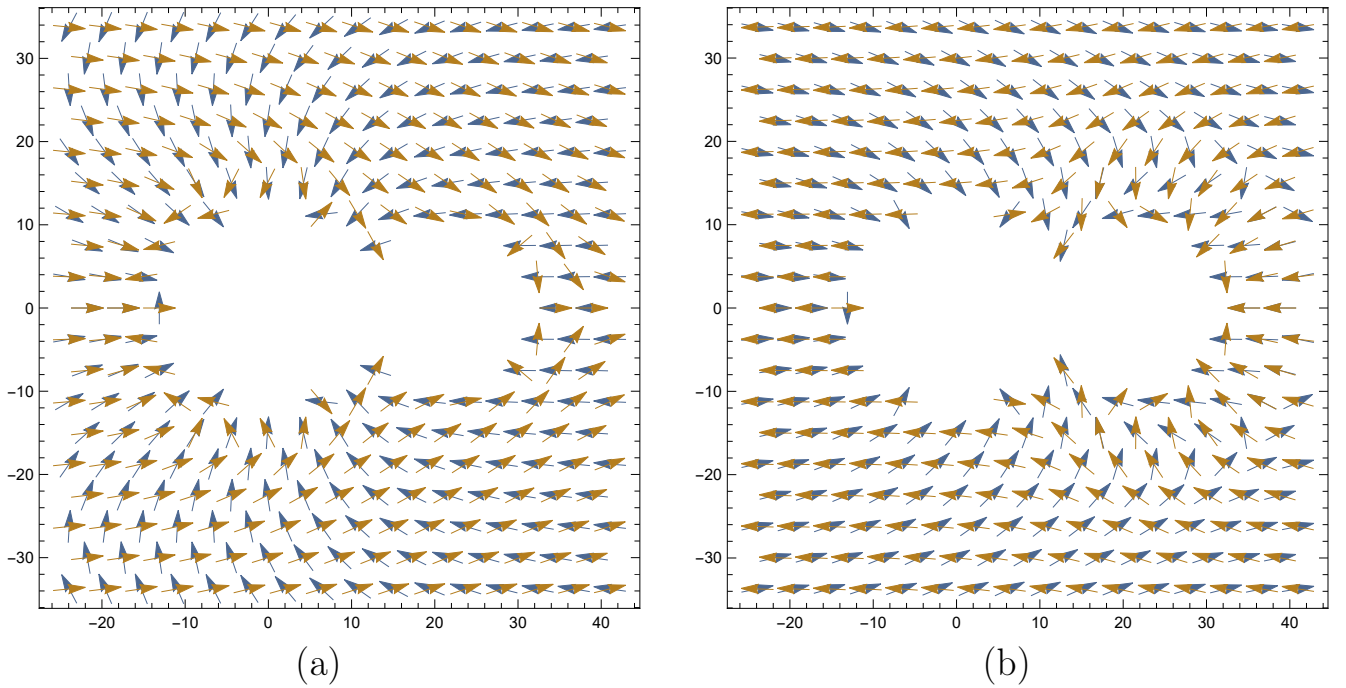


Рисунок 3.10 — Поле сил  $\mathbf{F}_1$  (синий цвет) и  $\mathbf{F}_2$  (желтый цвет) в зависимости от координат точечной частицы. Параметры частиц и межчастичные расстояния соответствуют рисунку 3.9.

параметрами, но находящимися на чуть меньшем расстоянии, когда для изолированной пары отталкивание уже перешло в притяжение. В основной части пространства, окружающего сферы, точечная частица, как и раньше, не меняет характер их взаимодействия, но теперь та область, где ее влияние приводит к смене знаков обеих сил (красный цвет), находится за меньшей из них и становится тем шире по  $x$ , чем ближе  $q_0$  к  $q_1$  – в отличие от предыдущего случая. Кроме того, перехода от притяжения к отталкиванию не возникает, когда точечный заряд располагается в промежутке между сферическими поверхностями; как мы видели из рисунков 3.8 и 3.9а, в этой зоне при изначальном отталкивании притяжение возникает в первую очередь. Отметим сходство с ранее рассмотренным случаем чуть большего межчастичного расстояния: здесь мы также видим отрицательные знаки сил в областях у сферических поверхностей при  $\pi/2 < \theta_{1,2} < 3\pi/2$  (зеленого цвета). Однако основной участок, где обе силы обращены против оси  $z$ , окружает меньшую из сфер и по форме напоминает область положительных  $F_{1z}$  и  $F_{2z}$  (желтого цвета) вокруг большей из них, которую мы видели в предыдущей конфигурации. При этом в рассматриваемом случае такого режима не наблюдается вовсе.

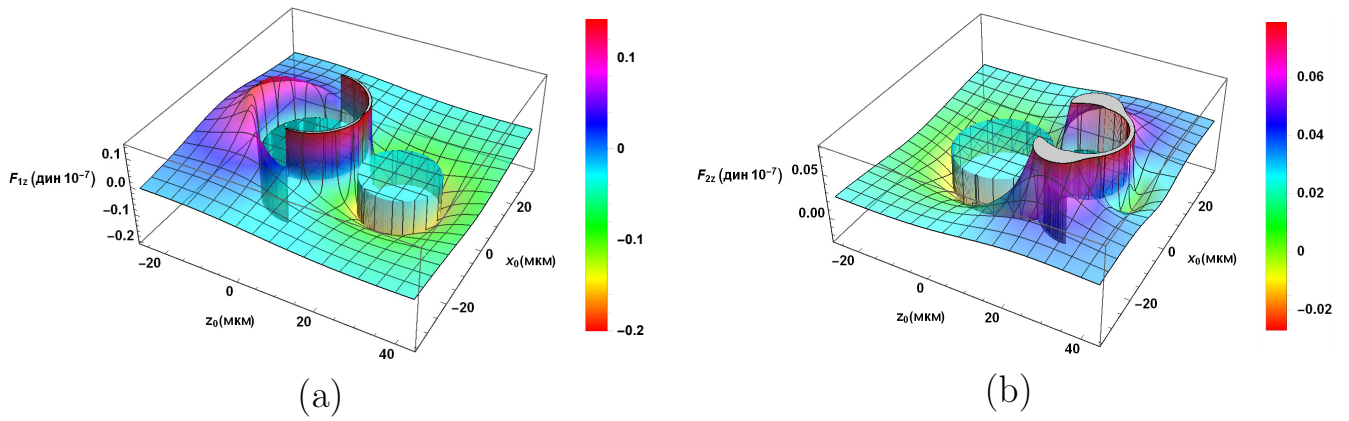


Рисунок 3.11 — Зависимость  $z$ -компоненты полной силы, действующей на первый (а) и второй (б) диэлектрический шар, от положения точечного заряда. Параметры и взаимное расположение частиц соответствуют рисунку 3.9а. В отсутствие третьей частицы сферы отталкиваются с силой 2.84 ндин.

Дадим несколько более общую картину зависимости сил, действующих на сферические частицы, от положения точечной. На рисунке 3.10 приведены данные для векторов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  как функций  $(x_0, z_0)$ , полученные с использованием улучшенной формулы для  $x$ -компоненты (3.58) и аналогичной для второй макрочастицы. На данном рисунке длины векторов не согласованы с абсолютным значением сил взаимодействия, за счет чего анализ становится проще, но по-прежнему имеет качественный характер. Однако, в отличие от еще более упрощенного и наглядного рисунка 3.9, графики 3.10 позволяют определить, в каких участках критических областей (то есть тех, где характер взаимодействия сфер противоположен невозмущенному) действительно имеет место «чистое» притяжение или отталкивание. Это можно сделать исходя из отклонения изображенных векторов от оси  $z$  (направленной, напомним, слева направо): мы говорим об относительно «чистом» притяжении, если  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{e}_z) \approx |\mathbf{F}_1|$  и  $(\mathbf{F}_2, \mathbf{e}_z) \approx -|\mathbf{F}_2|$ ; аналогичное определение можно сформулировать для отталкивания. Так, в случае макрочастиц, находящихся на границе перехода от отталкивания к притяжению (рис. 3.9а), описанная ситуация возникает, только когда точечный заряд находится за большей из сфер (см. рис. 3.10а). Если же переход уже совершен (рис. 3.9б), отталкивание скорее будет спровоцировано третьей частицей, находящейся вблизи меньшей из них возле оси  $x_2$ , что видно из графика 3.10б.

Наконец, для получения количественной картины рассмотрим зависимость величины  $z$ -компоненты сил, действующих на первый (рис. 3.11а) и второй (рис. 3.11б) шар при  $L = 100$  нм (что соответствует левому графику 3.9), от положения третьей частицы. В участках, занятых сферами, значение силы для наглядности выбрано таким, каким бы оно было в отсутствие точечного заряда. В первую очередь внимание на себя обращает область вблизи первой сферической частицы, где касательная плоскость к графику почти вертикальна. Как видно из анализа рисунков 3.8, 3.9, в этом регионе вне зависимости от параметров сферических частиц, возможности возникновения притяжения между ними и реализованности этого перехода та или иная частица испытывает силу,  $z$ -проекция которой имеет тот же знак, что  $z$ -координата точечного заряда в соответствующей системе координат. Учитывая график 3.11, можно говорить, что при различных параметрах системы не меняется не только знак проекции силы, но и то, как резко ее абсолютная величина отличается от таковой на некотором отдалении от сфер. Как уже говорилось в комментариях к рисунку 3.8, причину следует искать в третьем слагаемом в формуле (3.57): даваемый им вклад при малых  $R_1$  многократно превышает вклады других слагаемых, равно как и само значение проекции силы при больших расстояниях между точечной и сферической частицами.

### 3.5.2 Поверхностная плотность заряда

Перейдем к вычислению поверхностной плотности заряда на сферах и анализу влияния точечной частицы на ее распределение. Как и в случае с проекцией силы взаимодействия, воспользуемся выражениями с явно выделенным дельта-членом (3.50) и (3.51). Как видно из расчетов, эти формулы обнаруживают хорошую скорость сходимости в том числе при существенно более близких к нулю расстояниях между сферической поверхностью и точечным зарядом, чем рассматриваемые далее.

Обратимся снова к рисунку 3.9. Расчеты показывают, что при таких параметрах сферических частиц степень поляризации поверхностного заряда на большей из них существенно выше, чем на меньшей: если в первом случае зна-

чения плотности заряда на полюсах (ближайшем ко второму шару и противоположном ему, соответственно) составляют  $-12.3$  и  $+0.189$ , то во втором – лишь  $-0.150$  и  $+0.00144$  (здесь и далее плотность выражена в элементарных зарядах на квадратный микрон). Для исследования влияния точечной частицы на картину распределения связанных зарядов на сферах поместим ее в области, которым на рисунке 3.9 соответствует смена знака проекций сил, действующих на сферы, – то есть в синюю область на левом графике и в красную на правом. Одну точку мы взяли на оси  $x_1$  на расстоянии 2 мкм от поверхности первого шара, вторую – на оси  $x_2$  на расстоянии 3 мкм от второго.

Рассмотрим первый случай. Как видно из графика 3.12а, на фоне «шапки» отрицательного заряда на полюсе первого шара возмущение плотности, вызванное близостью третьей частицы, не так велико. При этом оба участка отрицательной плотности локализованы на довольно небольшой площади и разделены областью положительного заряда. Иначе дело обстоит с плотностью заряда на меньшем из диэлектрических шаров (см. график 3.12b): ее распределение гораздо более равномерно, так что влияние третьей частицы оказывается заметным даже при больших  $R_2$ . В рассматриваемом случае, когда другие две частицы расположены недалеко друг от друга, участки вызванного ими возмущения плотности перекрываются, и область отрицательного заряда занимает сравнительно большой телесный угол.

Если же точечная частица расположена ближе к меньшему из шаров, то отрицательный пик плотности, индуцированный ею на его поверхности, оказывается в разы заметнее расположенного на полюсе и вызванного первым диэлектрическим шаром (см. рис. 3.12d); качественно картина распределения в этом случае напоминает график 3.12а, если поменять местами оси  $x_1$  и  $z$ . Что касается первой частицы, то, как видно из рисунка 3.12с, при данных параметрах системы и на таком большом расстоянии точечный заряд не оказывает видимого влияния на распределение связанных зарядов на ее поверхности.



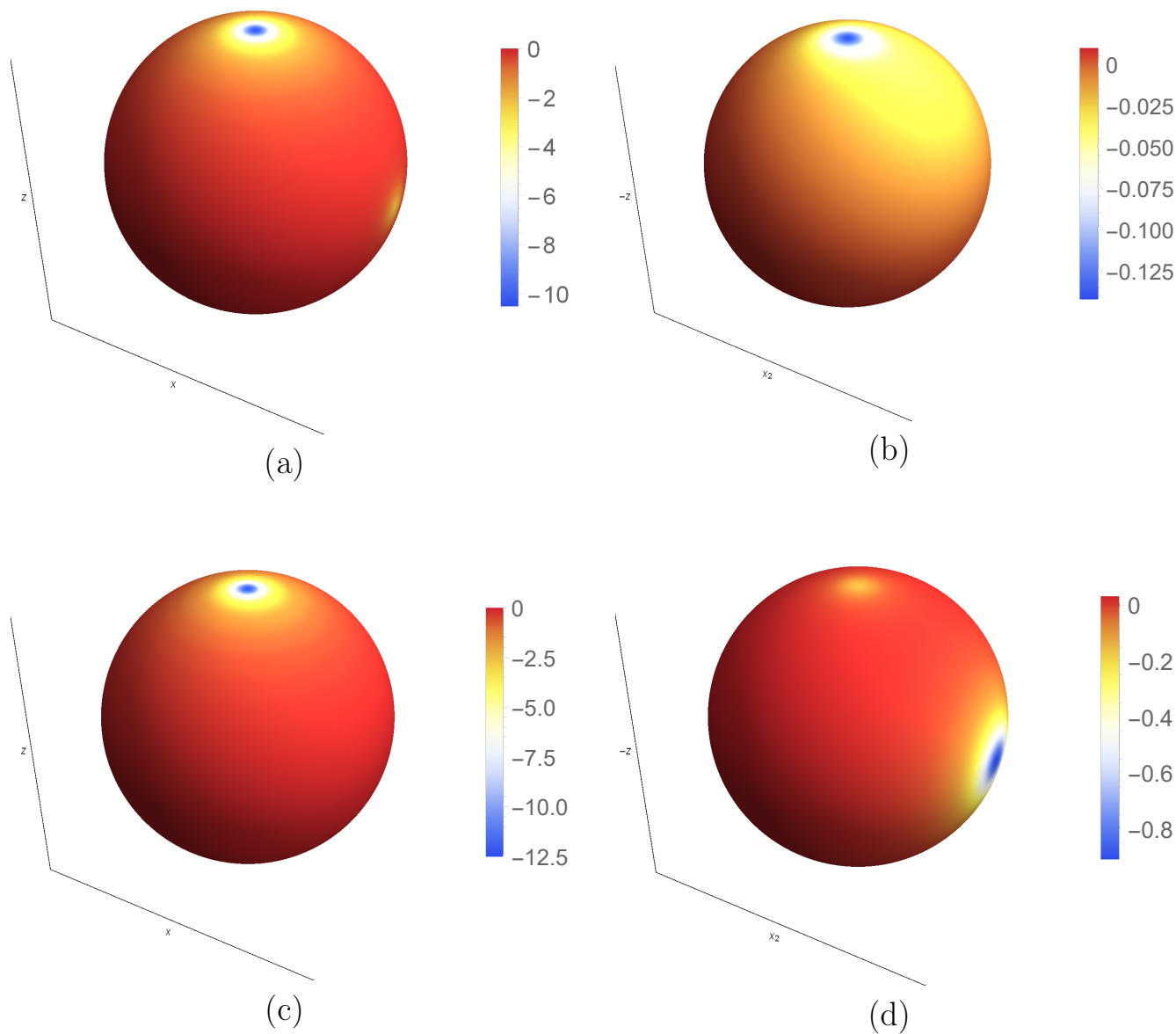


Рисунок 3.12 — Поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрических частицах с характеристиками, соответствующими рисунку 3.9 и расположенных на расстоянии  $L = 100$  нм (a, b) и  $L = 70$  нм (c, d). Положение точечного заряда на графиках (a) и (b) задается в первой системе координат как  $x_0 = 15$  мкм,  $z_0 = 0$ , на (c) и (d) – во второй системе как  $x_0 = 13$  мкм,  $z_0 = 0$ . Левые графики соответствуют первой сфере, правые – второй; значения плотности приведены в  $[e/\text{мкм}^2]$ , где  $e$  – элементарный заряд.

### 3.6 Решение задачи без учета согласованности потенциалов сферических частиц с потенциалом точечной

Наконец, рассмотрим несколько упрощенный подход к решению поставленной задачи. Пусть точечный заряд не участвует в перераспределении потенциала сферических частиц; тогда, считая их изолированными, из системы (3.16) с правой частью без  $C_{n,i}^m$  ( $i = 1, 2$ ) найдем одномерные коэффициенты  $A_{n,1}$  и  $B_{n,2}$ . В таком случае сила, с которой второй диэлектрический шар действует на первый, определяется формулой:

$$F_{1z}^{(2)} = -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n,1} B_{n+1,1}.$$

При сделанном предположении эта величина может быть найдена по параметрам сферических частиц и расстоянию между ними, иными словами, совершенно независимо от положения и величины точечного заряда. Вклад последнего дается явным выражением (3.60) с поправкой на множитель  $-\mu_{01}$ . Таким образом, с вычислительной точки зрения данный подход представляется значительно более выигрышным.

Для наглядности ограничимся случаем аксиально-симметричного расположения частиц. Описываемый подход предполагает лишь, что аксиально-симметричным остается распределение потенциалов шаров, в то время как точечный заряд может находиться и вне оси  $z$ ; однако естественно ожидать более хорошего согласия с уже полученными результатами, именно когда все три частицы расположены на одной прямой. Пусть шары имеют одинаковые радиусы и заряды, как на рисунке 3.8; покажем, как действующая на них сила зависит от положения точечной частицы, если последняя находится между ними и расстояние от нее до первой сферической поверхности  $L_1 = R_1 - a_1$  пробегает интервал от нуля до  $L = R - a_1 - a_2$ , где  $L = 10$  мкм или 100 нм (см., соответственно, левый и правый графики на рис. 3.13). Пользуясь вычислительным преимуществом, которое дает аксиально-симметричная геометрия, мы учли в расчетах до  $N = 400$  членов разложения.

Из рисунка видно, что качественно зависимость силы от положения  $q_0$  действительно не отличается при расчетах по той или иной формуле. При до-

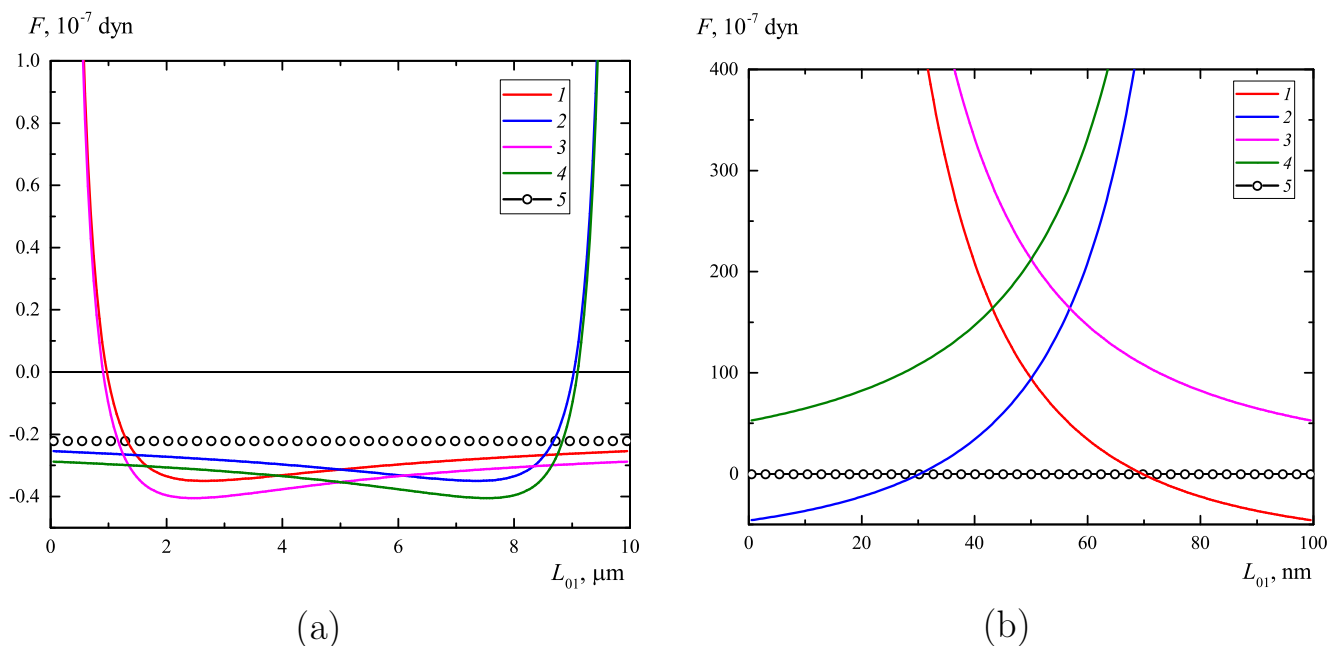


Рисунок 3.13 — Зависимость  $z$ -проекции полной силы, действующей на первую (кривые 1 и 3) и вторую (2 и 4) сферические частицы, от положения точечного заряда на оси  $z$ . Данные для 1 и 2 получены из решения системы (3.16) с учетом вклада третьей частицы в полный потенциал, 3 и 4 — без учета. Уровень 5 соответствует взаимодействию в отсутствие точечного заряда, отрицательный знак указывает на отталкивание; знаки проекции силы для второго шара заменены на противоположные для наглядности.

Параметры частиц соответствуют рисунку 3.8, межчастичное расстояние  $L = 10$  мкм на левом графике и 100 нм на правом.

статочно больших  $L$  нет такой точки между частицами, где  $q_0$  мог бы вызвать их притяжение (чему соответствовало бы расположение обеих кривых выше уровня нуля), и результаты расчетов по обеим формулам в равной степени это подтверждают. Однако при  $L = 100$  нм пренебрежение вкладом третьей частицы в поляризацию заряда на первой и второй приводит к ошибочному выводу о наличии притяжения между сферами вне зависимости от положения точечного заряда. При этом расчеты по исходной формуле показывают, что притяжение имеет место лишь в области между  $L \approx 30$  и  $70$  нм, а вне ее проекции сил оказываются одного знака. Отметим, что на рисунке 3.8 это должно было отражаться наличием участков желтого и зеленого цвета на оси симметрии; это несоответствие объясняется меньшей точностью, с которой проводились расчеты в отсутствие аксиальной симметрии. Если при решении одномерной задачи сохранить только  $N = 40$  слагаемых, как это было сделано в подразделах 3.5.1 и 3.5.2, мы не увидим такого явного различия в результатах, даваемых исходной и упрощенной формулами. С другой стороны, как уже говорилось, последняя может давать относительно точные результаты лишь при таком расположении частиц.

## Заключение

В настоящей работе с разных сторон рассмотрено электростатическое взаимодействие заряженных частиц с упором на случай малых расстояний между ними. В первой части работы приведено исследование взаимодействия двух пылевых частиц сферической формы в равновесной плазме и показано, что в режиме слабого и умеренного экранирования и при условии, что поверхности макрочастиц являются эквипотенциальными, возможно опосредованное нахождение силы их взаимодействия. Именно, в случае независимости полных зарядов частиц от разделяющего их расстояния искомая сила может быть найдена из силы взаимодействия в однородной диэлектрике с поправкой на плазменный множитель. Однако из условия термодинамического равновесия системы следует постоянство не зарядов макрочастиц, а потенциалов их поверхностей, и потому был предложен метод определения реальных зарядов пылевых частиц, находящихся на данном расстоянии друг от друга.

Описанная процедура опиралась на использование емкостных коэффициентов системы из двух сферических частиц, и во второй части работы был предложен метод расчета этих величин в случае макрочастиц-проводников, удовлетворяющих требованию независимости поверхностных потенциалов от угловых координат. Как было показано, разработанный метод сопряжения приближенных формул Максвелла с асимптотическими выражениями Рассела обладает достаточной для приложений точностью, но в принципе может быть усовершенствован за счет выбора функции сшивки. На основе найденных емкостных и потенциальных коэффициентов была вычислена потенциальная энергия взаимодействия частиц как функция расстояния между их поверхностями. Достоверность полученных данных была установлена посредством сравнения с результатами расчета в бисферической системе координат.

В третьей части работы было дано решение задачи об электростатическом взаимодействии трех заряженных макроскопических частиц, одна из которых считается точечной. Были представлены аналитические формулы для электростатического потенциала, поверхностной плотности заряда и силы взаимодействия, являющиеся обобщением известных выражений для более простой геометрии двух сферических частиц. Также было продемонстрировано, что,

несмотря на нарушение аксиальной симметрии, при равномерном распределении свободного заряда на сферических частицах момент сил, действующих на них, равен нулю. Далее было отмечено, что непосредственное использование полученных формул при малых расстояниях между частицами не позволяет получить надежные результаты в силу медленной сходимости рядов, определяющих вклад точечной частицы в ту или иную величину. Данная проблема была решена путем явного выделения дельта-членов в соответствующих рядах, что позволило исследовать влияние точечной частицы на возникновение притяжения между двумя одноименно заряженными диэлектрическими шарами. Было установлено, что притяжение к точечному заряду, находящемуся почти вплотную к одной из сфер, всегда перевешивает действие соседней сферической частицы, но в случае если поляризуемые частицы при данных параметрах находятся на расстоянии, близком к критическому, область влияния точечной частицы становится существенно шире: она может воспрепятствовать переходу шаров от отталкивания к притяжению или наоборот уже на расстояниях порядка их радиусов. Помимо перечисленного, были получены данные для плотности связанных зарядов на поверхностях диэлектриков и для компоненты полной силы, перпендикулярной оси, соединяющей их центры.

## Список литературы

1. Electrostatic interaction of macroparticles in a plasma in the strong screening regime / A. Filippov [и др.] // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2017. — Т. 125, № 3. — С. 518—529.
2. *Rodin M., Filippov A.* Accurate and approximate methods to calculate capacitance and potential coefficients of two-particle system // Journal of Physics: Conference Series. Т. 927. — IOP Publishing. 2017. — С. 012045.
3. *Pautov A., Rodin M., Filippov A.* Interaction potential of two spherical macroparticles at constant surface potentials // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1147. — IOP Publishing. 2019. — С. 012114.
4. *Hoffman J.* André-Marie Ampère: Poisson's 1812 Electricity Memoir. — 1995.
5. *Thomson W.* On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors // Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. — London : Macmillan, 1884. — С. 86—97.
6. *Maxwell J. C.* A treatise on Electricity and Magnetism. — 3rd ed. — Oxford, UK : Clarendon Press, 1891.
7. *Russell A.* The coefficients of capacity and the mutual attractions or repulsions of two electrified spherical conductors when close together // Proc. R. Soc. A. — 1909. — Т. 82, № 557. — С. 524—31.
8. *Lekner J.* Capacitance coefficients of two spheres // J. Electrostat. — 2011. — Т. 69, № 1. — С. 11—4.
9. *Lekner J.* Electrostatics of two charged conducting spheres // Proc. R. Soc. A. — 2012. — Т. 468, № 2145. — С. 2829—48. — DOI: 10.1098/rspa.2012.0133.
10. *Davis M. H.* Two charged spherical conductors in a uniform electric field: Forces and field strength // Q. J. Mech. Appl. Math. — 1964. — Т. 17, № 4. — С. 499—511.
11. *Filippov A. V.* Electrostatic interaction of spherical microparticles in dusty plasmas // Contrib. Plasma Phys. — 2009. — Т. 49, № 7—8. — С. 431—45.

12. *Filippov A. V.* Effect of the size of macroparticles on their electrostatic interaction in a plasma // J. Exp. Theor. Phys. — 2009. — T. 109, № 3. — C. 516–29.
13. *Saranin V. A.* On the interaction of two electrically charged conducting balls // Phys. Usp. — 1999. — T. 42, № 4. — C. 385.
14. *Nakajima Y., Sato T.* Calculation of electrostatic force between two charged dielectric spheres by the re-expansion method // J. Electrostat. — 1999. — T. 45, № 3. — C. 213–26.
15. Electrostatic analysis of the interactions between charged particles of dielectric materials / E. Bichoutskaia [и др.] // The Journal of chemical physics. — 2010. — T. 133, № 2. — C. 024105.
16. *Munirov V. R., Filippov A. V.* Interaction of two dielectric macroparticles // J. Exp. Theor. Phys. — 2013. — T. 117, № 5. — C. 809–19.
17. *Munirov V., Filippov A.* Interaction of a dielectric macroparticle with a point charge in plasma // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2012. — T. 115, № 3. — C. 527–534.
18. *Horányi M.* Charged dust dynamics in the solar system // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1996. — T. 34, № 1. — C. 383–418.
19. *Goertz C., Morfill G.* A model for the formation of spokes in Saturn's ring // Icarus. — 1983. — T. 53, № 2. — C. 219–229.
20. Photoelectric charging of dust particles in vacuum / A. Sickafoose [и др.] // Physical review letters. — 2000. — T. 84, № 26. — C. 6034.
21. *Winter J.* Dust in fusion devices—experimental evidence, possible sources and consequences // Plasma physics and controlled fusion. — 1998. — T. 40, № 6. — C. 1201.
22. Transport of dust particles in glow-discharge plasmas / M. S. Barnes [и др.] // Physical review letters. — 1992. — T. 68, № 3. — C. 313.
23. *Stace A. J., Bichoutskaia E.* Treating highly charged carbon and fullerene clusters as dielectric particles // Physical Chemistry Chemical Physics. — 2011. — T. 13, № 41. — C. 18339–18346.



24. *Sartor J. D.* Some electrostatic cloud-droplet collision efficiencies // Journal of Geophysical Research. — 1960. — T. 65, № 7. — С. 1953—1957.
25. *Ochs H. T., Czys R. R.* Charge effects on the coalescence of water drops in free fall // Nature. — 1987. — T. 327, № 6123. — С. 606—608.
26. The effect of like-charge attraction on aerosol growth in the atmosphere of Titan / *E. B. Lindgren [и др.]* // Icarus. — 2017. — Т. 291. — С. 245—253.
27. *Feng J. Q.* Electrostatic interaction between two charged dielectric spheres in contact // Physical Review E. — 2000. — Т. 62, № 2. — С. 2891.
28. *Ivlev A., Morfill G., Konopka U.* Coagulation of charged microparticles in neutral gas and charge-induced gel transitions // Physical Review Letters. — 2002. — Т. 89, № 19. — С. 195502.
29. *Tinsley B.* The global atmospheric electric circuit and its effects on cloud microphysics // Reports on Progress in Physics. — 2008. — Т. 71, № 6. — С. 066801.
30. *Hobson E. W.* The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. — Cambridge : The University Press, 1931.
31. *Batygin V. V., Toptygin I. N.* Problems in Electrodynamics. — 1970.
32. *Smythe W. R.* Static and dynamic electricity. — New York Toronto London : Taylor, Francis, 1950. — 2nd ed.
33. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids // Conduction of heat in solids. — 1947.
34. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. Т. 3. — The University Press, 1922.
35. *Filippov A., Derbenev I.* Effect of the size of charged spherical macroparticles on their electrostatic interaction in an equilibrium plasma // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2016. — Т. 123, № 6. — С. 1099—1109.
36. *Larsen A. E., Grier D. G.* Like-charge attractions in metastable colloidal crystallites // Nature. — 1997. — Т. 385, № 6613. — С. 230—233.

37. Electrostatic interactions between charged dielectric particles in an electrolyte solution: constant potential boundary conditions / I. N. Derbenev [и др.] // *Soft Matter*. — 2018. — Т. 14, № 26. — С. 5480—5487.
38. *MacRobert T. M.* Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic functions with applications. — 1947.
39. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Course of Theoretical Physics, Vol. 8: Electrodynamics of Continuous Media. — Oxford : Butterworth–Heinemann, 1984.
40. *Davis P. J.* Gamma function and related functions // *Handbook of Mathematical Functions* / под ред. М. Abramowitz, I. A. Stegun. — New York : National Bureau of Standards, 1972. — Гл. 6. С. 253—96.
41. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A course of modern analysis. — Cambridge university press, 1996.
42. Single dust-particle rotation in glow-discharge plasma / V. Y. Karasev [и др.] // *Physical Review E*. — 2009. — Т. 79, № 2. — С. 026406.
43. Self-Rotation of Dust Particles in Induction-Type RF Discharge / V. Y. Karasev [и др.] // *Technical Physics*. — 2019. — Т. 64, № 1. — С. 42—46.
44. *Krasheninnikov S., Smirnov R., Rudakov D.* Dust in magnetic fusion devices // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2011. — Т. 53, № 8. — С. 083001.
45. *Simons L., Long A.* Rotational motion of spherical dust in plasmas with magnetic fields // *Physics of Plasmas*. — 2021. — Т. 28, № 9. — С. 093702.
46. *Ratynskaia S., Bortolon A., Krasheninnikov S.* Dust and powder in fusion plasmas: recent developments in theory, modeling, and experiments // *Reviews of Modern Plasma Physics*. — 2022. — Т. 6, № 1. — С. 1—50.
47. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — Наука, 1983.
48. *Wysin G.* Associated Legendre Functions and Dipole Transition Matrix Elements. — 2011.

## Приложение А

### А.1 Интегралы некоторых тригонометрических функций

При вычислении проекций силы, действующей на сферическую частицу, нам были полезны следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)\varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+k)\varphi d\varphi = \\ &= \pi (\delta_{km} + \delta_{k0}\delta_{m0}) = \pi (1 + \delta_{m0}) \delta_{km}. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} m \sin m\varphi k \sin k\varphi d\varphi &= \frac{mk}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)\varphi d\varphi - \frac{mk}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+k)\varphi d\varphi = \\ &= \pi mk (\delta_{km} - \delta_{k0}\delta_{m0}) = \pi m^2 \delta_{km}. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы опустили множитель  $(1 - \delta_{m0})$ , поскольку при  $m = 0$  правая часть обнуляется и без него, а при  $m \geq 1$  он равен единице. В выкладках мы для удобства добавляем множитель  $(1 + \delta_{m0})$ , который по тем же причинам

не сказывается на результате.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)\varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+k)\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k-1)\varphi d\varphi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k+1)\varphi d\varphi + \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k-1)\varphi d\varphi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k+1)\varphi d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} [\delta_{m,k+1} + \delta_{k,m+1} + (\delta_{k0}\delta_{m1} + \delta_{k1}\delta_{m0}) + 0] = \\
&= \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{m0}) \delta_{k,m+1} + \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{k0}) \delta_{m,k+1}. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} m \sin m\varphi k \sin k\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{mk}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)\varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{mk}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+k)\varphi \cos \varphi d\varphi = \\
&= \frac{mk}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k-1)\varphi d\varphi + \frac{mk}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k+1)\varphi d\varphi - \\
&- \frac{mk}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k-1)\varphi d\varphi - \frac{mk}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k+1)\varphi d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} mk [\delta_{m,k+1} + \delta_{k,m+1} - (\delta_{k0}\delta_{m1} + \delta_{k1}\delta_{m0}) - 0] = \\
&= \frac{\pi}{2} m(m+1) \delta_{k,m+1} + \frac{\pi}{2} k(k+1) \delta_{m,k+1}. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Для удобства вычислений мы, как и при использовании интеграла (A.2), добавляли здесь к первому и второму слагаемому, соответственно, множители

ли  $(1 + \delta_{m0})$  и  $(1 + \delta_{k0})$ .

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos m\varphi k \sin k\varphi \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m+k)\varphi \sin \varphi d\varphi - \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m-k)\varphi \sin \varphi d\varphi = \\
&= \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k-1)\varphi d\varphi - \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m+k+1)\varphi d\varphi - \\
&- \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k-1)\varphi d\varphi + \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m-k+1)\varphi d\varphi = \\
&= \frac{\pi k}{2} [(\delta_{k0}\delta_{m1} + \delta_{k1}\delta_{m0}) - 0 - \delta_{m,k+1} + \delta_{k,m+1}] = \\
&= \frac{\pi}{2} (m+1) (1 + \delta_{m0}) \delta_{k,m+1} - \frac{\pi}{2} k \delta_{m,k+1}. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Аналогично, в выкладках второе слагаемое было домножено на  $(1 + \delta_{k0})$ .

## А.2 Свойства присоединенных функций Лежандра

Для получения рекуррентных формул, связывающих присоединенные функции Лежандра с соседними индексами, можно воспользоваться производящей функцией:

$$\frac{(2m-1)!! (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} t^m}{(1-2t\mu+t^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^m(\mu).$$

В том или ином порядке перенося множители и дифференцируя по  $t$ , из нее можно получить три основных рекуррентных соотношения, которые отвечают, соответственно, сохранению, увеличению или уменьшению верхнего индекса [48]:

$$(2n+1)\mu P_n^m = (n+m)P_{n-1}^m + (n-m+1)P_{n+1}^m \quad (\text{A.6})$$

$$(2n+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m-1} = P_{n+1}^m - P_{n-1}^m \quad (\text{A.7})$$

$$(2n+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m+1} = -(n-m)(n-m+1)P_{n+1}^m + (n+m)(n+m+1)P_{n-1}^m \quad (\text{A.8})$$

Подчеркнем, что везде в дальнейшем присоединенные функции Лежандра рассматриваются при общем значении аргумента, поэтому для краткости мы будем его опускать.

Выразим  $P_{n-1}^m$  из (A.7) и подставим в (A.8). Тогда для  $P_{n+1}^m$  получим:

$$P_{n+1}^m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2m} [P_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)P_n^{m-1}].$$

Аналогично, подстановка  $P_{n+1}^m$  из (A.7) в (A.8) дает:

$$P_{n-1}^m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2m} [P_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)P_n^{m-1}].$$

Полученные равенства для  $P_{n\pm 1}^m$  позволяют переписать соотношение (A.6) в следующем виде:

$$\frac{m\mu P_n^m}{\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{1}{2} [P_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}]; \quad (\text{A.9})$$

это тождество пригодится нам в дальнейшем.

Найдем теперь производную присоединенной функции Лежандра по полярному углу:

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{d\mu^m} \right] = \frac{m\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m - P_n^{m+1}.$$

Воспользовавшись (A.9), получаем еще одно полезное тождество:

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [-P_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}]. \quad (\text{A.10})$$

Умножив его на  $\sqrt{1-\mu^2}$  и применив к первому слагаемому правой части соотношение (A.8), а ко второму – (A.7), находим:

$$\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{n(n-m+1)}{2n+1} P_{n+1}^m - \frac{(n+1)(n+m)}{2n+1} P_{n-1}^m. \quad (\text{A.11})$$

Теперь с помощью (A.9) и (A.10) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} + \frac{mk}{1-\mu^2} P_n^m P_l^k &= \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^k}{\partial \theta} + \frac{m\mu P_n^m}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{k\mu P_l^k}{\sqrt{1-\mu^2}} + mk P_n^m P_l^k = mk P_n^m P_l^k + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ -P_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} \right] \left[ -P_l^{k+1} + (l+k)(l-k+1) P_l^{k-1} \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[ P_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} \right] \left[ P_l^{k+1} + (l+k)(l-k+1) P_l^{k-1} \right] = \\ &= mk P_n^m P_l^k + \frac{1}{2} \left[ P_n^{m+1} P_l^{k+1} + (n+m)(n-m+1)(l+k)(l-k+1) P_n^{m-1} P_l^{k-1} \right]. \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} + \frac{m^2}{1-\mu^2} P_n^m P_l^m &= m^2 P_n^m P_l^m + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ P_n^{m+1} P_l^{m+1} + (n+m)(n-m+1)(l+m)(l-m+1) P_n^{m-1} P_l^{m-1} \right] \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{m(m+1)}{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} &= m(m+1) P_n^m P_l^{m+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ P_n^{m+1} P_l^{m+2} + (n+m)(n-m+1)(l+m+1)(l-m) P_n^{m-1} P_l^m \right]. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Далее, складывая и вычитая тождества (A.9) и (A.10), находим:

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} + \frac{m\mu P_n^m}{\sqrt{1-\mu^2}} = (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} - \frac{m\mu P_n^m}{\sqrt{1-\mu^2}} = -P_n^{m+1}. \quad (\text{A.15})$$

С помощью (A.14) можно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} + \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m &= \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} + m \left( \sqrt{1-\mu^2} P_n^m + \frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \right) = \\ &= \mu \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} + \frac{m\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \right) + m \sqrt{1-\mu^2} P_n^m = \\ &= \mu (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} + m \sqrt{1-\mu^2} P_n^m. \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Если же поменять знак второго слагаемого в левой части (A.16), то с помощью (A.15) можно прийти к более компактному результату:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} - \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m &= \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} - m \left( \sqrt{1-\mu^2} P_n^m + \frac{\mu^2}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \right) = \\
&= \mu \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} - \frac{m\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \right) - m \sqrt{1-\mu^2} P_n^m = \\
&= -\mu P_n^{m+1} - \frac{m}{2n+1} (P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1}) = \\
&\stackrel{(A.6)}{=} -\frac{n+1}{2n+1} P_{n-1}^{m+1} - \frac{n}{2n+1} P_{n+1}^{m+1}. \quad (A.17)
\end{aligned}$$

Полученные выше соотношения между присоединенными функциями Лежандра приводят к ряду полезных интегралов, что будет показано в следующем разделе. Сейчас же докажем два тождества, которые находят в данной работе непосредственное применение:

$$(n+1) \mu P_n^m + \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = (n-m+1) P_{n+1}^m \quad (A.18)$$

$$(n+1) \sqrt{1-\mu^2} P_n^m - \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [P_{n+1}^{m+1} - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}]. \quad (A.19)$$

Если первое из них немедленно следует из равенств (A.6) и (A.11), то второе стоит рассмотреть подробнее. Для удобства последующих преобразований домножим обе его части на  $2(2n+1)$ . Тогда, согласно (A.7), первое слагаемое левой части равно

$$2(n+1)(2n+1) \sqrt{1-\mu^2} P_n^m = 2(n+1) P_{n+1}^{m+1} - 2(n+1) P_{n-1}^{m+1}.$$

Второе слагаемое представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
2(2n+1) \mu \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} &\stackrel{(A.10)}{=} - (2n+1) \mu P_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1) (2n+1) \mu P_n^{m-1} = \\
&\stackrel{(A.6)}{=} - (n+m+1) P_{n-1}^{m+1} - (n-m) P_{n+1}^{m+1} + \\
&+ (n+m)(n-m+1)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1} + (n+m)(n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}.
\end{aligned}$$



После приведения подобных получаем, что доказываемое тождество (A.19) эквивалентно равенству

$$P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} = -(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} + (n+m-1)(n+m)P_{n-1}^{m-1},$$

справедливость которого непосредственно следует из рекуррентных соотношений (A.7) и (A.8).

Наконец, отметим, что полученные в этом разделе тождества, содержащие в правой части функцию с верхним индексом  $m-1$ , естественно считать справедливыми только при  $m \geq 1$ . Так, соотношение (A.19) при  $m=0$  уже не содержит коэффициента  $\frac{1}{2}$  в правой части:

$$(n+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n - \mu\frac{\partial P_n}{\partial\theta} = P_{n+1}^1. \quad (\text{A.20})$$

Аналогичное замечание справедливо применительно к соотношению (A.10).

### A.3 Интегралы от выражений, содержащих присоединенные функции Лежандра

Отправной точкой для вычисления необходимых нам интегралов является равенство

$$\int_{-1}^1 P_n^m P_l^m d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{ln}, \quad (\text{A.21})$$

выражающее ортогональность присоединенных функций Лежандра. Воспользовавшись им и рекуррентным соотношением (A.6), найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu P_n^m P_l^m d\mu &= \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} + \\ &+ \frac{2}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \delta_{n,l+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Если проинтегрировать тождество (A.12) с весом  $\mu$  и воспользоваться интегралом (A.22), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mu \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} + \frac{m^2}{1-\mu^2} P_n^m P_l^m \right) d\mu = \\ & = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} + \frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \delta_{n,l+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Из равенства (A.11) и свойства ортогональности (A.21) находим еще один интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} d\mu = \\ & = -\frac{2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} + \frac{2l}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \delta_{n,l+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Аналогично, из соотношения (A.8) получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} d\mu = \\ & = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} - \frac{2}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \delta_{n,l+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Интегрируя равенство (A.13) с весом  $\sqrt{1-\mu^2}$  и используя интеграл (A.25), приходим к следующему:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} \left( \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{m(m+1)}{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} \right) d\mu = \\
& = m(m+1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^m P_l^{m+1} d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^{m+1} P_l^{m+2} d\mu + \\
& + \frac{1}{2} (n+m)(n-m+1)(l+m+1)(l-m) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\mu^2} P_n^{m-1} P_l^m d\mu = \\
& = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} - \frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \delta_{n,l+1}.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Из тождества (A.16) с помощью интегралов (A.22) и (A.25) находим:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 P_n^m \left( \mu \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{m+1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^{m+1} \right) d\mu = \\
& = \frac{2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \delta_{l,n+1} + \frac{2l}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!} \delta_{n,l+1}.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Чтобы проинтегрировать равенство (A.17) с весом  $P_n^{m+1}$ , снова достаточно воспользоваться условием ортогональности (A.21). Имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left( \mu \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} - \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^m \right) P_n^{m+1} d\mu = \\
& = -\frac{2(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} \delta_{l,n+1} - \frac{2l}{(2l+1)(2l+3)} \frac{(l+m+2)!}{(l-m)!} \delta_{n,l+1}.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Наконец, непосредственно из тождеств (A.14), (A.15) и свойства ортогональности получаем следующие два интеграла:

$$\int_{-1}^1 P_n^m \left( \frac{\partial P_l^{m+1}}{\partial \theta} + \frac{(m+1)\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^{m+1} \right) d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} \delta_{ln},$$

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} - \frac{m\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P_l^m \right) P_n^{m+1} d\mu = -\frac{2}{2n+1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} \delta_{ln}. \quad (\text{A.29})$$