

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Объединенный институт высоких температур Российской академии наук

На правах рукописи

УДК: 537.84

Виноградов Дмитрий Андреевич

**Электровихревое течение жидкого металла
в полусферическом контейнере при воздействии
внешнего магнитного поля**

Специальность 1.3.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.т.н. Тепляков И.О.

Москва – 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1 Литературный обзор	19
1.1 Обзор численных и теоретических исследований ЭВТ при отсутствии внешнего магнитного поля	19
1.2 Обзор экспериментальных исследований	25
1.3 Обзор исследований ЭВТ под воздействием внешнего магнитного поля....	30
1.4 Анализ литературных источников и постановка задач исследования	38
Глава 2 Экспериментальная установка и измерительная методика	41
2.1 Описание экспериментальной установки	41
2.2 Система охлаждения экспериментальной установки	43
2.3 Системы создания и подавления осевого магнитного поля.....	44
2.4 Автоматическая система измерений.....	46
2.5 Методика измерений температуры и скорости жидкого металла термокорреляционным датчиком.....	49
2.6 Методика измерений скорости волоконно-оптическим преобразователем..	51
2.7 Методика измерения скорости закрутки жидкого металла на поверхности с использованием водородных меток.....	54
2.8 Оценка погрешностей измерений	55
2.9 Выводы к главе 2.....	60
Глава 3 Математическое описание процесса и численная методика.....	62
3.1 Основные уравнения	62
3.2 Расчет плотности электрического тока	64
3.3 Методика расчета магнитного поля.....	66
3.4 Расчет магнитного поля с использованием технологии NVIDIA CUDA.....	71

3.5 Расчет электромагнитной силы	76
3.6 Различные МГД приближения при моделировании ЭВТ	77
3.7 Методика численного моделирования полей скорости в объеме жидкого металла	80
3.8 О правомерности применения численных методик	83
3.9 Выводы по главе 3	85
Глава 4 Результаты численно-экспериментальных исследований и их анализ	87
4.1 Результаты исследования ЭВТ при отсутствии внешних МП	87
4.2 Результаты исследования вихреобразования в ЭВТ	89
4.3 Исследование применимости различных МГД приближений	96
4.4 Исследование параметров и структуры ЭВТ в широком диапазоне внешних МП	101
4.5 Место результатов диссертационной работы среди существующих экспериментальных и численных исследований	106
4.6 Выводы к главе 4	111
Заключение	113
Список обозначений и сокращений	116
Список литературы	119

Введение

Среди различных магнитогидродинамических процессов особый интерес представляют электровихревые течения (ЭВТ), возникающие в результате взаимодействия неоднородного электрического тока $\mathbf{J}$, протекающего через жидкий металл, с собственным магнитным полем (МП) $\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}$ [1]. В объеме расплава при этом действует электромагнитная сила $\mathbf{F}_{\text{эл}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}$, распределение которой по объему, как правило, существенно неоднородно и не может быть целиком скомпенсировано градиентом давления. Именно эта сила приводит к возникновению в жидкости вихревого движения.

Для наглядности рассмотрим модель растекания тока от точечного источника в полубесконечный объем расплавленного металла (рисунок 1). От источника ток растекается по объему проводящей жидкости. Между элементарными токонесущими проводниками 2 и 3, содержащими токи одного направления, возникает сила Ампера, приводящая к их взаимному притяжению. Вблизи источника (в окрестности точки I), где плотность электрического тока максимальна, электромагнитная сила больше, чем на периферии. В результате возникает ненулевой момент сил, расплав закручивается. В неограниченной области полоидальное движение проявляется как погруженная струя, тогда как в ограниченном объеме оно замыкается обратным потоком и представляет собой тороидальный (полоидальный) вихрь.

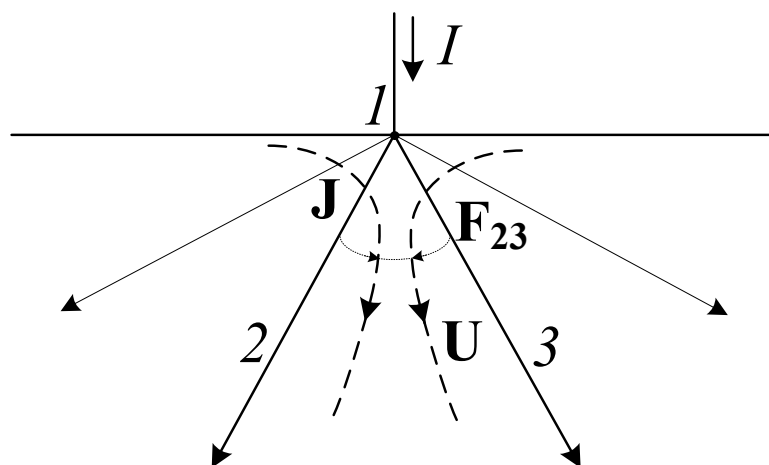


Рисунок 1 – Схема образования ЭВТ.

Для возникновения движения в проводящей жидкости необходимо, чтобы распределение силы $\mathbf{J} \times \mathbf{V}_{\text{ЭВТ}}$ имело вихревой характер ($\nabla \times \mathbf{F}_{\text{эл}} \neq 0$), что возможно лишь при пространственной неоднородности электрического тока [1]. Таким образом, электровихревые течения возникают за счет объемной электромагнитной силы, а их интенсивность определяется балансом между этой силой и тормозящим действием вязкости.

Исследования ЭВТ, помимо своей фундаментальной значимости, обладают высокой прикладной ценностью для отраслей машиностроения и электрометаллургии, а также для систем хранения энергии (жидкометаллические батареи).

В последние годы наблюдается повышенный интерес ученых и инженеров к жидкометаллическим батареям (ЖМБ) [2–6]. ЖМБ состоит из двух слоев разных жидких металлов (один служит катодом, а другой – анодом) и слоя электролита между ними. При протекании электрического тока в ЖМБ возникает ЭВТ, интенсивность которого зависит от тока нагрузки. При этом особое внимание уделяется поведению границы раздела, при деформации которой может возникнуть короткое замыкание между жидкими металлами. Следует отметить, что пусковые токи в батареях превышают рабочие токи примерно на два порядка, в связи с этим отдельно ведется изучение ЭВТ в переходных процессах работы ЖМБ.

В промышленной электрометаллургии, в частности, в электролизерах с токами порядка 200–300 кА, а также в процессах электрошлаковой сварки (ЭШС), электродугового и электрошлакового переплава (ЭШП) электровихревые течения могут существенно влиять на гидродинамику расплава и эффективность перемешивания.

На рисунке 2 показана типовая схема электрошлаковой сварки [7–11], величина электрического тока в которой достигает порядка 1 кА. Сначала происходит плавление шлака, а затем металла, при этом в слоях жидкого металла и шлака образуются электровихревые течения.

В электрошлаковом переплаве [12–16] металл переплавляют в рабочей ванне электропроводного шлака, которая сформирована в водоохлаждаемом кристаллизаторе цилиндрической формы (рисунок 3). В ванну сверху вводится плавкий электрод

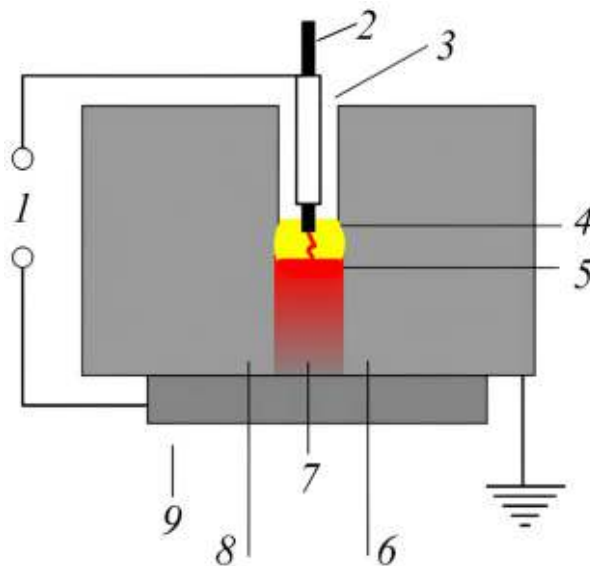


Рисунок 2 – Схема электрошлаковой сварки. 1 – источник питания, 2 – плавкая проволока; 3 – направляющая трубка, 4 – шлаковая ванна, 5 – металлическая ванна; 6, 8 – свариваемые детали, 7 – сварной шов, 9 – подкладная плита.

из требуемого металла, между электродом и формирующимся слитком пропускается электрический ток ($I = 1\text{--}100\text{ кА}$). Джоулево тепловыделение в шлаке приводит к его интенсивному разогреву и плавлению конца электрода. Капли жидкого металла после прохождения через расплавленный шлак попадают в нижнюю часть кристаллизатора и формируют металлическую ванну. Затвердевание слитка происходит за счет теплоотвода через охлаждаемые стенки кристаллизатора. При этом в расплаве металла и в шлаке формируются электровихревые течения.

На рисунке 4 показана схема электродугового переплава в печи постоянного тока (ЭДППТ) [17–20]. В этих агрегатах, которые сегодня активно используются в электрометаллургии, необходимо учитывать влияние электровихревых течений. Ключевое отличие ЭДППТ от процессов электрошлакового переплава и электрошлаковой сварки заключается в наличии электрической дуги вместо электрода, погруженного в жидкий металл. Кроме того, подвод тепла в ЭДППТ осуществляется преимущественно за счет излучения дуги и теплопередачи от дугового разряда, тогда как в электрошлаковых процессах основной разогрев обеспечивается джоулевым тепловыделением при протекании тока через электропроводящий шлак.

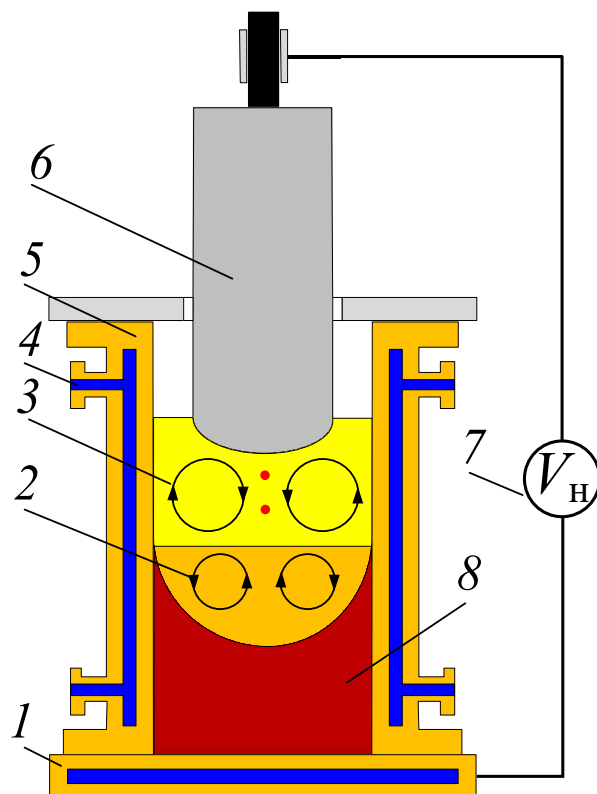


Рисунок 3 – Схема электрошлакового переплава. 1 – охлаждаемый поддон, 2, 3 – ЭВТ в слое жидкого металла и шлака, 4 – охлаждающая жидкость, 5 – охлаждаемые стенки, 6 – плавкий электрод, 7 – источник питания, 8 – слиток.

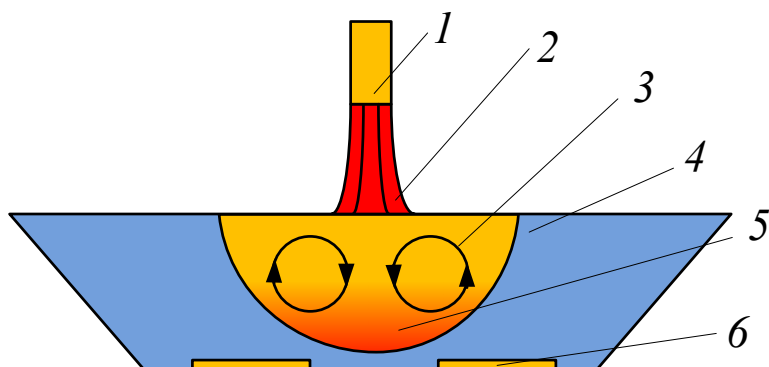


Рисунок 4 – Упрощенная схема электродугового переплава. 1 – центральный электрод, 2 – электрическая дуга, 3 – электромагнитные вихревые течения в расплаве, 4 – рабочая ванна, 5 – жидкий металл, 6 – подовые электроды.

Из приведенных иллюстраций следует, что электромагнитные вихревые течения в рассматриваемых процессах формируются в ограниченном объеме расплава. В первом приближении можно считать, что ток, вводимый малым электродом, распределяется в расплавленном металле внутри цилиндрической или полусферической ванны.

На практике установлено, что электровихревые течения заметно влияют как на срок службы промышленного агрегата, так и на равномерность перемешивания расплава жидкого металла. Поэтому детальный анализ структуры ЭВТ и методик их регулирования представляет серьезный интерес для конструкторов современных электроплавильных установок, позволяя получать материалы с особыми физическими свойствами.

С начала 1970-х годов внимание исследователей к электровихревым течениям постоянно возрастало. В настоящей работе рассмотрены исследования, посвященные течениям в замкнутых объемах, заполненных токонесущей жидкостью. К таким течениям, в частности, относятся электровихревые течения, возникающие при растекании электрического тока от точечного источника в полусферический или цилиндрический объем жидкого металла. Такая геометрия наиболее близка к промышленным агрегатам, в связи с этим актуальность исследований в этой тематике не вызывает сомнений. От характеристик ЭВТ напрямую зависят продолжительность плавления и время перемешивания при получении сплавов. Наиболее простым способом управления структурой ЭВТ является изменение электрического тока, однако на практике повышение тока приводит к росту осевых скоростей потока, что увеличивает давление на дно плавильной ванны и вызывает локальный перегрев в зоне большого электрода, ускоряя износ промышленной установки. Температура в промышленном агрегате также зависит от значения электрического тока и существенно влияет на реакции восстановления и окисления, что существенным образом затрудняет управление структурой ЭВТ с использованием электрического тока.

Для технологических приложений важна возможность целенаправленного изменения структуры и интенсивности электровихревых течений. В литературе показано, что управлять течением можно как за счет изменения конфигурации токоподвода и формы рабочего объема, так и посредством наложения внешнего магнитного поля. Такой подход рассматривается как потенциально удобный инструмент регулирования процессов в жидком металле, не требующий существенного изменения конструкции установки.

Из-за высокой температуры электропроводящих расплавов прямые исследования электровихревых течений в промышленных агрегатах существенно затруднены. Поэтому основные закономерности ЭВТ обычно изучают методами математического и физического (лабораторного) моделирования на легкоплавких жидких металлах. Экспериментальная работа опирается на разные методики, каждая из которых имеет собственные сильные и слабые стороны. Ключевым остается выбор надежного способа измерения скорости жидкого металла. Ниже представлены наиболее распространенные методы измерения скорости течения жидкого металла, позволяющие исследовать структуру и особенности ЭВТ.

Трубка Пито является самым старым методом измерения скорости жидких сред, но этот метод неэффективен из-за высокой плотности жидких металлов (за исключением натрия), при этом он позволяет получить только средние значения скорости течения. Измерения трубкой Пито на скоростях до 0.1 м/с дают существенную погрешность измерений (~50 %), а для больших скоростей измерения более затруднены из-за наличия возмущений в потоке жидкого металла (вызванных самой трубкой Пито) [21; 22].

Термоанемометр основан на измерении снижения температуры нагреваемой нити под действием потока жидкости или газа, и в связи с этим неэффективен в средах с высокой теплопроводностью, к которым относятся жидкие металлы (тем не менее, существуют попытки использования этого метода в отношении жидких металлов) [23–25].

Метод на основе измерения силы Лоренца, действующей со стороны движущейся проводящей жидкости на постоянный магнит, позволяет измерять только усредненные по пространству значения скорости [26–29].

Ультразвуковой доплеровский анемометр (УДА) обеспечивает точечное измерение скорости потока вдоль зондирующего луча и не требует прямого контакта с расплавом [30–32]. Однако его практическое применение ограничено по нескольким причинам. Во-первых, прибор чувствителен к ориентации луча и бывает достаточно сложно разместить УДА на лабораторной установке. Во-вторых, для отражения ультразвука в металле должны присутствовать твердые включения – чаще всего ок-

сидные частицы; из-за этого метод пригоден главным образом для галлиевых расплавов, активно окисляющихся при контакте с воздухом. Кроме того, множественные отражения от стенок контейнера формируют «слепые» зоны. Таким образом, часть объема жидкого металла остается недоступной для наблюдения. По этим причинам УДА не позволяет детально изучать турбулентную структуру электровихревых течений и служит главным образом для определения осредненных скоростей и низкочастотных пульсаций.

Волоконно-оптический метод – зондовый метод измерения скорости жидкого металла, который позволяет проводить тонкие измерения (включая пульсации скорости) в небольшом измерительном объеме ($40 \times 40 \times 500$ мкм) [33–35]. Более подробно методика описана в параграфе 2.6.

Корреляционный метод основан на измерении температурных пульсаций двумя термопарами [36–41]. Данный метод выгодно выделяется среди прочих за счет возможности измерения скорости непосредственно в промышленных установках, однако погрешность данного метода может достигать 30–40 %. Описание корреляционного метода представлено в параграфе 2.5.

Метод измерения скорости на поверхности электропроводящей жидкости с использованием различных «маячков» или «маркеров» основан на следующем подходе. Применительно к жидким металлам обычно на поверхность наливается раствор кислоты (серной, соляной, ортофосфорной и др.), и на поверхности металла начинается химическая реакция с выделением пузырьков водорода (маркеры для измерения скорости течения).

В настоящей работе в качестве основных инструментов измерения скорости в электровихревых течениях применялись волоконно-оптический датчик скорости, корреляционный зонд и метод измерения скорости течения на поверхности жидкого металла с использованием маркеров. Эти подходы образуют методологическую основу настоящего исследования и формируют базу для представления и обсуждения полученных результатов.

Актуальность темы исследования. Повышение требований к качеству электрометаллургической продукции обуславливает необходимость дальнейшего со-

вершенствования и модернизации промышленных агрегатов. Важным направлением такой модернизации является управление электровихревыми течениями (ЭВТ), формирующимися в расплаве жидкого металла плавильных установок [1]. Электровихревые течения существенно изменяют гидродинамическую структуру потока и тем самым напрямую влияют на скорость плавки, интенсивность и однородность перемешивания расплава. Поскольку указанные факторы в значительной степени определяют качество готового продукта, исследование ЭВТ представляет собой важную и актуальную задачу.

Модель растекания тока в цилиндрическом или полусферическом объеме с локальным подводом тока воспроизводит ключевую особенность ряда электрометаллургических процессов - резко неоднородное распределение плотности тока и электромагнитной силы вблизи малого электрода, приводящее к возникновению электровихревых течений. При этом структура ЭВТ изменяется вследствие воздействия магнитных полей различной интенсивности и конфигурации. Рассматриваемая постановка соответствует условиям ряда промышленных процессов - от электрошлаковой сварки до электродугового и электрошлакового переплава и потому является удобной моделью для систематического исследования влияния электрического тока и магнитного поля на характеристики ЭВТ.

Внешнее магнитное поле является эффективным средством управления структурой ЭВТ, вызывая существенную перестройку течения. При этом в зависимости от величины поля возможны как интенсификация, так и подавление ЭВТ. Поэтому целесообразно провести детальное исследование структуры и характеристик электровихревых течений под воздействием внешнего магнитного поля, так как полученные данные могут быть использованы с целью модернизации промышленных металлургических установок для повышения их эффективности.

Степень разработанности темы исследования. Исследования ЭВТ велись в ряде ведущих научно-исследовательских институтов по всему миру: ОИВТ РАН (Москва, Россия), University of Sheffield (Шеффилд, Великобритания), University of Cambridge (Кембридж, Великобритания), University of Latvia (Рига, Латвия), ИМСС УрО РАН (Пермь, Россия), МГТУ им. Г.И. Носова (Магнитогорск, Россия), Helm-

holtz-Zentrum Dresden-Rossendorf (Дрезден, Германия), Universite Paris-Saclay (Орсэ, Франция) и др.

На момент начала выполнения диссертационной работы для рассматриваемой постановки задачи были известны следующие особенности и закономерности ЭВТ:

1. ЭВТ при отсутствии внешних МП представляет собой осесимметричный тороидальный вихрь, направленный вниз в области под малым электродом или дугой.

2. Течение вблизи малого электрода представляет собой затопленную струю.

3. Внешнее магнитное поле приводит к уменьшению придонного давления в области под малым электродом, а при достаточно сильном внешнем магнитном поле формируется область пониженного давления.

4. Внешнее продольное магнитное поле приводит к возникновению азимутальной закрутки жидкого металла и образованию вторичных вихрей, которые противонаправлены основному течению.

5. Магнитное поле Земли так же, как и МП искусственного происхождения, приводит к азимутальной закрутке течения.

6. При достаточно большом внешнем МП основной тороидальный вихрь полностью подавляется вторичным противонаправленным течением.

7. При численном моделировании ЭВТ при отсутствии внешнего магнитного поля электродинамическое приближение (ЭД) справедливо для $S < 10^{12}$ ($I \sim 30$ кА).

Более подробный обзор исследований, посвященных ЭВТ, представлен в первой главе диссертации.

Цели и задачи работы. В данной диссертационной работе требовалось исследовать особенности ЭВТ в полусферическом контейнере в широком диапазоне внешних МП и тем самым расширить информацию о гидродинамической структуре ЭВТ при наличии внешнего МП. Таким образом, для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Выполнить экспериментальные исследования ЭВТ при наличии магнитного поля Земли и при его компенсации.

2. Провести исследования вихреобразования в ЭВТ при внешних осевых МП средней величины ($B_z = 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл).

3. Исследовать границы применения различных магнитогидродинамических (МГД) приближений при численном моделировании ЭВТ при влиянии внешнего МП ($B_z = 10^{-3}$ –1 Тл).

4. Провести дополнительные исследования интегральных характеристик ЭВТ (характерные скорости, кинетическая энергия течения) при внешних магнитных полях средней величины ($B_z = 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл), а также исследовать ЭВТ при сильных внешних магнитных полях ($B_z = 10^{-3}$ –1 Тл) с учетом установленной области применимости МГД приближений.

Научная новизна. В данной диссертационной работе с использованием комплекса экспериментальных и численных методов получены новые данные о структуре электровихревого течения в полусферическом контейнере в широком диапазоне значений внешнего осевого магнитного поля. В ранее опубликованных работах других авторов влияние внешнего магнитного поля исследовалось преимущественно для отдельных режимов течения или в ограниченном диапазоне его значений.

Таким образом, впервые:

1. Экспериментально установлено, что магнитное поле Земли приводит к снижению осевой скорости в области струи электровихревого течения эвтектического сплава In-Ga-Sn по сравнению с режимом компенсации геомагнитного поля ($I = 100$ – 450 А, $S = 10^7$ – 2×10^8 , $N = 1.6 \times 10^4$ – 1.8×10^6).

2. Установлены закономерности автоколебаний жидкого металла в электровихревом течении в зависимости от величины внешнего магнитного поля ($I = 400$ А, $B_z = 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл, $S = 1.7 \times 10^8$, $N = 3.2 \times 10^6$ – 3.2×10^7).

3. Экспериментально и численно получены данные о времени образования восходящего тороидального вихря в зависимости от величины внешнего МП ($I = 400$ А, $B_z = 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл, $S = 1.7 \times 10^8$, $N = 3.2 \times 10^6$ – 3.2×10^7).

4. Численным методом получена граница раздела зон одновихревого и двухвихревого течения в координатах $B_z(I)$ ($I = 1$ – 1000 А, $B_z = 10^{-5}$ – 1.4×10^{-4} Тл, $S = 10^3$ – 10^9 , $N = 788$ – 1.1×10^7).

5. Исследована применимость различных МГД приближений в ЭВТ при воздействии внешнего МП ($B_z = 10^{-3}$ –1 Тл, $S = 10^5$ – 3.2×10^{11} , $N = 7.8 \times 10^5$ – 2×10^{11} , $St = 4.8 \times 10^{-3}$ – 4×10^4).

6. Выявлен эффект электромагнитного торможения ЭВТ под действием индуцированных электрических токов при воздействии сильного внешнего поля ($B_z \gtrsim 10^{-2}$ Тл, $S = 10^7$, $N \gtrsim 7.8 \times 10^7$, $St \gtrsim 0.067$).

7. Получена структура течения в диапазоне внешнего МП от 5×10^{-5} до 1 Тл ($I = 100$ – 1000 А, $S = 10^7$ – 10^9 , $N = 4 \times 10^5$ – 7.8×10^{10} , $St = 4 \times 10^{-5}$ – 5×10^4).

Теоретическая и практическая значимость. В диссертационной работе продемонстрирована возможность измерения корреляционным методом скорости потока жидкого металла при наличии электрического тока. Таким образом, корреляционный метод может быть использован для измерения скорости в высокотемпературных промышленных агрегатах, а главным ограничением остается температурная стойкость применяемых термопар.

При численном моделировании электровихревых течений в присутствии внешнего магнитного поля электродинамическое приближение корректно описывает течение до некоторой пороговой величины внешнего МП, при превышении которой следует использовать безындукционное приближение (БИ) или решать полную МГД задачу. Для сплава In-Ga-Sn электродинамическое приближение справедливо для внешнего МП $B_z < 1.25 \times 10^{-3}$ Тл.

В диссертации показано, что в диапазоне режимных параметров электрического тока $I = 100$ – 1000 А и внешнего МП от 5×10^{-5} до 1 Тл ($S = 10^7$ – 10^9 , $N = 4 \times 10^5$ – 7.8×10^{10} , $St = 4 \times 10^{-5}$ – 5×10^4), имеются два минимума интенсивности течения (при $B_z \sim 10^{-4}$ и 1 Тл). Первый минимум связан с азимутальной закруткой течения и возникновением возвратного течения, а второй минимум – с электромагнитным торможением, вызванным электрическими токами, индуцированными движением электропроводящей среды. Таким образом, эти особенности следует учитывать при проектировании промышленных агрегатов, где внешнее МП используется как метод управления структурой ЭВТ.

Внешние магнитные поля уже используются в ряде промышленных установок. Например, в промышленных вакуумно-дуговых печах ДКВ-3,2 и ДТВ-3.0Г0.5, где для предотвращения переброса дуги на стенку кристаллизатора используется соленоид, намотанный на внешнюю стенку кристаллизатора. Соленоид создает магнитное поле ($0-7 \times 10^{-3}$ Тл), которое сжимает электрическую дугу. Применение соленоида также приводит к круговому движению расплавленного металла, что улучшает однородность слитков. Верхний предел величины внешнего магнитного поля определяется началом разбрызгивания жидкого металла, обусловленным интенсивным перемешиванием расплава, поэтому для каждого режима плавки величина магнитного поля определяется экспериментальным путем [42].

Методология и методы исследования. Численное моделирование ЭВТ выполнялось в среде Ansys Fluent с использованием собственных подпрограмм, написанных на языке С. Расчет магнитного поля выполнялся по закону Био-Савара-Лапласа, с использованием технологии параллельного программирования NVIDIA CUDA. Численные расчеты были проверены на сеточную сходимость и устойчивость.

Экспериментальные измерения скорости жидкого металла проводились тремя различными способами: корреляционным зондом, волоконно-оптическим датчиком скорости и методом водородных меток. Для записи данных использовался аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) или видеокамера. Затем результаты обрабатывались на персональном компьютере.

Температура измерялась с использованием медно-константановых термопар корреляционного зонда, сигнал с которых усиливался и, при необходимости, фильтровался с использованием фильтра низкой частоты (ФНЧ) и фильтра высокой частоты (ФВЧ) Бесселя 3-го порядка, затем сигнал записывался на жесткий диск с использованием АЦП.

Более подробное описание применяемых методик численного и физического моделирования представлено в главах 2 и 3 диссертации.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Экспериментально установлено, что под действием магнитного поля Земли осевая скорость в области струи электровихревого течения эвтектического

сплава In–Ga–Sn в полусферическом контейнере снижается примерно на 30–50 % по сравнению с режимом компенсации геомагнитного поля ($S = 10^7$ – 2×10^8 , $N = 1.6 \times 10^4$ – 1.8×10^6).

2. Автоколебательный режим электровихревого течения сплава In–Ga–Sn в полусферическом контейнере при влиянии внешнего осевого магнитного поля реализуется при $I = 400$ А и $B_z = 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл ($S = 1.7 \times 10^8$, $N = 3.2 \times 10^6$ – 3.2×10^7) и обусловлен взаимодействием основного и вторичного тороидальных вихрей, для диапазона $B_z = 3 \times 10^{-4}$ – 10^{-3} Тл время формирования вторичного вихря составляет $t_{\text{обр}} \approx 1$ – 30 с, при этом оно, как и период автоколебаний, уменьшается с увеличением внешнего осевого магнитного поля.

3. Полученный критерий применимости электродинамического приближения для электровихревого течения жидкого металла In–Ga–Sn в полусферическом контейнере заключается в том, что при наличии внешнего осевого магнитного поля электродинамическое приближение справедливо для $B_z \lesssim 1.25 \times 10^{-3}$ Тл ($S = 10^5$, $St \lesssim 7.1 \times 10^{-3}$, $N \lesssim 9.8 \times 10^5$), а нарушение условия его применимости проявляется в завышении азимутальной скорости по сравнению с безындукционным приближением.

4. Обнаруженный эффект электромагнитного торможения электровихревого течения жидкого металла In–Ga–Sn в полусферическом контейнере под действием внешнего осевого магнитного поля $B_z \gtrsim 10^{-2}$ Тл ($S = 10^7$, $St \gtrsim 0.067$, $N \gtrsim 7.8 \times 10^7$) обусловлен возникновением электрических токов, индуцированных движением электропроводящей среды, и взаимодействием этих токов с внешним магнитным полем.

Достоверность результатов. Численное моделирование выполнялось в среде Ansys Fluent, собственные программы и подключаемые к среде модули были проверены на задачах, имеющих аналитические решения. Полученные экспериментальные данные качественно и, в ряде режимов, количественно согласуются с результатами численного моделирования, при этом ряд особенностей течения, выявленных в расчетах и экспериментах, соответствует литературным данным других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы представлялись и обсуждались на российских и международных научных конференциях:

1. XIII Всероссийская школа-конференция с международным участием «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики» (Новосибирск 2014).
2. XXI Школа-семинар молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева (Санкт-Петербург 2017).
3. Седьмая и восьмая Российские национальные конференции по теплообмену (Москва 2018 и 2022).
4. II, III и IV Всероссийские научные конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Ялта 2017, 2018 и 2019).
5. Третья Российская конференция по магнитной гидродинамике (Пермь 2018).
6. Семинар вузов по теплофизике и энергетике: Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием (Санкт-Петербург 2019).
7. X Всероссийская конференция «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2025).

Исследования выполнялись при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственных заданий ОИВТ РАН, при поддержке РФФИ (проект № 13-08-90444 укр-ф-а) и РНФ (проект № 17-19-01745).

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 1.3.14 «Теплофизика и теоретическая теплотехника» (отрасль физико-математические науки) по п. 3 «Магнитная гидродинамика электропроводных сред» в части экспериментальных и численных исследований закономерностей электровихревых течений электропроводящей жидкости при влиянии внешнего осевого магнитного поля.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы представлены в материалах конференций и в статьях в научных изданиях [43-55], 11 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК или входящих в международные базы данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Автор внес решающий вклад в проведение исследований на всех этапах работы. Результаты исследований опубликованы в соавторстве. При подготовке публикаций автор принимал непосредственное участие в обсуждении и интерпретации полученных результатов. Диссертация написана автором лично. Все научные результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором лично. Автором лично выполнены обработка, анализ, научное обобщение и формулирование результатов на основе экспериментальных и расчетных данных, полученных в большинстве случаев автором лично, либо при его непосредственном участии. Положения, выносимые на защиту, сформулированы лично автором.

Объем и структура работы. Общий объем диссертации составляет 129 страниц, в тексте приведены 73 рисунка и 5 таблиц. Библиографический список включает 102 наименования. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, а также положения, выносимые на защиту.

В первой главе выполнен анализ отечественных и зарубежных публикаций по электровихревым течениям, включая численные, экспериментальные и теоретические исследования, а также работы, посвященные влиянию внешнего осевого магнитного поля. По итогам обзора сформулированы цель и задачи диссертационной работы.

Вторая глава содержит описание экспериментальной установки по изучению ЭВТ в полусферическом контейнере, методики измерения скорости жидкого металла с применением корреляционного зонда и волоконно-оптического датчика скорости, а также измерения азимутальной скорости на поверхности жидкого металла с использованием водородных меток.

В главе 3 изложена методика численного моделирования ЭВТ в полусферическом контейнере. Приведены критерии подобия в ЭВТ, описаны методы расчета плотности тока, магнитного поля, электромагнитной силы и поля скорости жидкого металла в зависимости от используемого МГД приближения.

В четвертой главе представлены и обсуждены результаты расчетно-экспериментальных исследований структуры электровихревых течений.

В заключении описаны основные выводы по диссертационной работе.

Глава 1 Литературный обзор

1.1 Обзор численных и теоретических исследований ЭВТ при отсутствии внешнего магнитного поля

Подробный обзор классических численных и экспериментальных работ по электровихревым течениям выполнен в диссертации [56]. В настоящем разделе изложены результаты, наиболее существенные для постановки задач данной диссертации, с учетом более поздних публикаций [73; 77; 85–95].

В работе [57] исследовалось растекание электрического тока в электропроводящей жидкости от точечного источника в полупространство (рисунок 1.1). Задача решалась в стоксовом приближении при малых значениях параметра $S < 100$. Число S является аналогом числа Рейнольдса в ЭВТ и называется параметром электровихревого течения, а выражение для него имеет вид:

$$S = \frac{\mu_0 I^2}{\rho v^2}, \quad \text{Re} = \sqrt{S}. \quad (1.1)$$

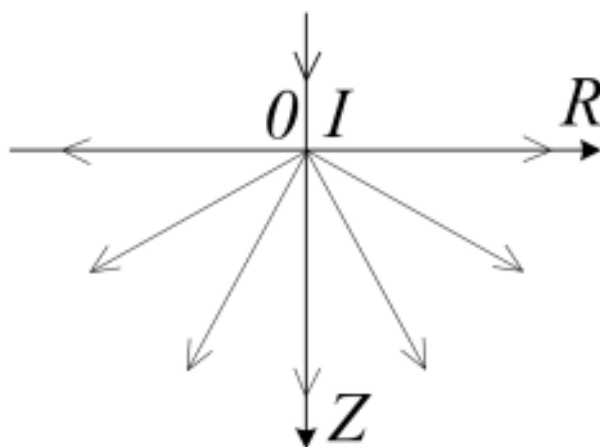


Рисунок 1.1 – Модель растекания электрического тока от точечного источника в полупространство [57].

В [58; 59] получены результаты решения задачи о растекании электрического тока от точечного источника. Исследования показали, что с увеличением параметра ЭВТ скорость течения возрастает. При этом сначала интенсивность течения имеет зависимость, близкую к линейной, а затем рост скорости течения усиливается и при

значении $S_{кр} \sim 150$ наблюдается резкое возрастание скорости течения. Этот эффект автор связывает с тем, что исследование проводилось с использованием электродинамического приближения (токи, индуцированные движением электропроводящей среды, не учитывались).

В работе [60] было выполнено численное моделирование ЭВТ с учетом нелинейного члена уравнения движения, в данном случае рассматривалась задача о растекании тока от точечного источника в полусферическую область. Как видно из рисунка 1.2, течение имеет форму тороидального вихря, направленного вниз на оси симметрии. При этом с ростом параметра S интенсивность ЭВТ в окрестности оси резко возрастает, что сопровождается ростом характерных скоростей и ухудшением численной сходимости. В результате авторам удалось получить решения только для значений S , несколько меньших критических.

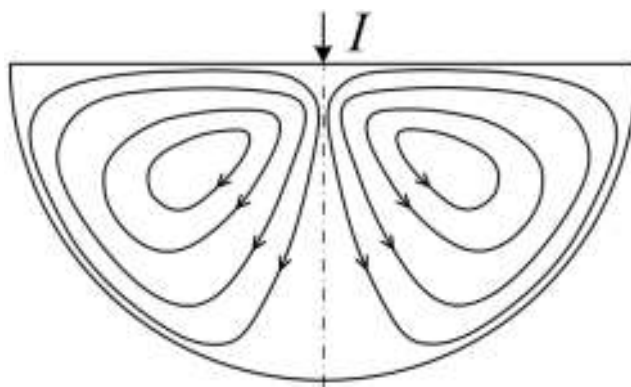


Рисунок 1.2 – Линии тока жидкости при растекании электрического тока от точечного источника в ограниченную полусферическую область [60].

В трудах [61; 62] была решена задача, когда электрический ток распространялся от малого электрода радиусом R_1 в полусферическую область радиусом R_2 . Было показано, что использование в модели электрода конечного размера не решает проблемы сходимости и чрезмерного возрастания скорости течения на оси симметрии, а лишь отодвигает значение $S_{кр}$ в область больших значений. Таким образом, было получено, что чем больше размер малого электрода, тем больше было значение $S_{кр}$ (например, для $R_1/R_2 = 0.5$ значение $S_{кр} = 1.5 \times 10^5$). При этом следует отметить, что характерные значения параметра S в плавильных агрегатах составляют $\sim 10^9 - 10^{12}$.

Поскольку в промышленных условиях характерные значения S относительно велики, важно определить границы различных МГД приближений при численном моделировании ЭВТ. В [63] рассмотрен практически важный вопрос о границах применимости ЭД приближения при моделировании электровихревых течений. В работе рассматривались ЭД и БИ приближения. Показано, что для задач с отсутствием внешнего магнитного поля электродинамическое приближение применимо до значения параметра ЭВТ $S < 10^{12}$. В работе указано, что можно также получить информацию о применимости ЭД приближения при наличии внешнего МП, однако соответствующее соотношение не приводится. Также показано, что быстрый рост скорости при $S \sim S_{кр}$, отмеченный в [58; 59], обусловлен в первую очередь ограничениями численной методики, а не нарушением применимости электродинамического приближения.

В работе [64] исследовано влияние граничных условий на свободной поверхности на характеристики электровихревого течения в полусферическом контейнере. Были рассмотрены комбинированные случаи свободной/твердой поверхности для центральной области и периферии, что соответствует моделированию режимов электрошлакового и электродугового переплава. В диапазоне $S < 10^{12}$ течение имеет тороидальную структуру с нисходящим потоком в зоне малого электрода, вместе с тем для $S > 10^5$ максимум скорости смещается в периферийную область. При этом получено, что в стоксовом режиме течения скорость ЭВТ пропорциональна параметру S , данное условие выполняется до $S = 10^4$. Затем наступает нелинейный режим течения (при $S = 10^5 - 10^7$), при этом скорость ЭВТ имеет распределение $U \sim S^{0.5}$.

В статье [65] решалась задача исследования структуры ЭВТ при электрошлаковом переплаве и электрошлаковой сварке, а характерное отношение радиусов малого и большого электрода R_1/R_2 составляло 0.1–0.2 и 0.6–0.8 соответственно, значение параметра S находилось в диапазоне $10^2 - 10^{10}$. Структура течения представлена на рисунке 1.3, при этом когда $R_1/R_2 = 0.2$, ЭВТ имеет вид осевой струи вдоль оси z , а для $R_1/R_2 = 0.8$ струя расширяется примерно до $0.8U_{max}$, а на периферии имеет место возвратное течение жидкости. Для $S < 10^3$ максимум скорости течения находится на оси симметрии, а при возрастании параметра S максимум смещается от оси

симметрии, а смещение достигает максимума при $S \sim 10^6$. При дальнейшем увеличении параметра ЭВТ решение становится автомодельным, с нормированием поля полной скорости $U/S^{0.5}$.

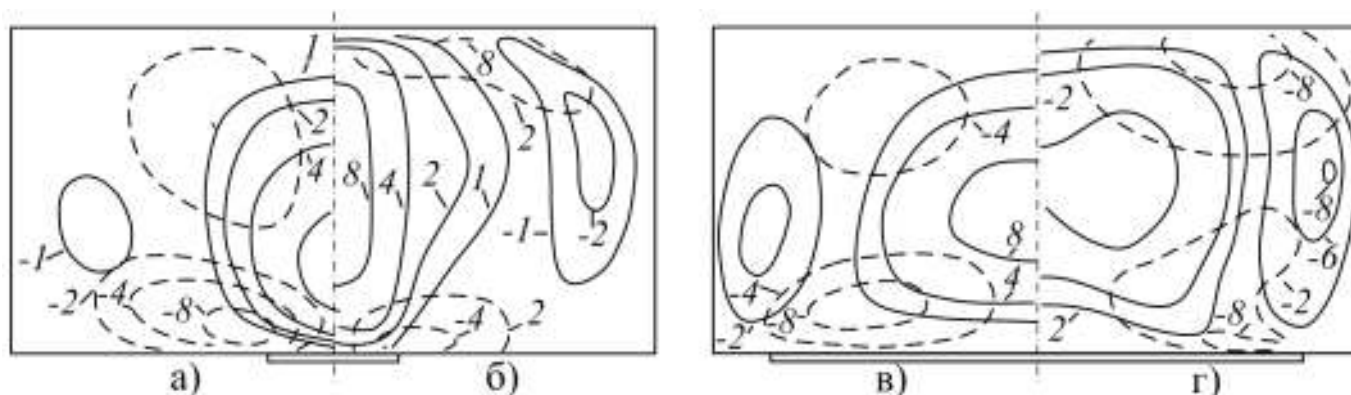


Рисунок 1.3 – Влияние соотношения радиусов электродов и параметра S на структуру поля скоростей, осевая компонента показана сплошными линиями, радиальная – пунктирными. а) $R_1/R_2 = 0.2$, $S = 10^2$, б) $R_1/R_2 = 0.2$, $S \geq 10^6$, в) $R_1/R_2 = 0.8$, $S \geq 10^2$, г) $R_1/R_2 = 0.8$, $S \geq 10^6$ [67].

Работа [66] является продолжением [65]. В ней исследуется влияние глубины рабочей ванны на структуру ЭВТ. Показано, что с увеличением глубины ванны структура течения переходит от сложного вихревого к струйному.

Поскольку в большинстве промышленных приложений ЭВТ протекают в турбулентном режиме, при численном моделировании критичным становится выбор адекватной модели турбулентности. В работе [67] сопоставлены результаты расчетов, выполненных с использованием моделей $k-\omega$ и $k-\epsilon$. Показано, что кроме модели турбулентности задача чувствительна к используемой разностной схеме (рисунок 1.4). Выявлено, что $k-\epsilon$ модель может быть модифицирована и адаптирована для численного моделирования ЭВТ.

Помимо ЭВТ, на структуру течения в контейнере с жидким металлом может влиять свободная конвекция, возникающая при неоднородном нагреве расплава электрическим током или электрической дугой. Обсуждение данного механизма и соответствующие оценки приведены в [1; 7] на основе результатов работы [68]. Влияние свободной конвекции на ЭВТ более детально проанализировано в [69], где

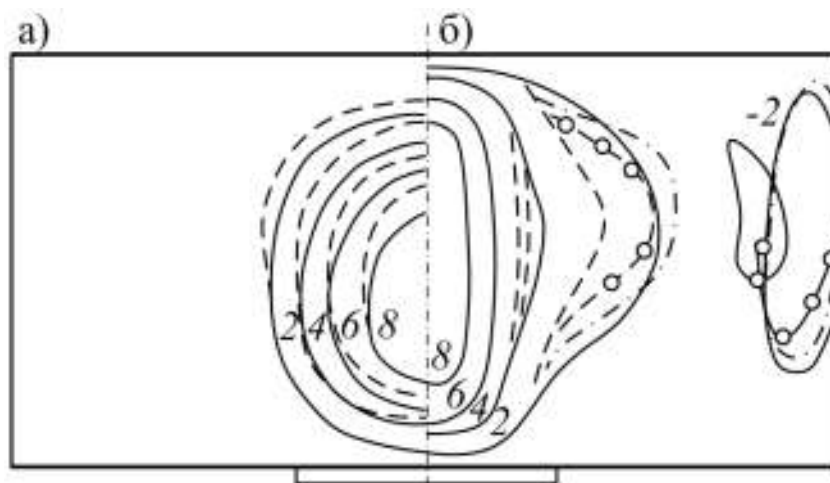


Рисунок 1.4 – Линии уровня осевой скорости при различном соотношении радиусов электродов и параметре S . а) $R_1/R_2 = 0.3$, $S = 10^3$, схема с разностями против потока (СРПП) – сплошные линии, схема Самарского (СС) – пунктирные линии, б) $R_1/R_2 = 0.2$, $S = 10^8$, сплошные линии – $k-\omega$ модель турбулентности, штрихпунктирные – $k-\epsilon$ модель, СС – пунктирные линии, СРПП – линии с маркерами (кружки) [67].

соотношение R_1/R_2 находилось в диапазоне 0.3–0.8, а параметр ЭВТ $S = 10^6$ – 10^8 , при этом Pr изменялся в пределах 15–150, а число Релея 10^9 – 10^{12} . Показано, что вместе с ЭВТ в ванне с жидким металлом возникает вторичный вихрь с противоположным направлением вращения. Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что структура течения зависит от всех режимных параметров, при этом с уменьшением соотношения радиусов электродов или увеличением Pr усиливается влияние свободной конвекции на процесс теплопереноса. Также обнаружено, что при некоторых значениях режимных параметров возможно возникновение колебательного режима течения, когда вихрь, вызванный свободной конвекцией, взаимодействует с ЭВТ, и наблюдаются низкочастотные колебания, вызванные этим взаимодействием (рисунок 1.5).

В работах [70–72] была изучена структура течения в двухслойной электропроводящей жидкости (шлак – жидкий металл). Показано, что течение имеет вид, представленный на рисунке 1.6. Получены распределения полей функции тока ψ , завихренности скорости ω и компонент скорости, а также изучены механизмы переноса импульса в зависимости от соотношения толщин слоев металлических жидкостей.

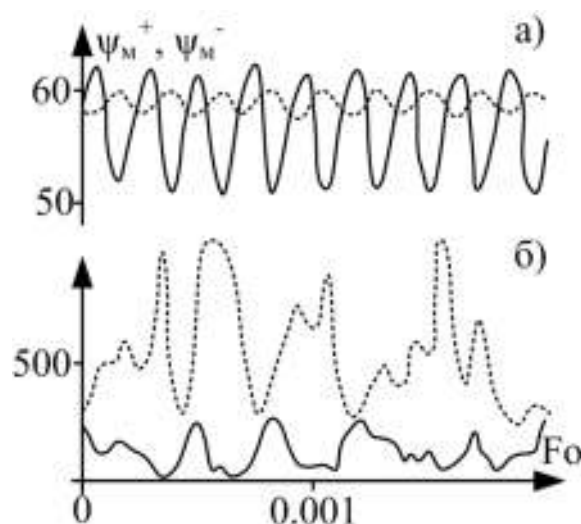


Рисунок 1.5 – Влияние безразмерного числа Фурье (Fo) на максимальный модуль функции тока при наличии в ЭВТ свободной конвекции. Сплошная линия – максимум в центре электровихревого течения, штриховая линия – максимум в центре вихря от свободной конвекции. $R_1/R_2 = 0.8$, $S = 10^8$, $Pr = 15$. а) $Ra = 10^{11}$ и $\theta = 0.0015$ (безразмерная температура на оси), б) $Ra = 10^{12}$ и $\theta = 0.002$ [69].

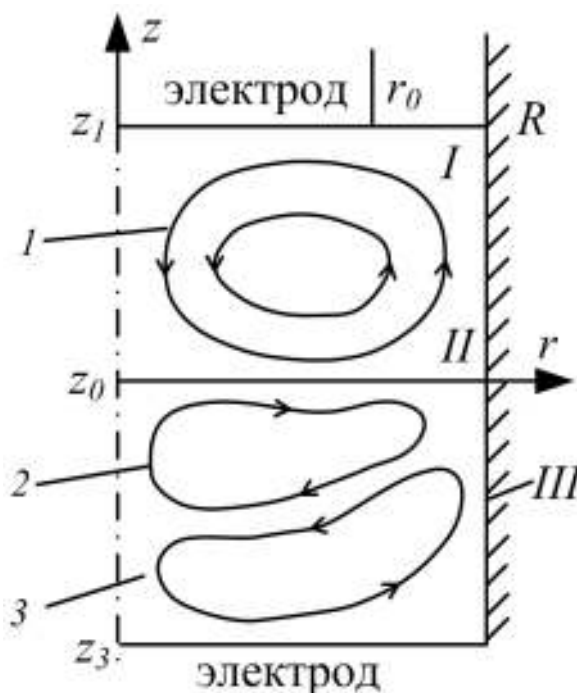


Рисунок 1.6 – Схема ЭШП с характерными параметрами течения. I – шлак, II – жидкий металл, III – кристаллизатор. 1 – ЭВТ в объеме шлака, 2, 3 – ЭВТ и вторичный вихрь в расплаве [70–72].

В статье [73] численно решалось уравнение движения в безразмерном виде с использованием ламинарной модели. Получена структура течения в контейнере по-

лусферической формы. Были исследованы режимы со значением параметра ЭВТ $\sqrt{S} = 200$ и 3000, а соотношение размеров малого и большого электродов R_1/R_2 составляло 0.1, 0.01 и 0.001. Показано, что для значения $\sqrt{S} = 3000$, на периферии рабочей ванны, рядом с поверхностью жидкого металла возможно возникновение вихрей Моффата.

1.2 Обзор экспериментальных исследований

В лабораторных условиях, при использовании сплавов с низкой температурой плавления, условия эксперимента облегчаются, однако сохраняются значительные методические сложности. Поэтому число публикаций, посвященных экспериментальному анализу ЭВТ, остается сравнительно невелико.

В работе [74] были проведены два вида опытов. В первом случае рабочая ванна, состоящая из двух емкостей цилиндрической и прямоугольной, была заполнена жидкой ртутью. В эксперименте методом видеосъемки изучалось поведение свободной поверхности электропроводящей жидкости (рисунок 1.7). Также с помощью графитовых меток было определено направление скорости движения на поверхности жидкого металла. Экспериментальные наблюдения качественно согласуются с модельным описанием ЭВТ как об одиночном тороидальном вихре, направленном к малому электроду, на снимках с короткой экспозицией (рисунок 1.7б) также различимы осевая струя в приэлектродной области и последующая вихревая структура, которую можно интерпретировать как совокупность нескольких разнонаправленных вихрей. Во втором случае в цилиндрическом сосуде, полностью заполненном жидким металлом, измерялось давление в придонной области вблизи нижнего большого электрода (рисунок 1.8). Давление измерялось с использованием отборников, а полученные результаты позволили авторам определить форму поверхности кристаллизации.

В работе [75] экспериментально изучали движение расплава на свободной поверхности жидкой ртути в модельной ванне, геометрически близкой к дуговой печи постоянного тока (рисунок 1.9). Установка включала один центральный и два донных

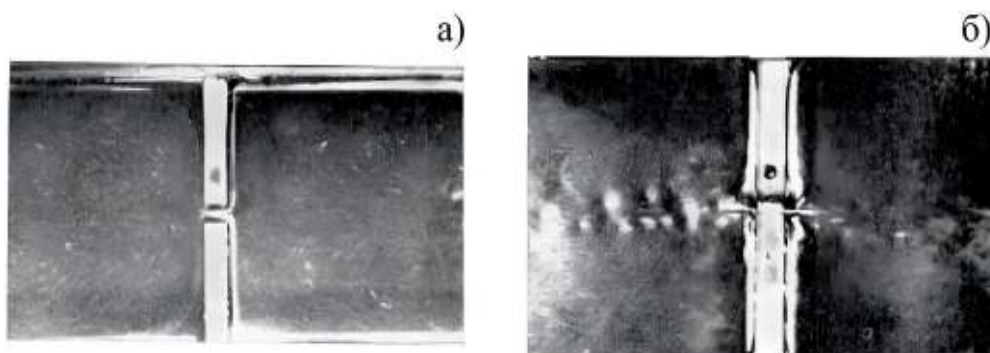


Рисунок 1.7 – Фотография свободной поверхности ртути. а) длительное время экспозиции, б) короткое (1/30 с) время экспозиции [74].

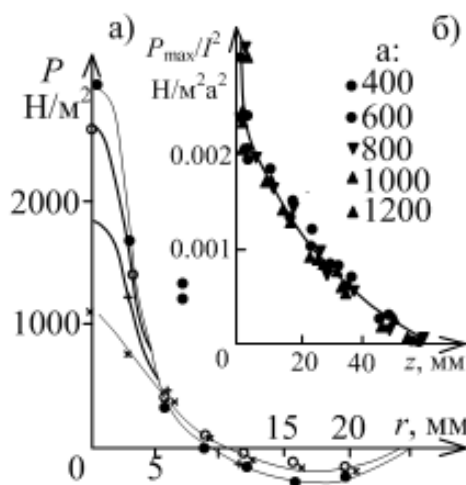


Рисунок 1.8 – Влияние межэлектродного расстояния на давление при $I = 1200 \text{ A}$. а) профиль давления вдоль радиуса для $1 - z = 5 \text{ мм}$, $2 - z = 9 \text{ мм}$, $3 - z = 18 \text{ мм}$, $4 - z = 24 \text{ мм}$, б) распределение давления на оси симметрии, нормированное на I^2 как функция расстояния между электродами [74].

электрода. По измеренным скоростям на поверхности авторы оценивали характер течения в объеме ванны с жидким металлом. Получено, что гидродинамическая картина существенно меняется при смещении центрального электрода относительно оси, при этом наиболее интенсивное движение наблюдается в приэлектродных зонах над донными электродами, тогда как вблизи стенок рабочей ванны скорость течения минимальна. Для управления течением предложены асимметричные схемы расположения донных электродов и подбор соотношения токов по отдельным электродам. При такой конфигурации в ванне возникает азимутальная закрутка расплава, а в сочетании с усиленной циркуляцией в приэлектродной области это приводило к более эффективному перемешиванию расплава.

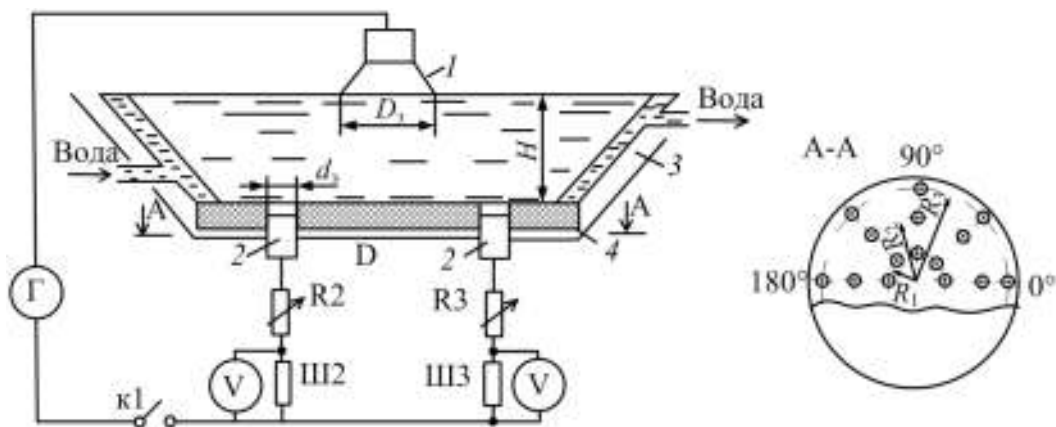


Рисунок 1.9 – Схема сталеплавильной ЭДПТ. 1 – центральный электрод, 2 – донные электроды [75].

В работе [76] проведены измерения поля скоростей жидкого металла с использованием волоконно-оптического датчика (ВОПС). Компоновка экспериментальной установки приведена на рисунке 1.10. Цилиндрическая ванна была заполнена ртутью, по бокам располагались медные электроды. Один из электродов устанавливался во втулке, что позволяло моделировать точечный источник тока. Для сглаживания распределения тока в области токоподвода применялись буферные зоны, заполненные ртутью, а максимальный ток в эксперименте достигал 1500 А.

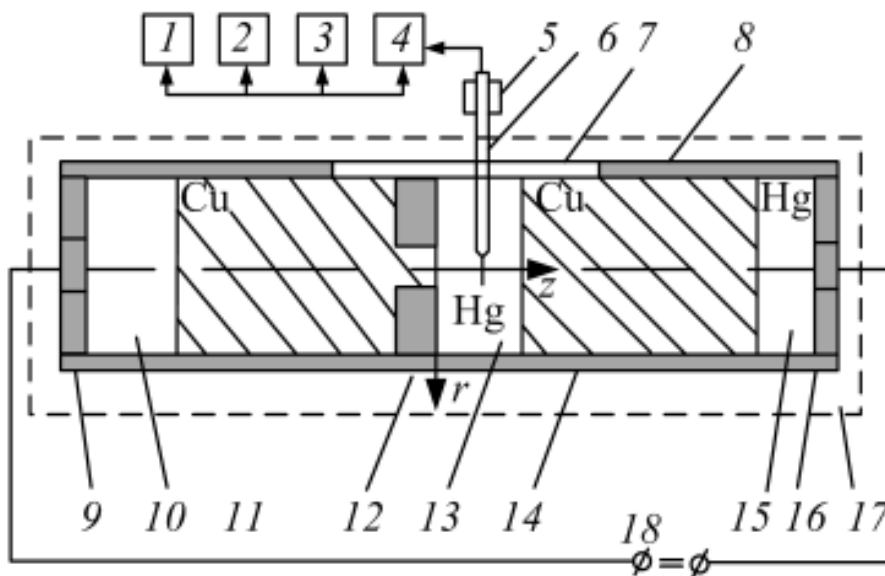


Рисунок 1.10 – 1 – интегрирующий вольтметр, 2 – RMS-вольтметр, 3 – осциллограф, 4 – усилитель, 5 – каретка, 6 – державка, 7 – ВОПС, 8 – труба, 9, 16 – токоподводы, 10, 15 – области с ртутью, 11, 14 – электроды, 12 – втулка, 13 – рабочий участок, 17 – теплообменник, 18 – генератор [76].

На рисунке 1.11а показаны экспериментальные данные по осевой скорости в зависимости от величины электрического тока и расстояния до малого электрода. По результатам наблюдений структура ЭВТ соответствует затопленной струе. Осевая скорость возрастает практически линейно при увеличении тока, протекающего через расплав. Распределение осевой скорости по безразмерному радиусу приведено на рисунке 1.11б.

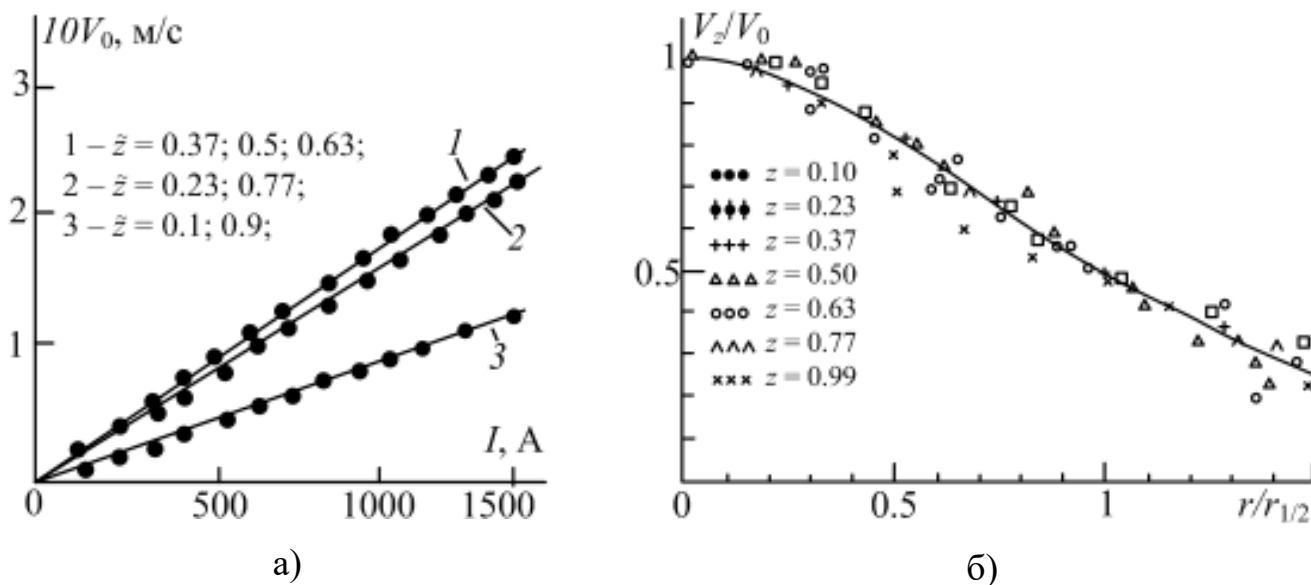


Рисунок 1.11 – а) Зависимость осевой скорости от электрического тока, б) Зависимость нормированной осевой скорости от безразмерного расстояния от оси симметрии [76].

В диссертации [77] профили скорости были также измерены волоконно-оптическим датчиком (рисунок 1.12). В экспериментах использовался эвтектический сплав In-Ga-Sn, который заполнял полусферический контейнер, таким образом, исследовалось течение между двумя полусферическими электродами. Было установлено, что ЭВТ имеют вид затопленной струи, а с увеличением электрического тока осевая скорость линейно возрастает (рисунок 1.13).

Также были получены осциллограммы осевой скорости под малым электродом, при различных электрических токах, пропускаемых через электропроводящую жидкость (рисунок 1.14). Было получено, что сначала скорость возрастает и достигает максимума, а потом уменьшается, при этом в течении наблюдаются низкочастотные пульсации скорости.

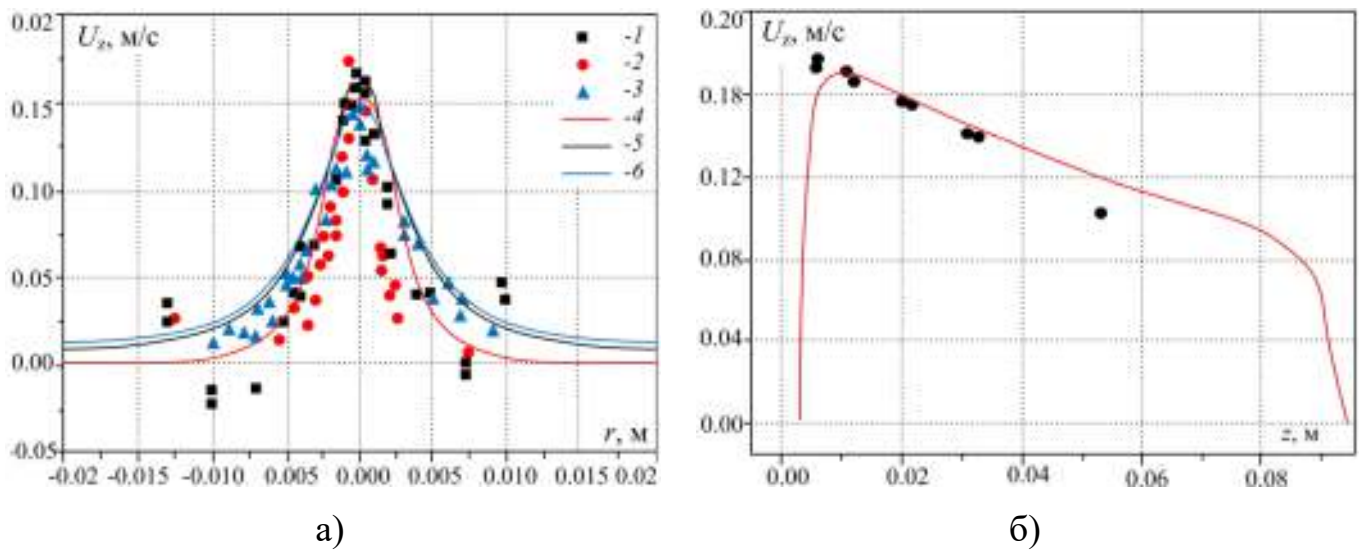


Рисунок 1.12 – а) Зависимость осевой скорости на различной глубине от расстояния до оси симметрии. 1, 2, 3 – эксперимент, 4, 5, 6 – расчет. 1, 4 – $z = 5$ мм; 2, 5 – $z = 20$ мм; 3, 6 – $z = 30$ мм. б) Зависимость осевой скорости от глубины z , расчет (линия) и эксперимент (точки) [77].

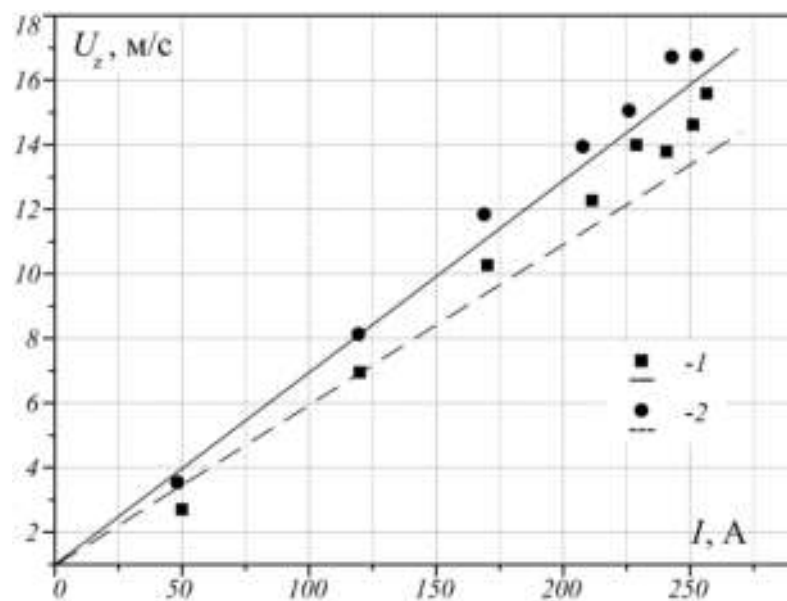


Рисунок 1.13 – Влияние радиуса малого электрода на зависимость осевой скорости от электрического тока. Маркеры соответствуют экспериментальным данным, линии – численному моделированию. 1 – $R_1 = 2$ мм, 2 – 4 мм [77].

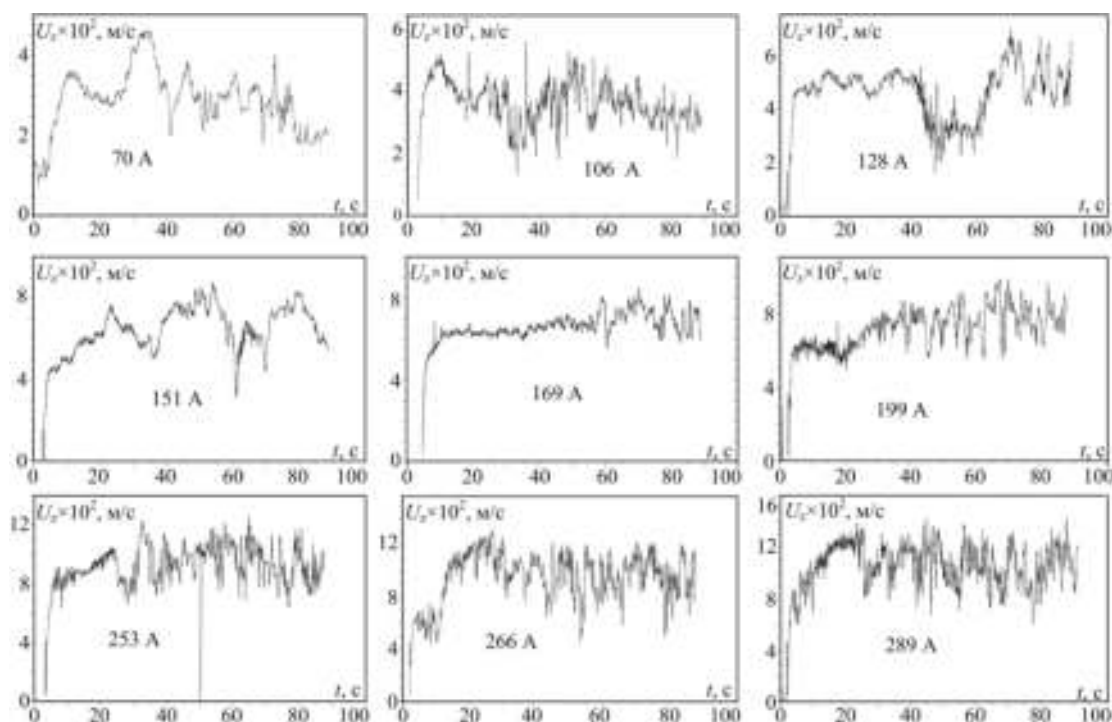


Рисунок 1.14 – Осциллограммы осевой скорости на глубине $z = 30$ мм [77].

1.3 Обзор исследований ЭВТ под воздействием внешнего магнитного поля

Среди ранних расчетно-теоретических исследований ЭВТ при наличии внешнего магнитного поля следует выделить работу [78], в которой исследовалось влияние внешнего продольного МП на структуру течения. Продольное магнитное поле вызывает азимутальную закрутку жидкого металла и формирование вторичного возвратного течения в придонной области (рисунки 1.15–1.17). Исследования были проведены для цилиндрической ванны в диапазоне параметров $S = 0–750$ и $N = 0–500$. В работе использовался параметр N , который имеет смысл интенсивности влияния внешнего МП, а его выражение имеет вид:

$$N = \frac{IBL}{\rho v^2}. \quad (1.2)$$

Было показано, что при достаточно большом значении параметра N первичное течение может быть полностью подавлено вторичным, а направление течения сместится на противоположное.

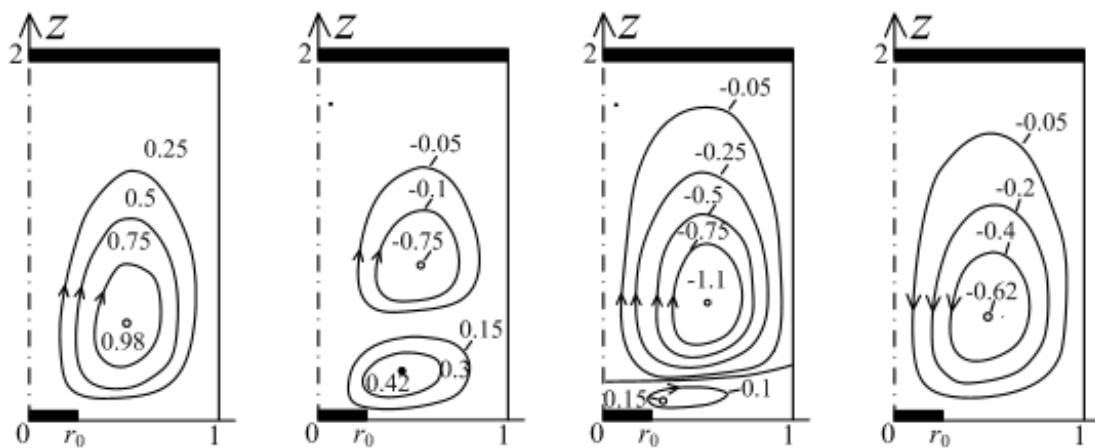


Рисунок 1.15 – Линии тока жидкости при различных значениях S и N .

а) 250, 0, б) 250, 250; в) 250, 500; г) 0, 250 [78].

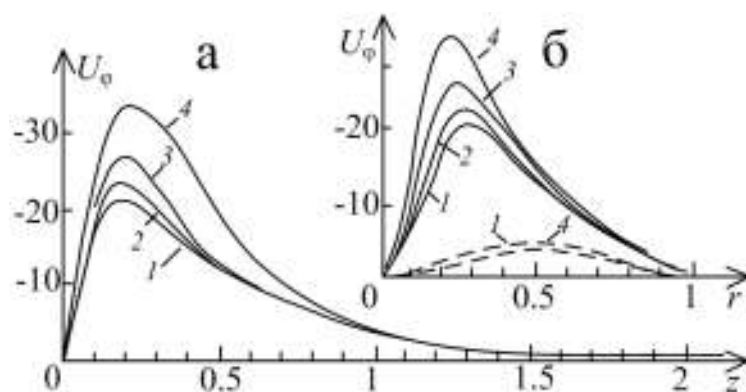


Рисунок 1.16 – Зависимость азимутальной скорости для режима $N = 250$,

а) профиль по координате z при фиксированном радиусе $r = 0.3$, б) профиль по радиусу r при фиксированном $z = 0.1$ (сплошные линии), и $z = 1$ (штриховые линии), 1 – $S = 0$, 2 – $S = 100$, 3 – $S = 250$, 4 – $S = 500$ [78].

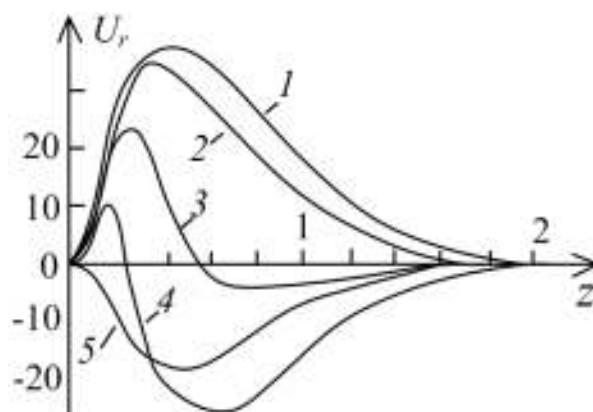


Рисунок 1.17 – Профили осевой компоненты скорости вдоль координаты z на оси симметрии ($r = 0$). 1 – $S = 250$, $N = 0$, 2 – 250, 100, 3 – 250, 250, 4 – 250, 500, 5 – 0, 250 [78].

Исследования теплообмена и гидродинамики ЭВТ в цилиндрическом контейнере представлены в работе [79]. С использованием численного моделирования авторам удалось получить границы образования вторичных течений. Расчеты выполнены при варьировании безразмерных параметров в пределах: $S = 0-1500$, $N = 0-2000$, $Pr = 1-200$, $Sc = 0.2-200$. Для контрольного случая $S = N = 0$ движение в расплаве отсутствует, а перенос тепла определяется исключительно теплопроводностью (рисунок 1.18а, пунктир). При наличии ЭВТ ($S \neq 0$, $N = 0$) в расплаве жидкого металла возникает тороидальное движение, что приводит к заметному снижению температуры электропроводящей жидкости (рисунок 1.18а, сплошные линии).

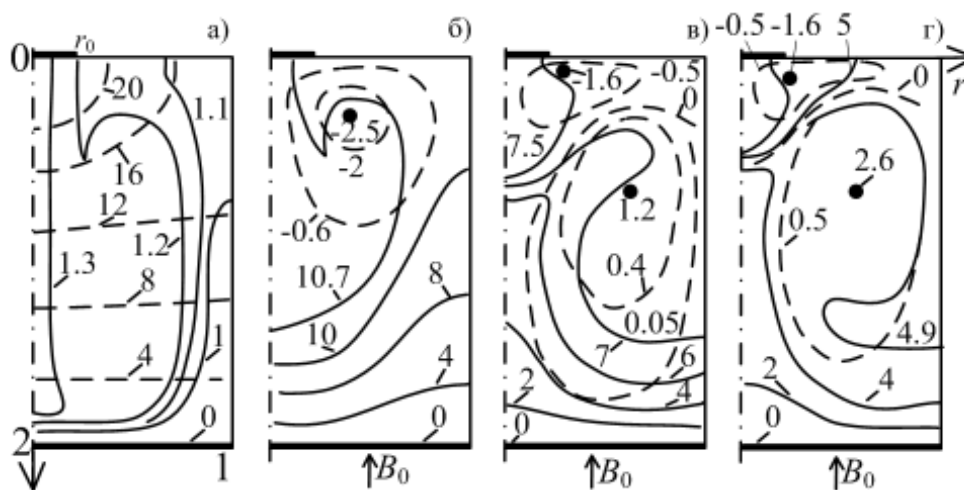


Рисунок 1.18 – Поле температуры и линии тока жидкости при $S = 1000$, $Pr = 20$.

а) $N = 0$, б) $N = 500$, в) $N = 1500$, г) $N = 2000$. Сплошные линии соответствуют изотермам, штриховые – а) изотермы без конвекции, б), в) и г) – линии тока [79].

При $N \neq 0$ возникает азимутальная компонента скорости, что приводит к изменению структуры течения. При соотношении параметров $N/S < 0.6$ происходит смещение ЭВТ в сторону малого электрода, а осевая скорость уменьшается вследствие азимутальной закрутки. Когда соотношение $N/S > 0.6$, образуется восходящий тороидальный вихрь (рисунки 1.18в, г). При этом теплообмен в придонной области контейнера заметно улучшается. На границе раздела двух вихрей температура ступенчато меняется (рисунок 1.19), а с ростом соотношения N/S ступень смещается в область малого электрода.

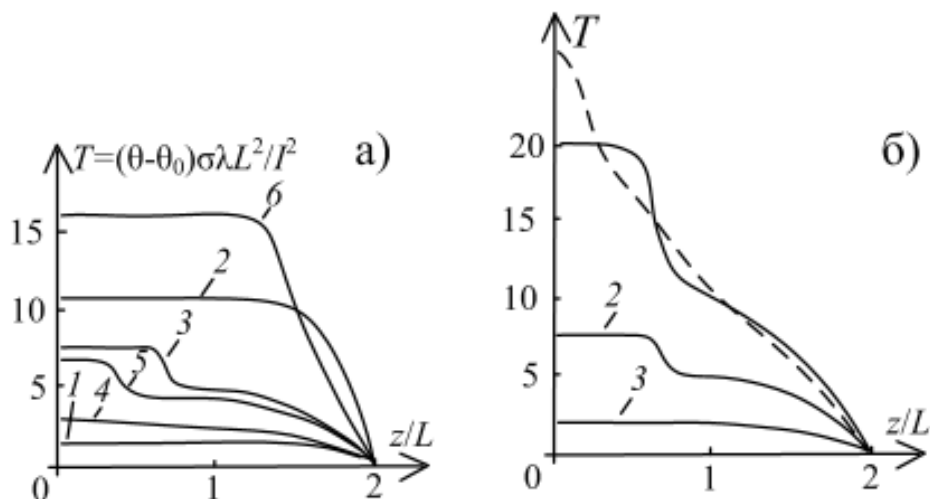


Рисунок 1.19 – Профили температуры вдоль координаты z при различных параметрах S и N . а) $Pr = 20$: 1 – $S = 1000, N = 0$, 2 – $S = 1000, N = 500$, 3 – $S = 1000, N = 1000$, 4 – $S = 0, N = 1000$, 5 – $S = 500, N = 1000$, 6 – $S = 1500, N = 1000$, б) $S = N = 1000$: 1 – $Pr = 2$, 2 – $Pr = 20$, 3 – $Pr = 200$, пунктирная линия – расчет без конвекции [79].

На рисунке 1.20а представлены зависимости максимальной температуры перегрева от значения параметра N . При этом с ростом параметра S максимум температуры смещается в область больших значений параметра N , а наибольшие температуры перегрева имеют место при $N/S \approx 0.6$.

Также были получены зависимости локального и усредненного числа Нуссельта вдоль поверхности как функции от радиальной безразмерной координаты (рисунок 1.20б). Показано, что при $N/S < 0.6$ по мере удаления от оси симметрии теплоотдача ослабевает, тогда как при $N/S > 0.6$ наблюдается противоположная тенденция. Такое поведение связано с влиянием вторичного течения на структуру переноса тепла.

В работе [80] на основе численного моделирования рассмотрены теплоперенос и гидродинамика ЭВТ в ванне параболического профиля. Выбор такой геометрии мотивирован ее близостью к ряду промышленных процессов, включая вакуумно-дуговой переплав. Также в работе исследовано влияние внешнего продольного МП на тепломассообменные процессы, протекающие во время вакуумно-дуговой плавки. Расчеты проводились в диапазоне параметров ЭВТ $S = 0-500$, $N = 0-5 \times 10^3$, $Pr = 10^2-10^4$, $Sc = 1-10^3$. При этом полученные данные хорошо согласуются с ре-

зультатами работы [78], в которой исследовалось ЭВТ в ванне с цилиндрической геометрией. Как видно из рисунка 1.21, с увеличением внешнего МП в нижней части контейнера с жидким металлом образуется вторичный восходящий вихрь. Выявлено, что второй вихрь появляется при соотношении $N/S = 0.35$, а при $N/S > 4.5$ первичное ЭВТ полностью подавляется вторичным течением.

Также выполнен анализ температурного поля в зависимости от числа Шмидта Sc и параметра N . Увеличение Sc сопровождается ростом температуры расплава в центральном (по высоте) и придонном слоях, тогда как при возрастании N температура вблизи дна плавильной ванны уменьшается. Рост параметра S интенсифицирует перенос вещества из области электрической дуги в глубину ванны (аналогично случаю увеличения Sc), что вызывает повышение температуры металла в придонной области.

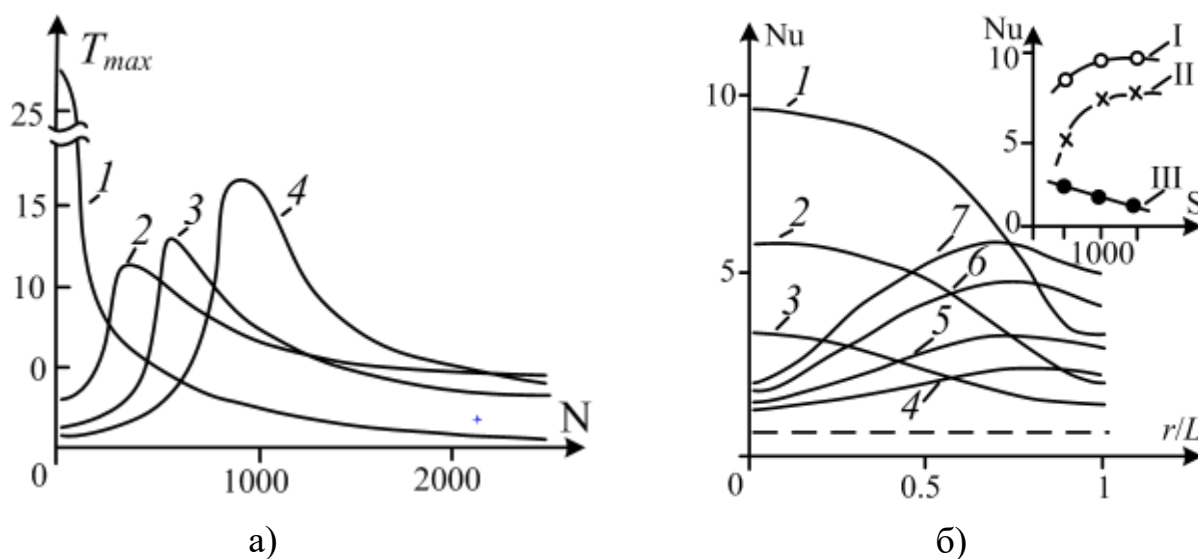


Рисунок 1.20 – а) Максимальный перегрев расплава как функция N при $Pr = 20$: 1 – $S = 0$, 2 – $S = 500$, 3 – $S = 1000$, 4 – $S = 1500$, б) Теплоотдача на охлаждаемой поверхности $z = 2$ (большой электрод) при $Pr = 20$, $S = 1000$: 1 – $N = 0$, 2 – $N = 400$, 3 – $N = 500$, 4 – $N = 750$, 5 – $N = 1000$, 6 – $N = 1500$, 7 – $N = 2000$. Пунктирная линия – режим без конвекции. I – теплоотдача на оси симметрии, $N = 0$, II – радиально-усредненная теплоотдача $N = 0$, III – радиально-усредненная теплоотдача $N/S = 0.6$ [79].

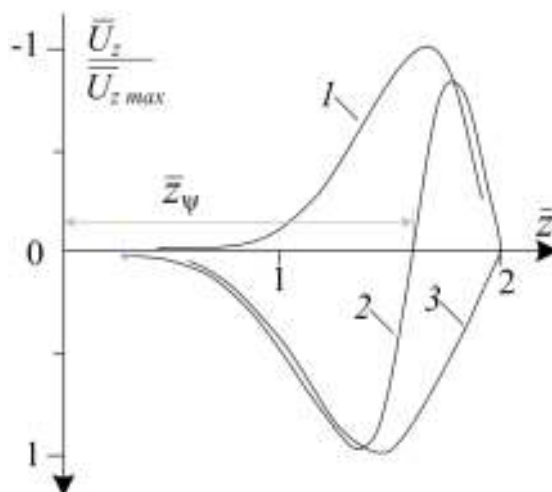


Рисунок 1.21 – Зависимость осевой скорости от координаты z в контейнере параболоидной формы при различном соотношении N/S , 1 – 0, 2 – 3, 3 – 20 [80]

В работе [81] численно исследован массообмен в ЭВТ в контейнере цилиндрической формы. Было получено поле концентрации примеси, а вычисления проводились в диапазоне параметров $S = 0\text{--}1500$, $N = 0\text{--}1500$ и $Sc = 2$. Выявлено, что в случае, когда внешнее МП отсутствовало ($N = 0$), ЭВТ увлекает примесь вдоль оси симметрии в придонную область, при этом для случая $S \neq 0$ и $N \neq 0$, концентрация примеси на оси снижается.

Экспериментально-теоретическое исследование ЭВТ в цилиндрической ванне при воздействии внешнего осевого магнитного поля приведено в работе [82]. Поле создавалось соленоидом, а ток в обмотке достигал 1000 А. Эта статья является продолжением работы [74], где изучались характеристики ЭВТ применительно к электрошлаковой сварке. Результаты теоретических оценок и экспериментов показали, что с ростом величины внешнего МП, давление струи на дно контейнера уменьшается, а при достижении некоторого значения внешнего МП вблизи большого электрода (придонная область) формируется область разрежения. При этом теплоперенос осуществляется преимущественно в радиальном направлении.

В работе [83] также получено, что придонное давление зависит от соотношения B_z/I , выявлено, что давление также может регулироваться деформацией силовых линий МП, при добавлении в контейнер с жидким металлом посторонних ферромагнетиков.

Эксперименты [84] были посвящены количественной оценке распределений плотности тока, магнитного поля и электромагнитной силы в объеме жидкого металла.

Исследования выполнялись при токе $I_g = 500\text{--}2500$ А и внешнем продольном магнитном поле $0\text{--}0.02$ Тл, создаваемом током соленоида I_s . Азимутальная скорость электропроводящего расплава определялась с помощью трубки Пито–Прандтля. По результатам измерений была предложена эмпирическая зависимость для азимутальной компоненты скорости:

$$U_\phi = \frac{k}{d} \left(\frac{\mu_0 I_g I_s}{\rho} \right)^{0.5}, \quad (1.3)$$

где d – характерный размер, k – безразмерный коэффициент (порядка 30).

В работе [85] численно и экспериментально показано, что влияние МП Земли приводит к появлению азимутальной закрутки течения. Таким образом, даже малое МП ($\sim 5 \times 10^{-5}$ Тл) влияет на структуру ЭВТ.

В работе [86] численно показано, что даже малая азимутальная сила (относительно осевой) приводит к возникновению вторичного противонаправленного течения. Авторы показывают, что когда соотношение F_ϕ/F_z превышает 1 %, у стенки образуется тонкий экмановский слой. Радиальный поток в пограничном слое не может исчезнуть у стенки – он должен замкнуться в виде объемного возвратного течения. Поэтому за пределами слоя возникает противоположная радиальная скорость, а вместе с ней и вертикальная составляющая (U_z), образуя вторичную циркуляцию потока (экмановская подкачка). Вследствие этого кинетическая энергия полоидального движения E_Π падает более чем в 100 раз, тогда как энергия вращения E_ϕ растет по закону $\sim F_\phi^{10/9}$. При этом результаты работы сравниваются с более ранней экспериментальной работой [87] по исследованию растекания электрического тока от точечного источника в полусферический объем при наличии азимутальной закрутки течения. Авторы подчеркивают, что подавление полоидального течения является общим свойством ограниченных течений при совместном действии полоидальной и азимутальной сил и принципиально не зависит от способа ввода тока (точечный

электрод на оси [87] или распределенный ввод по поверхности [86]). Поэтому предложенная интерпретация качественно согласуется с экспериментальными наблюдениями [87], хотя распределение тока в [87] и [86] различается.

В работе [88] исследовано ЭВТ в холодном аналоге ЭДППТ, в качестве рабочей жидкости использовался раствор поваренной соли. Электрический ток подводился через малый электрод диаметром 5 мм, а отводился по одному из подовых электродов диаметром 15 мм. Подовый электрод располагался либо под малым электродом (в центре ванны), либо на расстоянии 40 мм от оси симметрии. Было получено, что использование смещенного подового электрода приводит к почти двукратному росту средней азимутальной скорости на поверхности жидкости. При этом размер застойной зоны вблизи боковых стенок уменьшается на 70 %.

Статья [89] посвящена исследованию структуры течения при малых геомагнитных полях (МП Земли). В работе изучалось ЭВТ в цилиндрической ванне, заполненной сплавом Ga-In-Sn. Измерения скорости проводились с использованием УДА, также поле скорости было получено численно, с использованием OpenFOAM. В работе было обнаружено, что при включении тока осевая компонента магнитного поля увеличивается по модулю с -16 до -25 мкТл, поэтому сравнение экспериментов и расчетов было проведено при этом МП. Было численно показано, что внешнее МП определяет параметры струи под малым электродом, при этом длина и средняя скорость в струе уменьшаются с увеличением МП.

В работе [90] было выполнено численное моделирование ЭВТ при влиянии внешнего МП различной величины. Расчеты проводились для контейнера с полусферической геометрией. Выявлено четыре режима течения в диапазоне внешнего МП 10^{-5} – 10^{-2} Тл. При внешнем МП $\sim 10^{-5}$ Тл имеется узкая струя жидкого металла под малым электродом («core mode»). При МП $\sim 10^{-4}$ Тл образуется восходящий вихрь, который оттесняет основной вихрь от оси. С увеличением внешнего МП до $\sim 10^{-3}$ Тл вторичное течение усиливается, а основное ЭВТ ослабевает. Восходящий тороидальный вихрь (который полностью подавляет основное ЭВТ) наблюдается при МП $\sim 10^{-2}$ Тл. Таким образом, в работе была получена подробная информация о структуре ЭВТ, однако следует отметить, что эти результаты были опубликованы

значительно позже, чем основные результаты, изложенные в настоящей диссертации, и хорошо дополняют друг друга.

Рассмотрим серию трудов [91–95], результаты которых вошли в докторскую диссертацию [96]. В работах исследуется возможность управления структурой ЭВТ с использованием внешнего МП применительно к жидкометаллическим батареям. В момент пуска в жидкометаллических батареях возникают полоидальные течения, которые на два порядка интенсивнее, чем в квазистационарном режиме. Также была получена структура течения при слабом (10^{-4} Тл), умеренном (10^{-3} Тл) и сильном МП (10^{-2} Тл). Следует отметить, что по сравнению с [86], в этих работах используется другая геометрия рабочей области и вторичное течение направлено в ту же сторону, что и основное. Вместе с тем, как и в [86], имеет место эффект уменьшения полоидальной энергии, вызванный экмановской подкачкой, который был подтвержден численно и экспериментально. Также было выявлено, что при умеренном МП подавление полоидального течения происходит в тот момент, когда течение еще не успело сформироваться и сосредоточено вблизи электрода. При этом, под влиянием сильного осевого МП, основной тороидальный вихрь не успевает сформироваться (даже вблизи электрода), и имеет место вторичный вихрь с полоидальным нисходящим течением.

1.4 Анализ литературных источников и постановка задач исследования

Проведенный обзор экспериментальных и численных исследований электро-вихревых течений показал, что в настоящее время достаточно подробно изучена структура ЭВТ при отсутствии внешнего магнитного поля. В работах показано, что течение имеет форму тороидального вихря, направленного вниз в области под малым электродом. Получена структура течения в двуслойных жидкостях (электрошлаковый переплав). Также показано, что влияние свободной конвекции может приводить к образованию вторичных вихрей и пульсациям скорости в объеме жидкого металла. Показано, что в некоторых режимах на периферии рабочей ванны могут возникать вторичные вихри Моффата.

Влияние внешнего осевого МП приводит к азимутальной закрутке и ослаблению основного течения или к возникновению вторичных вихрей. При воздействии достаточно сильного МП ЭВТ полностью подавляется вторичным течением. Таким образом, обобщая результаты рассмотренных исследований, можно отметить, что, при наличии внешнего МП, на момент выполнения настоящего исследования были изучены отдельные режимы течения при действии слабых (10^{-5} – 10^{-4} Тл), умеренных ($\sim 10^{-3}$ Тл) и сильных МП ($\sim 10^{-2}$ Тл). В то же время влияние внешнего магнитного поля на гидродинамическую структуру ЭВТ в широком диапазоне его значений, начиная от естественного магнитного поля Земли и заканчивая сильными искусственными полями, исследовано фрагментарно. Численно исследовано влияние МП Земли и экспериментально измерена интенсивность вызванной им азимутальной закрутки. Однако эксперименты с компенсацией МП Земли отсутствуют в научной литературе. Недостаточно полно рассмотрены вопросы влияния внешнего поля на нестационарность течения (автоколебания, образование и эволюция тороидальных вихрей), а также границы применимости различных магнитогидродинамических приближений при численном моделировании ЭВТ в условиях влияния внешнего осевого магнитного поля.

Работа [90] предоставляет дополнительные данные о структуре течения в диапазоне внешнего МП $B_z = 10^{-5}$ – 10^{-2} Тл и хорошо дополняет результаты настоящей диссертации, однако эти исследования выполнены и опубликованы существенно позже рассматриваемых здесь результатов.

В диссертации [96] была подробно изучена структура течения при влиянии внешнего МП (10^{-5} – 10^{-2} Тл), однако относительно настоящей работы в [96] используется другая геометрия рабочей ванны. Также отличается метод подвода электрического тока, и в результате направление вторичного течения совпадает с основным ЭВТ.

Перечисленные ограничения существующих исследований определили основное направление настоящей работы. На основании выполненного обзора работ по ЭВТ были сформулированы следующие задачи:

1. Модернизировать экспериментальную установку для исследования ЭВТ. Изготовить корреляционный датчик скорости и систему фильтрации сигналов, а также доработать программное обеспечение для сбора данных. Разработать и реализовать системы генерации и компенсации осевого магнитного поля в объеме жидкого металла. Изготовить волоконно-оптический преобразователь для измерения мгновенной скорости.
2. Разработать и верифицировать методику численного моделирования ЭВТ, основанную на различных МГД приближениях, для расчета структуры течения в широком диапазоне режимных параметров.
3. Экспериментально исследовать влияние магнитного поля Земли и режим его компенсации на осевую скорость и нестационарность (спектральные характеристики пульсаций) электровихревого течения жидкого металла.
4. Изучить режимы электровихревых течений при воздействии внешнего осевого магнитного поля средней величины ($B_z = 10^{-4} - 10^{-3}$ Тл), включая возникновение и затухание автоколебаний, формирование вторичного тороидального вихря и определение области параметров одновихревого и двувихревого режимов течения.
5. На основе численных и экспериментальных методов определить границы применимости выбранных МГД приближений при моделировании ЭВТ в присутствии внешнего осевого магнитного поля ($B_z = 10^{-3} - 1$ Тл).
6. На основании разработанных методов провести взаимосвязанное исследование структуры и особенностей ЭВТ в широком диапазоне внешних магнитных полей ($B_z = 5 \times 10^{-5} - 1$ Тл).

Глава 2 Экспериментальная установка и измерительная методика

2.1 Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 2.1. Конструктивная основа установки соответствует описанию [77] и была адаптирована автором под задачи настоящей работы. В качестве рабочей ванны использовался медный полусферический контейнер (большой электрод) диаметром $d = 188$ мм, заполненный эвтектическим сплавом In–Ga–Sn (массовые концентрации: In – 20.5 %, Ga – 67 %, Sn – 12.5 %, с температурой плавления 10.5 °C). Теплофизические свойства сплава представлены в [97]. В центральной части ванны находился медный цилиндрический электрод с полусферическим торцом радиусом 1–10 мм, электрод погружали в расплав на глубину, равную его радиусу, что обеспечивало заданную локализацию подвода тока. Питание установки осуществлялось от источника постоянного тока. Измерения скорости в объеме жидкого металла проводились с помощью волоконно-оптического преобразователя скорости и термокорреляционного датчика. Скорость закрутки на поверхности определялась методом водородных меток. Температура измерялась термopарами корреляционного датчика. Электрические сигналы с датчиков поступали на усилитель, а затем на АЦП персонального компьютера и обрабатывались на электронно-вычислительной машине (ЭВМ).

Система питания экспериментальной установки устроена следующим образом. Трехфазный ток подается на три однофазных лабораторных автотрансформатора (ЛАТР) РНО-250-10 с напряжением на выходе 0–250 В, с помощью которых можно регулировать ток, проходящий через экспериментальную установку. ЛАТРы соединены цепной передачей с соотношением 1:1. Использование однофазных трансформаторов также позволяет регулировать амплитуду каждой фазы отдельно. Далее ток попадает на трехфазный трансформатор, имеющий 100 витков в первичной обмотке и 3 витка во вторичной обмотке. Затем, полученный на выходе ток поступает в выпрямитель, который состоит из шести водоохлаждаемых диодов ВВ500 ($I \leq 500$ А) и собран по схеме Ларионова.

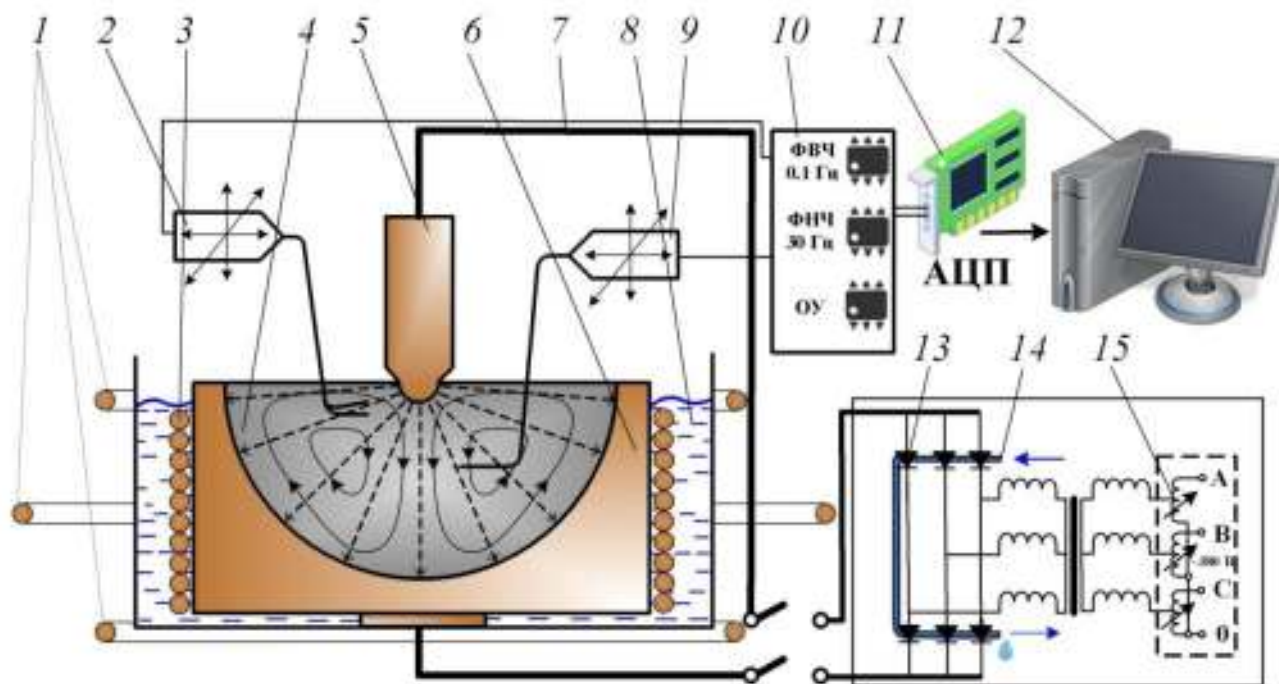


Рисунок 2.1 – Схема экспериментальной установки. 1 – катушка Максвелла, 2 – корреляционный зонд, 3 – соленоид, 4 – эвтектический сплав In-Ga-Sn, 5 – малый электрод, 6 – полусферический контейнер (большой электрод), 7 – токоподвод, 8 – охлаждающая жидкость, 9 – волоконно-оптический датчик скорости, 10 – усилитель и фильтры, 11 – аналогово-цифровой преобразователь, 12 – ЭВМ, 13 – силовые диоды, 14 – рубашка охлаждения диодов, 15 – лабораторные автотрансформаторы.

Значение электрического тока измерялось с использованием цифровой измерительной головки с диапазоном 0–200 мВ с помощью токового шунта с электрическим сопротивлением 5×10^{-5} Ом. Падение напряжения на шунте 75 мВ соответствует электрическому току 1500 А.

Поскольку питание установки осуществляется через выпрямитель, необходимо оценить уровень пульсаций тока. Теоретически, используемая электрическая схема обеспечивает ток с пульсациями 12.5 %. Тем не менее, экспериментально получено, что реальная величина пульсаций электрического тока составляет 20 % с частотой 300 Гц. С помощью тестовых расчетов было установлено, что данные пульсации не приводят к значительному изменению гидродинамики течения и с хорошей точностью полученный электрический ток можно считать постоянным.

2.2 Система охлаждения экспериментальной установки

Система охлаждения экспериментальной установки была модернизирована, а ее схема представлена на рисунке 2.2. Вода от напорного шланга *11* поступала на разветвитель с выходными вентилями *10*, после чего через входные вентили распределялась по рубашкам охлаждения электродов/токоподвода (*2, 3, 8*) и на охлаждение винтовых соединений *4* и *9*, а также на охлаждение силовых диодов *6*. Использование реле давления *7* позволяло блокировать включение электрического тока на экспериментальной установке при отсутствии напора воды. Далее вода поступала в выходные вентили *5*, использование которых позволило избежать обратного заброса воды при перекрытии одного из участков системы охлаждения. Данная система охлаждения позволила существенно снизить темп нагрева эвтектического сплава и участков установки, по которым протекал электрический ток, что позволило непрерывно проводить экспериментальные исследования.

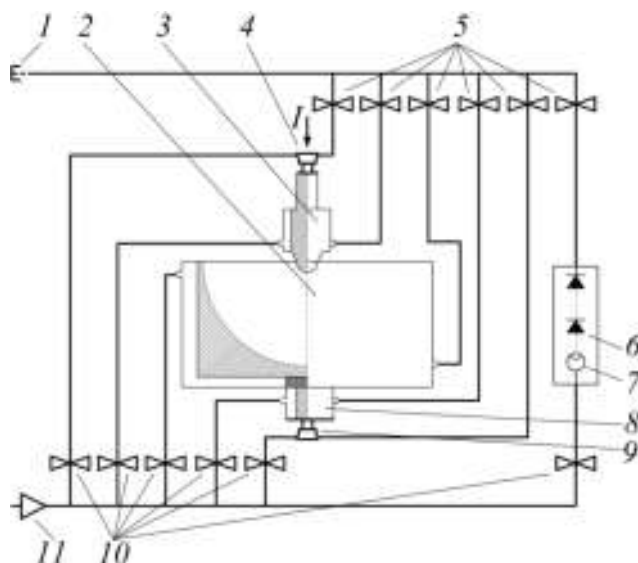


Рисунок 2.2 – Система охлаждения экспериментальной установки. *1* – слив, *2* – рубашка охлаждения большого электрода, *3* – рубашка охлаждения малого электрода, *4* – охлаждение винтового соединения верхнего токопровода и электрода, *5* – выходные вентили, *6* – охлаждаемые диоды, *7* – реле давления, *8* – рубашка охлаждения нижнего токоподвода, *9* – охлаждение винтового соединения нижнего токоподвода и токопровода, *10* – входные вентили, *11* – подача воды.

2.3 Системы создания и подавления осевого магнитного поля

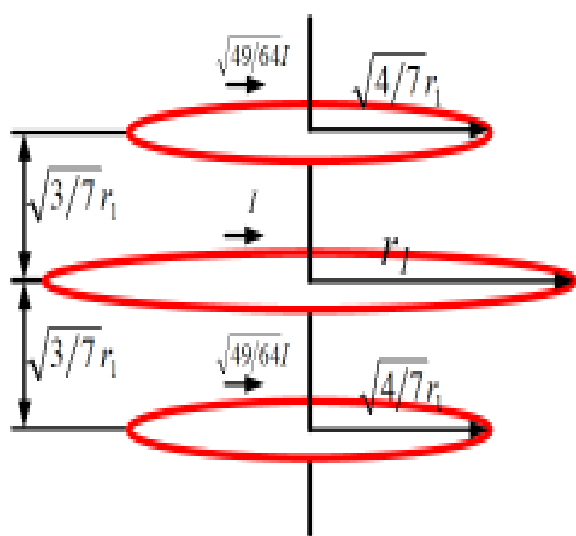
Для создания внешнего осевого магнитного поля был изготовлен соленоид радиусом $r = 106$ мм и высотой $h = 160$ мм (рисунок 2.3). Обмотка соленоида состояла из 4 слоев лакированной медной проволоки диаметром 2.7 мм, с общим количеством витков 228. По расчетам, при токе $I = 100$ А соленоид способен создавать осевое поле до $B_z = 0.1$ Тл. В эксперименте ток ограничивался возможностями источника питания СНП-40 ($I \leq 40$ А), что соответствовало максимальному значению $B_z = 0.04$ Тл. Во время эксперимента соленоид помещался в рубашку охлаждения большого электрода, что существенным образом снижало его нагрев.



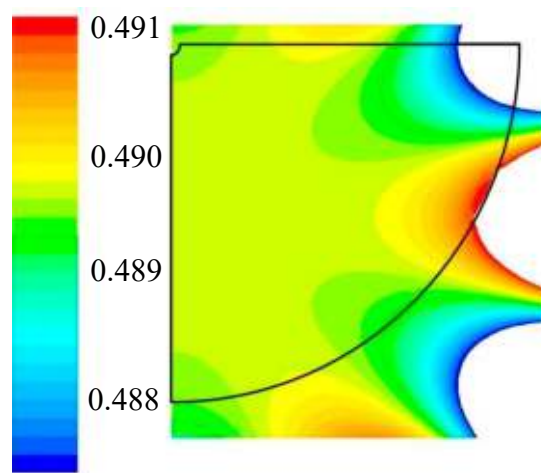
Рисунок 2.3 – Фотография соленоида.

Для подавления магнитного поля Земли было решено сконструировать катушку Максвелла (рисунок 2.4а). Катушка имела 3 кольца, центральное кольцо радиусом $r_1 = 230$ мм и два кольца радиусом $r_2 = \sqrt{4/7}r_1 = 174$ мм. Расстояние между центральным и боковыми кольцами составляло $l = \sqrt{3/7}r_1 = 150$ мм. Каждое кольцо состояло из 4 витков медной лакированной проволоки диаметром $d = 2$ мм. В нашем случае электрический ток, который протекал через центральное кольцо, составлял $I_1 = 3.71$ А, а через боковые кольца – $I_2 = \sqrt{49/64}I_1 = 2.84$ А. Катушка Максвелла по-

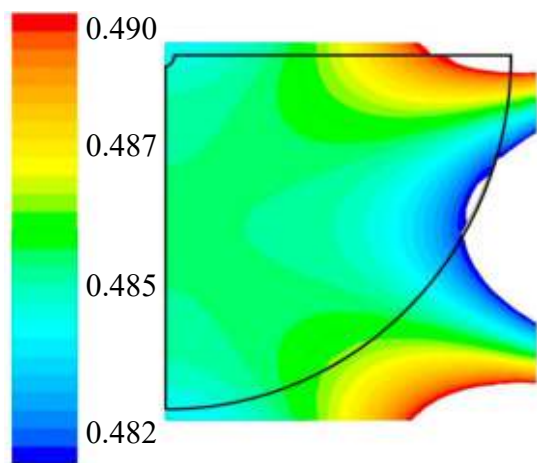
звояляла получить более однородное магнитное поле, чем классическая катушка Гельмгольца (два кольца радиусом r , расположенные на расстоянии $h = r$ друг от друга). Во время эксперимента величина магнитного поля контролировалась магнетометром LakeShore DSP475 и не превышала 3 мкТл. Распределения осевого магнитного поля катушки Максвелла и катушки Гельмгольца показаны на рисунках 2.4б и 2.4в, из которых видно, что неоднородность катушки Максвелла составляет 0.4 %, а катушки Гельмгольца – 1.6 %.



а)



б)



в)

Рисунок 2.4 – а) Схема катушки Максвелла, б) магнитное поле, созданное катушкой Максвелла, в) магнитное поле, созданное катушкой Гельмгольца.

2.4 Автоматическая система измерений

Для автоматизации экспериментов было разработано координатное устройство (рисунок 2.5). На нем устанавливались термкорреляционный и волоконно-оптический датчики, а перемещение обеспечивалось по трем взаимно перпендикулярным осям. Механическая часть включала направляющие и пять шаговых двигателей SM-200 (шаг 0.8°). Управление двигателями реализовано через драйверы L293D с использованием микроконтроллера ATmega8515-16PU. Связь с персональным компьютером выполнялась по LPT-интерфейсу, а управление осуществлялось программой собственной разработки на языке C++ (рисунок 2.6).

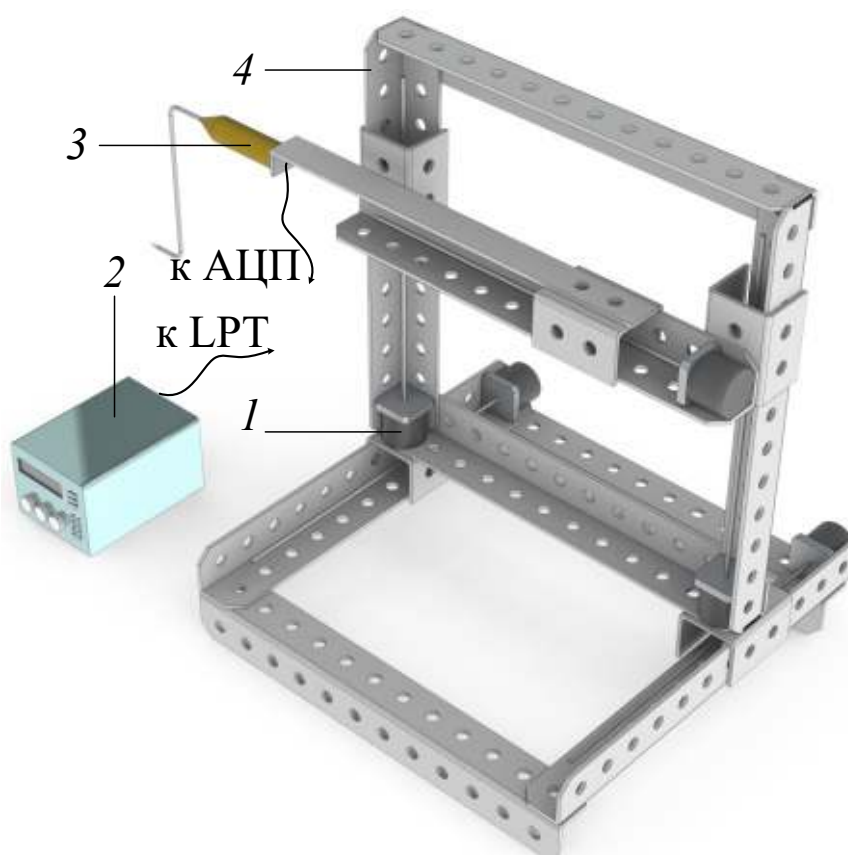


Рисунок 2.5 – Координатное устройство. 1 – шаговые двигатели, 2 – блок микроконтроллера, 3 – зонд, 4 – направляющие.

Был реализован интерпретатор команд, позволяющий задавать последовательность перемещений зонда, выполнять сбор данных через АЦП и осуществлять последующую обработку результатов. Также в программу были добавлены функции расчета взаимной корреляции и цифровые фильтры сигналов с использованием пря-

мого и обратного быстрого преобразования Фурье. Основные команды интерпретатора представлены в таблице 2.1.

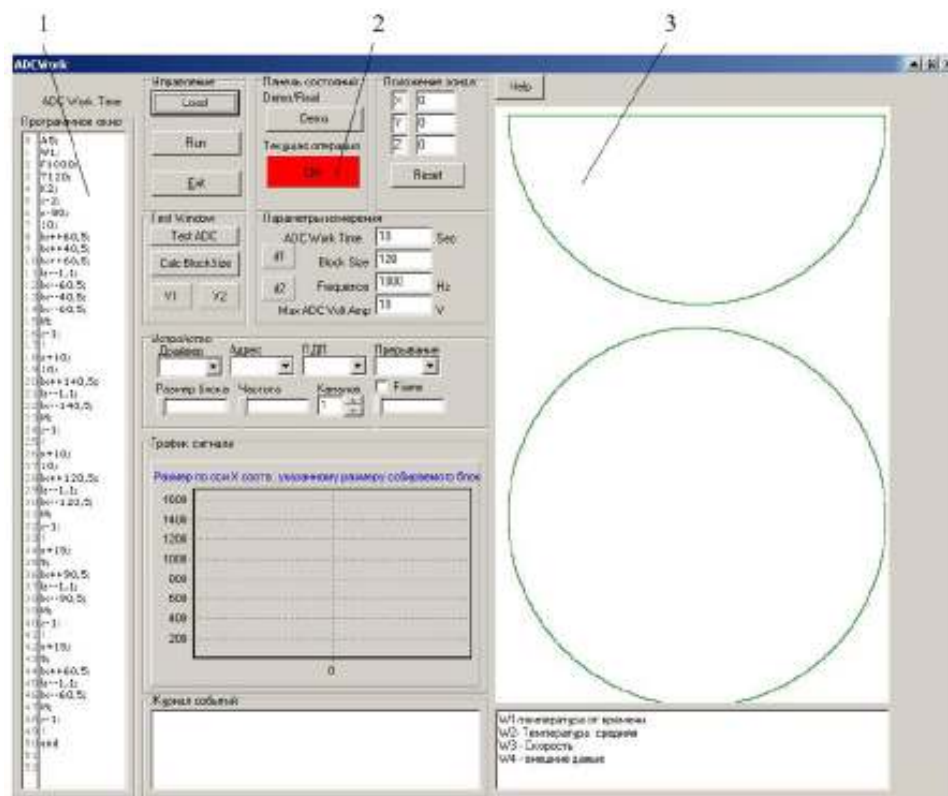


Рисунок 2.6 – Рабочее поле программы для управления зондом.

Таблица 2.1 – Основные команды интерпретатора

Установить частоту оцифровки АЦП, Гц	Fxxxx;
Установить время сбора данных АЦП, с	Txxxx;
Движение зонда по оси x, мм	x+10; / x-10;
Движение зонда по оси y, мм	y+10; / y-10;
Движение зонда по оси z, мм	z+10; / z-10;
Установить число каналов, шт	Kx;
Выполнить цикл NN раз	NN! ... ;
Начать сбор данных	C;

Поскольку измерения проводились в среде с пульсациями электрического тока, то для уменьшения электромагнитных наводок была собрана следующая оригинальная система усиления и фильтрации сигнала (рисунок 2.7).

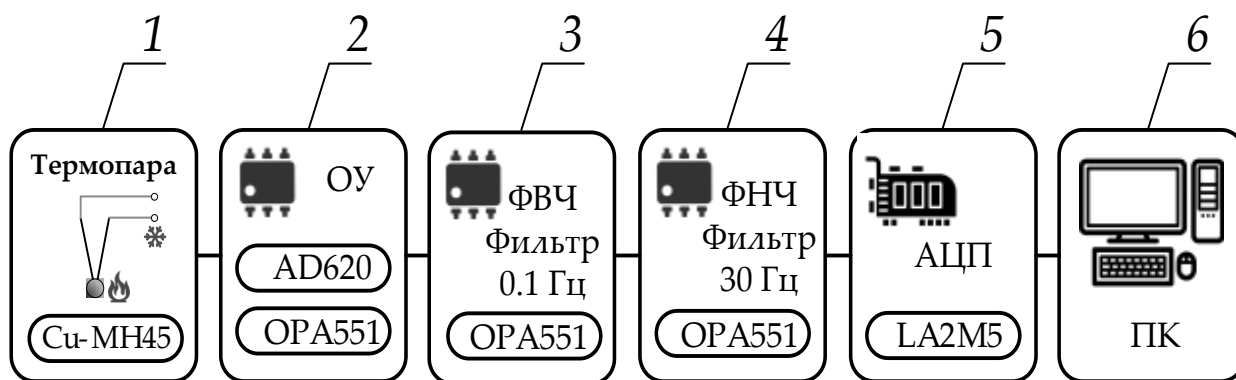


Рисунок 2.7 – Принципиальная схема термопарного усилителя. 1 – источник сигнала (термопары), 2 – операционный усилитель, 3 – ФВЧ Бесселя 3-го порядка, 4 – ФНЧ Бесселя 3-го порядка, 5 – аналогово-цифровой преобразователь, 6 – персональный компьютер

С термопары 1 сигнал поступал в инструментальный двухкаскадный усилитель 2 с коэффициентом усиления $K_U = 1\text{--}3000$. Далее были подключены отдельные два каскада фильтрации сигнала. Первый каскад 3 – это фильтр высоких частот Бесселя 3-го порядка с частотой среза 0.1 Гц, а второй каскад 4 являлся фильтром низких частот Бесселя 3-го порядка с частотой среза 30 Гц. Затем сигнал попадал в АЦП (Ла-2М5 PCI или Ла-2М3 ISA) производства фирмы «Руднев-Шиляев» (характеристики приведены в таблице 2.2), данные обрабатывались в программе и записывались на жесткий диск персонального компьютера. Питание термопарного усилителя и двух отдельных каскадов фильтрации сигнала осуществлялось от восьми литий-ионных аккумуляторов форм-факторов 18500 и 18650 со стабилизацией напряжения 9 В. Таким образом удалось снизить уровень электрических наводок в измерительном тракте.

Таблица 2.2 – Характеристики АЦП Ла-2М5 PCI и Ла-2М3 ISA.

Параметр	Ла-2М5 PCI	Ла-2М3 ISA
Разрядность, бит	12	12
Частота оцифровки (максимальная), кГц	400	500
Входной диапазон, В	$\pm 10 \dots \pm 0.05$	$\pm 10 \dots \pm 0.05$
Входное сопротивление, не менее, МОм	100	100

2.5 Методика измерений температуры и скорости жидкого металла термокорреляционным датчиком

Для измерения скорости и температуры был собран корреляционный зонд, схема которого приведена на рисунке 2.8, а фотография – на рисунке 2.9. Для зонда использовались трехпроводные медно-константановые термопары собственного изготовления, диаметр проводов составлял 0.08 мм, а диаметр чувствительного королька горячего спая 0.3 мм. Расстояние между термопарами было измерено микроскопом МБС-10 и составляло $L = 4.7$ мм. Чувствительность термопар составляла 40 мкВ/К. Провода были помещены в трубку из нержавеющей стали, которая была заземлена.

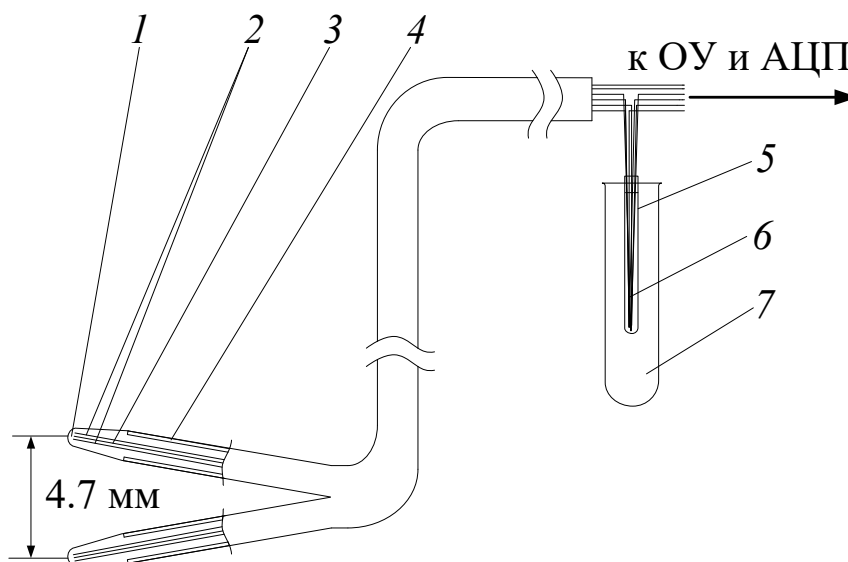


Рисунок 2.8 – Принципиальная схема корреляционного зонда. 1 – горячий спай термопары, 2 – медные провода, 3 – константановый провод, 4 – корпус (трубка из нерж. стали), 5 – стеклянная пробирка, заполненная парафином, 6 – холодный спай термопары, 7 – сосуд Дьюара.

Принцип работы корреляционного зонда следующий (рисунок 2.10) – турбулентный поток жидкого металла направлен по оси z , и пульсация температуры приходит сначала на термопару 1, а затем спустя время $\tau_{\max}$ на вторую термопару. Сигналы с термопар поступали на АЦП персонального компьютера, время сбора данных составляло 30–120 с (экспериментально было установлено, что такое время

сбора данных является оптимальным для измерения скорости корреляционным методом). Затем выполнялся расчет корреляционной функции для сигналов с двух термопар. Положение максимума корреляционной функции относительно оси абсцисс соответствует среднему времени задержки $\tau_{\max}$ прихода температурной пульсации на вторую термопару. Таким образом, средняя скорость рассчитывалась как $U_z = L/\tau_{\max}$.

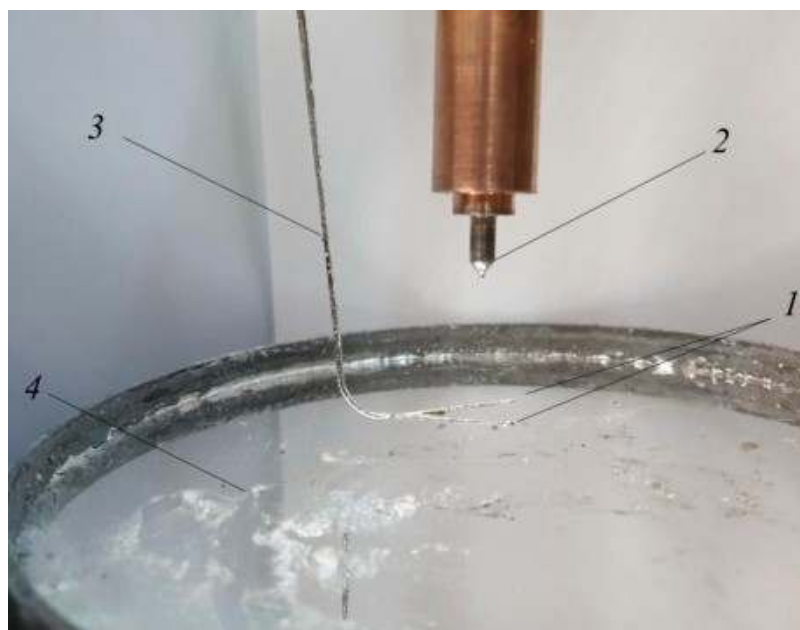


Рисунок 2.9 – Фотография корреляционного зонда.

На рисунке 2.11 представлен пример температурных осциллограмм. Таким образом, постоянная составляющая температуры не требуется для измерения скорости и отсекается ФВЧ фильтром, что позволяет использовать большой коэффициент усиления сигнала (без превышения измеряемого диапазона АЦП). Пример корреляционной функции представлен на рисунке 2.12.

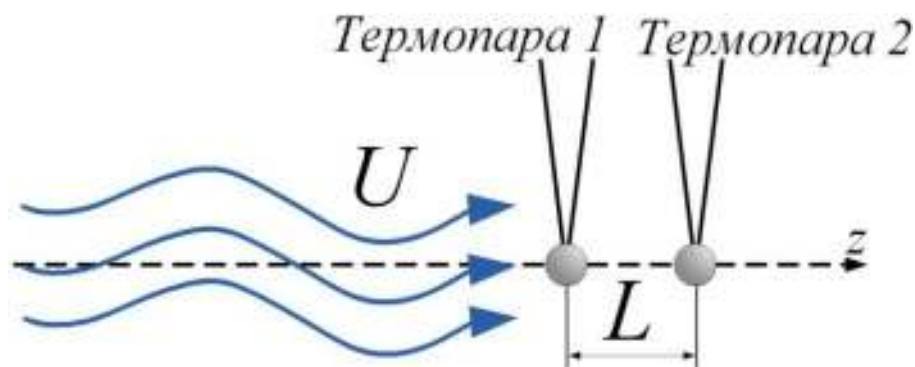


Рисунок 2.10 – Принцип измерения скорости корреляционным зондом.

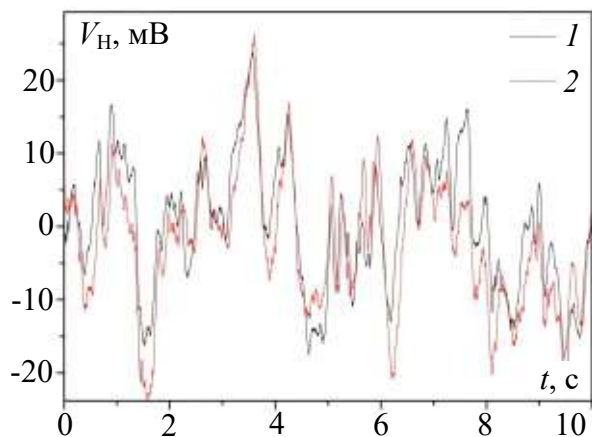


Рисунок 2.11 – Пульсации температуры при электрическом токе 450 А, глубине $z = 20$ мм и расстоянии до оси симметрии $r = 0$ мм.

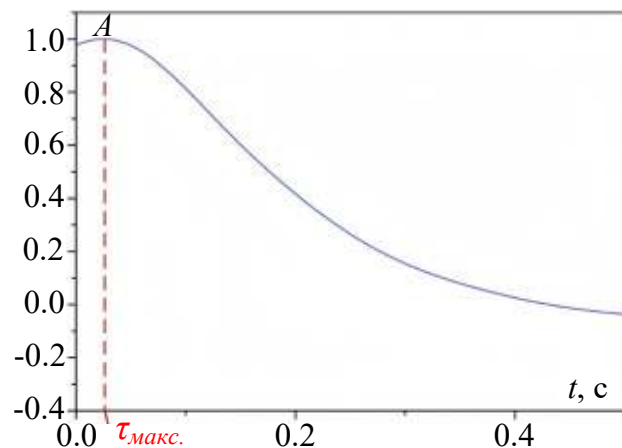


Рисунок 2.12 – Корреляционная функция сигналов с двух термопар.

2.6 Методика измерений скорости волоконно-оптическим преобразователем

Для регистрации мгновенной скорости в объеме жидкого металла применялся волоконно-оптический преобразователь скорости, разработанный в ОИВТ РАН. Конструкция устройства включает оптико-механическую и электронную части. Принципиальная схема датчика приведена на рисунке 2.13, а на рисунке 2.14 показан чувствительный элемент (фотография под микроскопом).

Оптико-механический узел датчика состоит из стеклянного конуса 1 и стеклянного указателя 2. Геометрические параметры: длина конуса ~ 10 мм, диаметр у основания ~ 1 мм, диаметр вершины ~ 50 мкм; указатель: диаметр ~ 20 мкм, длина ~ 2 мм. В стеклянный конус введены два Г-образных световода 3 так, чтобы торец стеклянного указателя располагался в зазоре между ними. Излучение от светодиода 4 подается по световоду и регистрируется фотодиодом 5 после прохождения зазора. Под действием потока жидкого металла стеклянный конус изгибался и приводил к изменению положения стеклянного указателя, который затенял приемный световод. Таким образом, количество света на фотодиоде и электрический сигнал с него оказывались связанными со скоростью потока жидкого металла.

Электронная часть волоконно-оптического преобразователя скорости состоит из светодиода, фотодиода, а также блока усиления, стабилизации и выравнивания сигнала относительно нуля. Фотография преобразователя вместе с электронным блоком представлена на рисунке 2.15.

Характеристики волоконно-оптического преобразователя, подробное описание и технология изготовления представлены в [35].

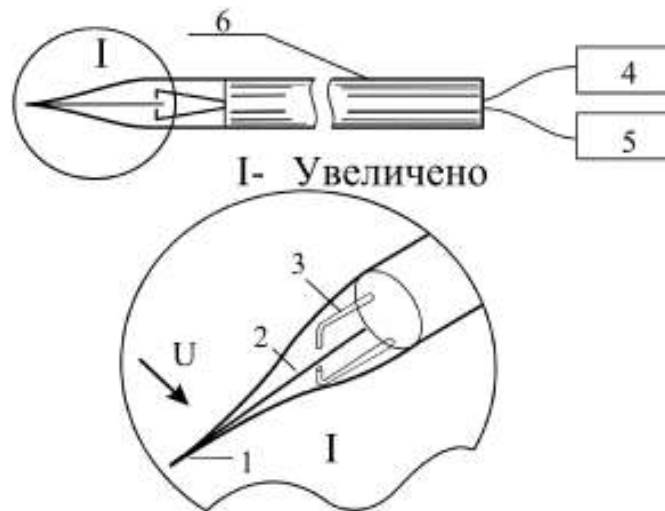


Рисунок 2.13 – Схема волоконно-оптического преобразователя скорости.

1 – стеклянный конус (чувствительный элемент), *2* – указатель, *3* – световод, *4* – излучатель, *5* – фотоприемник, *6* – корпус.

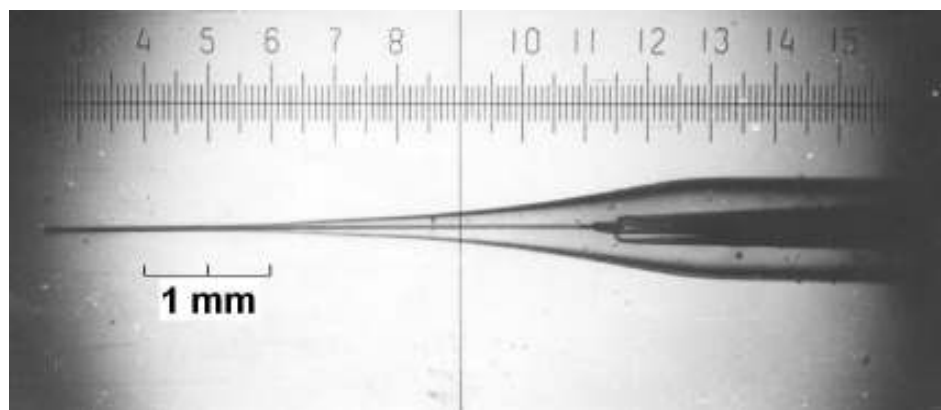


Рисунок 2.14 – Фотография чувствительной части волоконно-оптического преобразователя скорости.



Рисунок 2.15 – Фотография электронного блока и волоконно-оптического преобразователя скорости.

Тарировка волоконно-оптического преобразователя скорости выполнялась в воздушной струе, а после тарировки выполнялся перерасчет характеристики с воздуха на жидкий металл, после чего выполнялась степенная аппроксимация, в результате которой были получены следующие зависимости.

Для положительных скоростей:

$$U = 0.0978V_{\text{н}}^{0.265}. \quad (2.1)$$

Для отрицательных:

$$U = -0.0553|V_{\text{н}}|^{0.412}, \quad (2.2)$$

где U – скорость потока жидкого металла In-Ga-Sn, а $V_{\text{н}}$ – напряжение на выходе волоконно-оптического датчика скорости.

Полученная тарировочная кривая изображена на рисунке 2.16. Более подробное описание метода тарировки преобразователя представлено в [35; 77].

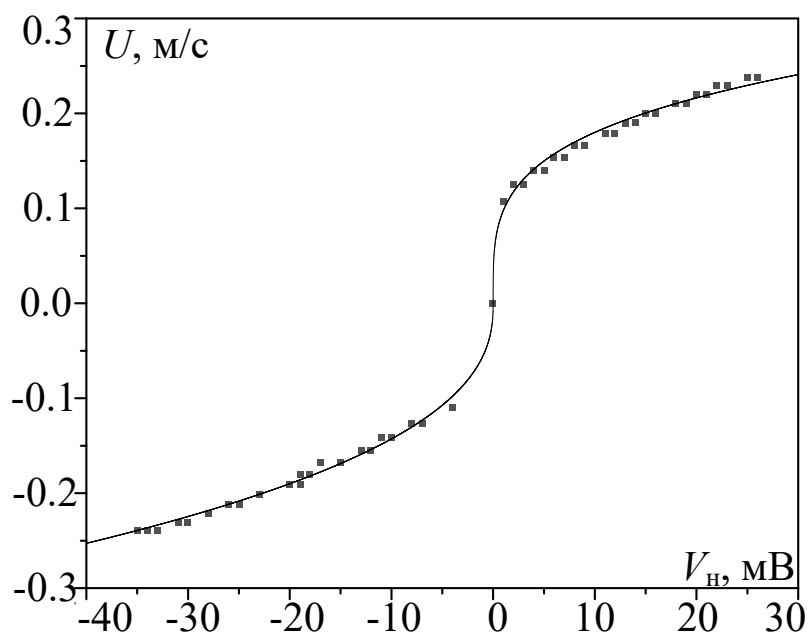


Рисунок 2.16 – Тарировочная зависимость волоконно-оптического преобразователя скорости.

2.7 Методика измерения скорости закрутки жидкого металла на поверхности с использованием водородных меток

Скорость на поверхности жидкого металла определялась следующим образом: поверхность заливалась смесью 1:1 воды и 40 % раствора серной кислоты, при этом происходила химическая реакция с оксидами индия, олова и галлия ($\text{Ga}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Ga}_2(\text{SO}_4)_3 + 3\text{H}_2\text{O}$). После того как оксидная пленка полностью прореагировала, начиналась реакция с жидким металлом ($2\text{Ga} + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Ga}_2(\text{SO}_4)_3 + 3\text{H}_2\uparrow$) и происходило выделение т.н. меток (пузырьков водорода). Для определения положения конкретного пузырька использовались специально подготовленные линейки (рисунок 2.17). Далее выполнялся процесс видеосъемки с частотой 29.97 кадра/с на фотокамеру Canon 550D, а с использованием программы VirtualDub были получены отдельные кадры в виде картинок с расширением bmp. Затем полученные кадры обрабатывались в собственной программе, и определялась азимутальная скорость на поверхности жидкого металла.



Рисунок 2.17 – Пузырьки водорода на поверхности жидкого металла In-Ga-Sn.

2.8 Оценка погрешностей измерений

На точность измерения температуры влияют несколько факторов [77]:

1. Возникновение ЭДС на спае термопары под воздействием переменного магнитного поля. При этом погрешность составляет $\Delta T_{\text{пульс}} = 0.02 \text{ } ^\circ\text{C}$.
2. Погрешность, связанная с собственным шумом термопарного усилителя. ТермоЭДС термопары составляет приблизительно $40 \text{ мкВ}/^\circ\text{C}$, а эквивалентный входной шум термопарного усилителя составляет 7 мкВ для каналов без фильтра и 2 мкВ с фильтром. Таким образом, погрешность, вызванная шумом усилителя, составляет $0.18 \text{ } ^\circ\text{C}$ (без фильтра) и $0.05 \text{ } ^\circ\text{C}$ (с фильтром).
3. Погрешность из-за отклонения характеристики от линейности. В интервале рабочих температур $20\text{--}40 \text{ } ^\circ\text{C}$ зависимость ТермоЭДС от температуры можно считать линейной с высокой степенью точности.

Таким образом, вычислим полную погрешность измерения температуры:

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_{\text{пульс}}^2 + \Delta T_{\text{усил}}^2}, \quad (2.3)$$

где $\Delta T = 0.18 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Определим погрешность измерения скорости корреляционным зондом. Инструментальная погрешность зависит от погрешности измерения времени и не зависит от погрешности температуры, поскольку требуется определить сдвиг по времени максимума корреляционной функции сигналов с двух термопар. Частота дискретизации АЦП $f_d = 1000$ Гц, следовательно, погрешность $\Delta t = 0.0005$ с. Корреляционная функция вычисляется следующим образом:

$$(T_1 \cdot T_2)_i = \sum_{j=0}^N T_1^j T_2^{i+j}. \quad (2.4)$$

где T_1 и T_2 – сигналы с первой и второй термопары, i – номер элемента, j – величина сдвига массива T_2 относительно массива T_1 . Погрешность нахождения максимума корреляционной функции имеет вид:

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2}, \quad (2.5)$$

где погрешности измерения времени для первой и второй термопар $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0.0005$ с, следовательно, $\Delta \tau = 0.0007$ с.

Вычислим инструментальную погрешность определения скорости жидкого металла:

$$U = \frac{L}{\tau}, \quad \Delta U_{\text{и}} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \Delta \tau\right)^2}, \quad (2.6)$$

где расстояние между термопарами $L = 4.7$ мм и погрешность измерения расстояния между термопарами $\Delta L = 6 \times 10^{-5}$ м. Таким образом, погрешность определения $\Delta U_{\text{и}} = 0.005$ м/с для характерных скоростей течения 0.18 м/с.

Оценим случайную погрешность измерения скорости корреляционным методом. Используем экспериментальные данные из 5 измерений, при этом электрический ток, протекающий через установку $I = 250$ А, вычислим погрешность измерения скорости:

$$\Delta U_{\text{сл}} = t_{\text{ст}}(p_d, \nu) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_i - U_{\text{ср}})^2}{n(n-1)}}, p_d = 0.95, \nu = n - 1, \quad (2.7)$$

где n – число измерений, $U_{\text{ср}}$ – среднее значение измеренной скорости, $t_{\text{ст}}(p_d, \nu)$ – коэффициент Стьюдента, p_d – доверительная вероятность (двусторонний интервал), при этом $\Delta U_{\text{сл}} = 0.022$ м/с.

Вычислим полную погрешность измерения скорости:

$$\Delta U = \sqrt{\Delta U_{\text{сл}}^2 + \Delta U_{\text{и}}^2}, \quad (2.8)$$

Таким образом, $\Delta U = 0.0224$ м/с, что составляет 12.6 %. Обычно погрешность измерения скорости находилась в диапазоне 6–15 %. В некоторых режимах погрешность достигала 35 %, что связано с различной турбулизацией потока жидкого металла. Следует отметить, что такая величина погрешности измерения скорости является характерной для корреляционного метода измерения скорости.

На примере одного из измерений оценим погрешность измерения азимутальной скорости при помощи водородных меток. Расчет скорости по экспериментальным данным осуществлялся с помощью собственной программы, написанной на языке С. Сначала был получен видеофайл, записанный на устройство Canon 550D, затем программой VirtualDub для каждого кадра был получен рисунок в формате bmp. Разрешение рисунков составляло 640×640 пикселей. При обработке результатов сначала задавался центр эллипса, который располагался в центре полусферического контейнера. В идеальном случае водородная метка движется по окружности. Однако из-за оптических искажений при съемке предполагалось, что траектория метки является эллиптической. Таким образом, в некотором интервале кадров водородная метка описывает дугу, длина которой вычисляется:

$$l_{\text{дг}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(a_3 \sin(\theta))^2 + (b_3 \cos(\theta))^2} d\theta, \quad (2.9)$$

где a_3 , b_3 – большая и малая полуось эллипса, $\theta_1 = 0.017$ рад и $\theta_2 = 0.78$ рад – начальный и конечный угол дуги эллипса.

Интеграл (2.9) вычислялся по формуле трапеций с числом узлов интегрирования 10000, погрешностью аппроксимации в этом случае можно пренебречь ($\Delta l_{\text{тр}} = 7 \times 10^{-13}$ м). При этом погрешность длины дуги эллипса можно определить:

$$\Delta l_{\text{дг}} = \sqrt{\left(\frac{\partial l_{\text{дг}}}{\partial a_3} \Delta a_3\right)^2 + \left(\frac{\partial l_{\text{дг}}}{\partial b_3} \Delta b_3\right)^2 + \left(\frac{\partial l_{\text{дг}}}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial l_{\text{дг}}}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2\right)^2}, \quad (2.10)$$

где погрешность определения величины большой полуоси $\Delta a_3 = 4.944 \times 10^{-4}$ м, малой полуоси $\Delta b_3 = 2.6 \times 10^{-4}$ м, $\Delta \theta_1 = 4 \times 10^{-4}$ рад, $\Delta \theta_2 = 0.02$ рад, а $\Delta l_{\text{дг}} = 4 \times 10^{-4}$ м.

Азимутальная скорость течения и ее инструментальная погрешность определяются следующим образом:

$$U_\phi = \frac{l_{\text{дг}}}{t}, \quad \Delta U_\phi^{\text{и}} = \sqrt{\left(\frac{\partial U_\phi}{\partial l_{\text{дг}}} \Delta l_{\text{дг}}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial t} \Delta t\right)^2}, \quad (2.11)$$

где $t = 1.058$ с – время, за которое водородная метка проходит по дуге длиной $l_{\text{дг}}$, погрешность измерения времени $\Delta t = 0.017$ с, таким образом, $\Delta U_\phi^{\text{и}} = 5 \times 10^{-4}$ м/с.

Оценим случайную погрешность измерения скорости закрутки жидкого металла. Возьмем экспериментальные данные из 5 измерений для режима $I = 10$ А, $B_z = 2 \times 10^{-2}$ Тл и вычислим погрешность определения азимутальной скорости:

$$\Delta U_\phi^{\text{сл}} = t_{\text{ст}}(p_d, v) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_{\phi_i} - U_\phi^{\text{ср}})^2}{n(n-1)}}. \quad (2.12)$$

где $\Delta U_\phi^{\text{сл}} = 2.03 \times 10^{-3}$ м/с, при типичном значении средней азимутальной скорости $U_\phi = 0.022$ м/с,

$$\Delta U_\phi = \sqrt{\Delta U_\phi^{\text{сл}2} + \Delta U_\phi^{\text{и}2}}, \quad (2.13)$$

Таким образом, $\Delta U_\phi = 2.09 \times 10^{-3}$ м/с, что составляет 9.5 %. Следует отметить, что такая погрешность характерна для точки вблизи малого электрода ($z = 0$ мм, $r = 10$ мм) и связана с тем, что в этой области оптические искажения камеры макси-

мальны, при этом среднее значение погрешности измерения азимутальной скорости составляет 7.5 %.

Инструментальная и случайная погрешности волоконно-оптического преобразователя скорости определены в [77]. Ниже приведена только основная информация о погрешности метода.

На рисунке 2.18 показано, как меняются абсолютная и относительная инструментальные погрешности при определении скорости потока жидкого металла. Относительная погрешность снижается по мере роста скорости: в диапазоне малых скоростей ($U \approx 0.01$ м/с) она составляет 100–200 %, при $U = 0.05$ м/с не превышает 10 %, а при $U = 0.15$ м/с – 1 %.

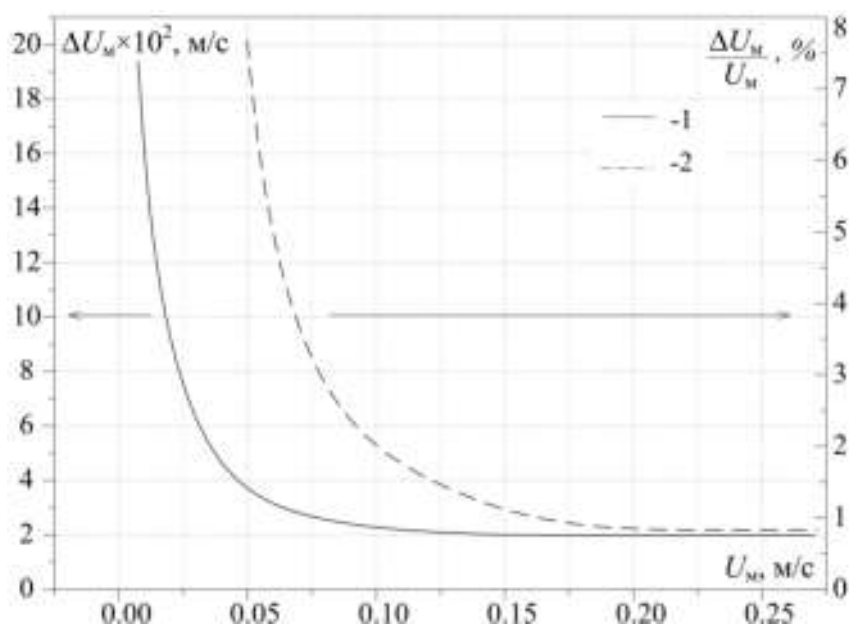


Рисунок 2.18 – Систематическая погрешность тарировки волоконно-оптического датчика скорости: 1 – абсолютная, 2 – относительная [77].

Случайная составляющая погрешности при измерении скорости волоконно-оптическим датчиком определяется совокупным действием нескольких факторов. К ним относятся, в частности, нестабильность воздушного потока при тарировке, дрейф электрических параметров усилителя сигнала и электромагнитные наводки в измерительном тракте системы. Количественно разделить вклад каждого фактора затруднительно, поэтому их влияние далее рассматривается в совокупном разбросе отклонений относительно тарировочной зависимости.

На рисунке 2.19 представлен график зависимостей абсолютной и относительной погрешностей волоконно-оптического датчика (отклонение измеренной скорости от тарировочной зависимости) от выходного напряжения зонда V_H , линиями отмечены средние и максимальные значения.

Сопоставление графиков показывает, что случайная составляющая погрешности превышает инструментальную, при этом в диапазоне скоростей 0.05–0.2 м/с максимальная относительная погрешность не превышает 10 %.

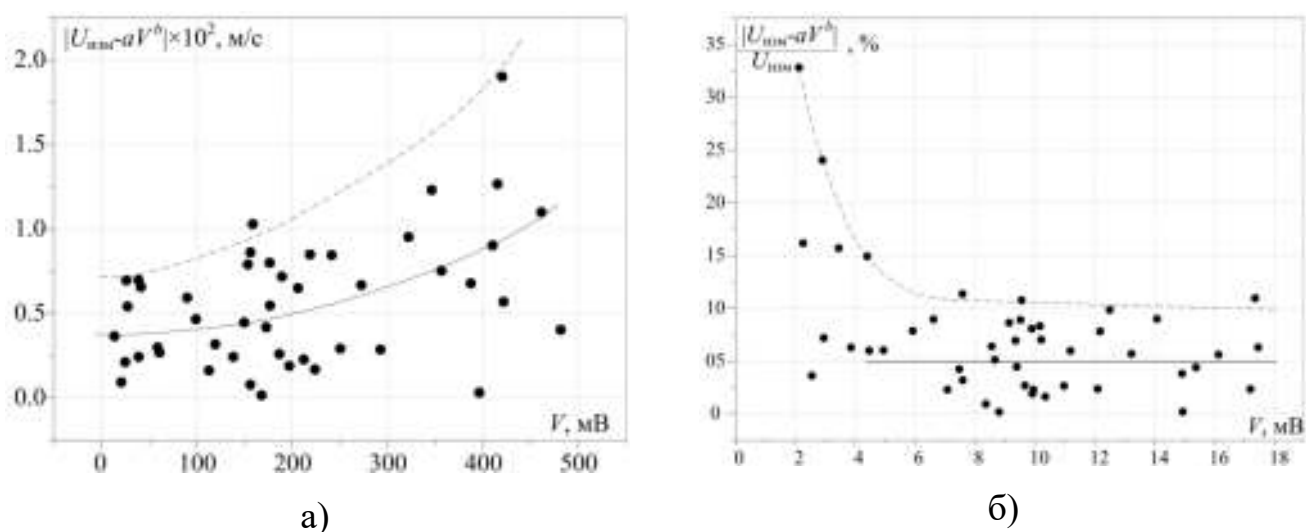


Рисунок 2.19 – Влияние выходного напряжения случайную на погрешность волоконно-оптического датчика: а) абсолютная погрешность, б) относительная погрешность [77].

2.9 Выводы к главе 2

1. Модернизирована система охлаждения экспериментальной установки, добавлены дополнительные вентили для охлаждения новых участков установки, использование выходных вентилях позволило избежать обратных забросов воды на отключенные участки системы охлаждения.

2. Спроектирован и изготовлен корреляционный зонд для измерения скорости и температуры в объеме жидкого металла.

3. Изготовлен волоконно-оптический преобразователь скорости для измерения мгновенной скорости потока эвтектического сплава In-Ga-Sn.

4. Сконструированы системы создания и подавления внешнего осевого магнитного поля (соленоид и катушка Максвелла).
5. Разработана и собрана система фильтрации электрического сигнала для температурных и термокорреляционных измерений.
6. Модернизирована система автоматического сбора данных.
7. Выполнена оценка погрешностей измерения скорости и температуры жидкого металла.

Глава 3 Математическое описание процесса и численная методика

3.1 Основные уравнения

Далее приведена система уравнений, используемая для численного моделирования электровихревых течений, постановка соответствует [77].

Уравнение движения:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla p + \rho \nu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{эл}}, \quad (3.1)$$

где ρ – плотность, $\mathbf{U}$ – скорость, p – давление, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{F}_{\text{эл}}$ – электромагнитная сила.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля, μ_0 – магнитная постоянная, $\mathbf{J}$ – плотность электрического тока, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, ρ_c – объемная плотность электрического заряда, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Закон Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (3.7)$$

где σ – электрическая проводимость.

Закон сохранения заряда:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.8)$$

Уравнение состояния среды:

$$\rho = \rho(p, T), \quad (3.9)$$

где T – температура.

При этом выражение для электромагнитной силы имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\text{эл.}} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.10)$$

При решении вышеописанных уравнений применяются следующие допущения:

1. Среда немагнитная ($\mu = 1$). Это справедливо при использовании жидких металлов, таких как медь, натрий, ртуть, индий, галлий, олово и т.д.
2. Среда – электрический проводник.
3. Током смещения можно пренебречь в рамках низкочастотного приближения, а конвекционным током – поскольку скорость движения жидкого металла значительно меньше скорости света.
4. Физические характеристики среды изотропны и однородны и не зависят от температуры и прочих факторов.
5. Жидкость несжимаема ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$).

Основные используемые критерии подобия в ЭВТ представлены в таблице 3.1. Величина R_2 характеризует линейный размер (радиус полусферического контейнера, либо локальный размер, связанный с максимальным значением скорости течения). Число S является аналогом числа Рейнольдса в ЭВТ и называется параметром электровихревого течения, а параметр N характеризует степень влияния внешнего МП. Число Стюарта St характеризует, насколько велики силы Лоренца по сравнению с инерцией потока, с его помощью можно оценить влияние токов, индуцированных движением электропроводящей среды. Магнитное число Рейнольдса характеризует отношение конвективного переноса магнитного поля потоком к магнитной диффузии, при $Re_m \geq 1$ следует учитывать влияние индуцированных МП $B_{\text{инд.}}$.

Таблица 3.1 – Критерии подобия в ЭВТ

Безразмерный параметр	Формула	Диапазон значений
Линейный размер	R_2	0.01–0.094
Модифицированное число Рейнольдса	$Re = I/\nu\sqrt{\mu_0/\rho}$	$32-4\times 10^5$
Параметр ЭВТ, S	$S = Re^2 = \mu_0 I^2 / \rho \nu^2$	$10^3-3.2\times 10^{11}$
Параметр влияния внешнего МП, N	$N = B_z IR_2 / \rho \nu^2$	$1.6\times 10^4-2\times 10^{11}$
Отношение внешнего и собственного МП, α	$\alpha = B_z/B_0 = N/S$	$2\times 10^{-3}-7500$
Магнитное число Рейнольдса	$Re_m = \sigma \mu_0 U R_2$	$4.1\times 10^{-4}-3.5$
Число Стюарта	$St = B^2 \sigma R_2 / \rho U$	$4\times 10^{-5}-5\times 10^4$

3.2 Расчет плотности электрического тока

Для расчета электромагнитной силы $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ в уравнении (3.1) требуется сначала выполнить расчет распределения плотности тока в жидком металле, а затем произвести расчет собственного магнитного поля. Плотность тока определяется по методике [77], либо по аналитической оценке для растекания тока от точечного источника, либо из решения уравнения электрического потенциала.

Рассмотрим растекание электрического тока I в полусферическом контейнере. В сферической системе координат (ССК) из геометрических соображений плотность тока имеет вид:

$$J(R) = \frac{I}{2\pi R^2}. \quad (3.11)$$

В общем виде, если распределение плотности тока нельзя вычислить аналитически, для контейнера любой формы решается уравнение для электрического потенциала:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0. \quad (3.12)$$

Если электрическая проводимость среды однородна, то уравнение (3.12) сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (3.13)$$

Плотность тока вычисляется по формуле (3.14), при этом используются граничные условия непротекания электрического тока через границу:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\sigma \nabla \Phi, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

На поверхностях подвода и отвода электрического тока ($S_{\text{вх}}$ и $S_{\text{вых}}$) задаются значения электрического потенциала:

$$\Phi(S_{\text{вх}}) = \Phi_0 \text{ и } \Phi(S_{\text{вых}}) = 0. \quad (3.15)$$

Поскольку численное моделирование выполнялось в декартовой и цилиндрической системах координат (ДСК и ЦСК), получим выражения для плотности тока в этих СК.

Рассмотрим случай, когда распределение плотности тока возможно получить аналитически. Для этого преобразуем выражение (3.11) из ССК в ДСК и получим выражения для компонент плотности тока:

$$J_x(x, y, z) = \frac{Ix}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.16)$$

$$J_y(x, y, z) = \frac{Iy}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.17)$$

$$J_z(x, y, z) = \frac{Iz}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.18)$$

Затем преобразуем выражение (3.11) из ССК в ЦСК, тогда получим:

$$J_r(r, z) = \frac{Ir}{2\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.19)$$

$$J_z(r, z) = \frac{Iz}{2\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.20)$$

В случае, когда распределение плотности вычисляется из уравнения Лапласа, используя выражение (3.13), получим уравнение для плотности тока в ДСК:

$$J_x(x, y, z) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3.21)$$

$$J_y(x, y, z) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (3.22)$$

$$J_z(x, y, z) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.23)$$

В ЦСК:

$$J_r(r, z) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (3.24)$$

$$J_z(r, z) = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.25)$$

Полученные выражения для вычисления плотности электрического тока впоследствии использовались для расчета электромагнитной силы.

3.3 Методика расчета магнитного поля

В настоящей работе необходимо определить собственное магнитное поле, создаваемое током проводимости **J**. Для этого использованы два подхода: интегрирование уравнений Максвелла и применение закона Био-Савара-Лапласа. Методика расчета азимутальной компоненты B_φ и подробный вывод соответствующих выражений приведены в [55; 77].

Интегрирование уравнения Максвелла позволяет получить аналитическое выражение для магнитного поля в полусферической ванне. Запишем уравнение Максвелла:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (3.26)$$

R-компонента ротора в сферической системе координат в осесимметричной задаче записывается как:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_R = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial (B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right). \quad (3.27)$$

О дифференциальных операторах подробно написано в [98]. Учитывая выражение для плотности тока (3.11), из уравнения Максвелла (3.26) и (3.27) можно получить выражение для нахождения индукции магнитного поля:

$$B(R, \theta) = \frac{\mu_0 I (1 - \cos \theta)}{2\pi R \sin \theta}, \quad (3.28)$$

также учитываем, что магнитное поле равно нулю на оси $B|_{\theta=0}$.

Применительно к численным расчетам преобразуем (3.28) в ДСК:

$$B_x(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad (3.29)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (3.30)$$

В ЦСК:

$$B_\phi(r, z) = \frac{\mu_0 I (\sqrt{r^2 + z^2} - z)}{2\pi r \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.31)$$

В случаях, когда распределение магнитного поля нельзя получить аналитически, МП определяют по интегральной формуле Био-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}|^3} dV. \quad (3.32)$$

Поскольку численные расчеты выполнялись в декартовой и цилиндрической системах координат, далее приведем конечные выражения для компонент магнитного поля в этих системах.

Приведем интегральные соотношения для компонент магнитного поля в ДСК:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y(z_0 - z) - J_z(y_0 - y)}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dV, \quad (3.33)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z(x_0 - x) - J_x(z_0 - z)}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dV, \quad (3.34)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x(y_0 - y) - J_y(x_0 - x)}{((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dV. \quad (3.35)$$

А выражения для численного моделирования:

$$B_{xj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M \frac{J_y(z_j - z_i) - J_z(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \Delta V_i, \quad (3.36)$$

$$B_{yj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M \frac{J_z(x_j - x_i) - J_x(z_j - z_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \Delta V_i, \quad (3.37)$$

$$B_{zj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M \frac{J_x(y_j - y_i) - J_y(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{3/2}} \Delta V_i, \quad (3.38)$$

где j – индекс ячейки, в которой рассчитывается магнитное поле, i – индекс ячейки, которая создает магнитное поле в ячейке с индексом j , x, y, z – координаты центров ячеек сетки, ΔV – объем ячейки, M – количество ячеек сетки.

Для двумерной осесимметричной системы (цилиндрическая система координат) ситуация с нахождением индукции магнитного поля обстоит сложнее. В законе Био-Савара-Лапласа выполним векторное произведение, переведем выражение в ЦСК и запишем выражения отдельно для каждой компоненты индукции магнитного поля:

$$B_r(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_0^{r(z)} \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{(J_r \sin\psi(z_0 - z) + J_\varphi \cos\psi(z_0 - z))r}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\psi dz dr + \right. \\ \left. + \int_0^{r(z)} \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{J_z r \sin\psi r}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\psi dz dr \right), \quad (3.39)$$

$$B_\varphi(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_0^{r(z)} \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{(-J_r \cos\psi(z_0 - z) + J_\varphi \sin\psi(z_0 - z))r}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\psi dz dr + \right. \\ \left. + \int_0^{r(z)} \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{J_z (r_0 - r \cos\psi)r}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\psi dz dr \right), \quad (3.40)$$

$$B_z(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{r(z)} \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{(J_\varphi (r - r_0 \cos\psi) - J_r r_0 \sin\psi)r}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi + (z - z_0)^2)^{3/2}} d\psi dz dr, \quad (3.41)$$

где r_0, z_0 – координаты точки, в которой определяется магнитное поле, r, z – координаты элемента с током, создающим магнитное поле, $r(z)$ – зависимость текущего радиуса расчетной области от осевой координаты, ψ – разность угловых координат радиус-векторов $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$.

Вычисление объемных интегралов, приведенных выше, сводится к последовательному вычислению интегралов по углу ψ , а итоговые выражения для компонент магнитного поля имеют вид:

$$B_r(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S G_r(r_0, z_0, r, z) dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M G_{r_i} \Delta S_i, \quad (3.42)$$

$$B_\varphi(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S G_\varphi(r_0, z_0, r, z) dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M G_{\varphi_i} \Delta S_i, \quad (3.43)$$

$$B_z(r_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S G_z(r_0, z_0, r, z) dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^M G_{z_i} \Delta S_i, \quad (3.44)$$

где G_i – значение функции, заданное в центре ячейки, ΔS_i – площадь ячейки двумерной сетки.

Вычисление интегралов по поверхности не представляет особых трудностей, и что практически важно, не требует информации о форме расчетной области.

Результат аналитического решения можно получить, используя эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, 0 \leq k \leq 1, \quad (3.45)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, 0 \leq k \leq 1, \quad (3.46)$$

где k :

$$k = 2 \sqrt{\frac{rr_0}{(r + r_0)^2 + (z_0 - z)^2}}. \quad (3.47)$$

Отметим, что поскольку в r и z компоненты магнитного поля вносит вклад только J_φ -компонента плотности тока, то решение полностью совпадает с выражениями, полученными в [99], для магнитного поля кольцевого тока. А выражение для G_φ – компоненты также интегрируется аналитически и результат можно представить через специальные функции. Также отметим, что J_φ – компонента присутствует при наличии соленоида или при учете индуцированных токов и равна нулю для тока проводимости. Таким образом, выражения для вычисления объемных интегралов по углу ψ будут иметь вид:

$$G_r(r_0, z_0, r, z) = J_\varphi \frac{2(z_0 - z)}{r_0 \sqrt{(r + r_0)^2 + (z_0 - z)^2}} \cdot \left(-K(k(r_0, z_0, r, z)) + \frac{r^2 + r_0^2 + (z_0 - z)^2}{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2} E(k(r_0, z_0, r, z)) \right) \quad (3.48)$$

$$G_\varphi(r_0, z_0, r, z) = f_1((f_2 J_r + f_3 J_z) E(k(r_0, z_0, r, z)) + (f_4 J_r + f_5 J_z) \cdot K(k(r_0, z_0, r, z))), \quad (3.49)$$

$$G_z(r_0, z_0, r, z) = J_\varphi \frac{(z_0 - z)}{\sqrt{(r + r_0)^2 + (z_0 - z)^2}} \cdot \left(K(k(r_0, z_0, r, z)) + \frac{r^2 - r_0^2 - (z_0 - z)^2}{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2} E(k(r_0, z_0, r, z)) \right), \quad (3.50)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 – функции от r_0, z_0, r, z :

$$f_1 = \frac{1}{(r_0(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{(r - r_0)^2 + (z_0 - z)^2}{(r + r_0)^2 + (z_0 - z)^2}}, \quad (3.51)$$

$$f_2 = -(z_0 - z)(r_0^2 + r^2 + (z_0 - z)^2), \quad (3.52)$$

$$f_3 = (r_0 - r)(r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2), \quad (3.53)$$

$$f_4 = (z_0 - z)((r_0 - r)^2 + (z_0 - z)^2), \quad (3.54)$$

$$f_5 = r((r_0 - r)^2 + (z_0 - z)^2). \quad (3.55)$$

Для вычисления эллиптических интегралов использовался метод, основанный на разложении подынтегральных функций в ряд с помощью полиномов Чебышева [100].

Далее полученные выражения для магнитного поля были использованы при написании программного кода с использованием технологии параллельного программирования NVIDIA CUDA.

3.4 Расчет магнитного поля с использованием технологии NVIDIA CUDA

CUDA – программно-аппаратная архитектура, позволяющая выполнять параллельные вычисления с использованием графического процессорного устройства (ГПУ) NVIDIA. В расчетах использовались видеокарты NVIDIA GeForce RTX 3080 и RTX 4090, также более ранние расчеты выполнялись на NVIDIA GeForce GTX 660 и GTX Titan Black. В таблице 3.2 приведена вычислительная мощность этих устройств.

При работе с числами одинарной точности (FP32), при выполнении последовательных итераций, погрешность накапливается быстрее, чем для чисел двойной точности (FP64). Однако при вычислении МП число последовательных итераций

было относительно мало, поэтому расчеты проводились при использовании чисел одинарной точности.

Таблица 3.2 – Вычислительная мощность используемых видеокарт

Название ГПУ	Производительность FP32, GFLOPS	Производительность FP64, GFLOPS
NVIDIA GeForce GTX 660	1881.6	78.4
NVIDIA GeForce GTX Titan Black	5121	1701
NVIDIA GeForce RTX 3080	25067.5	783.3
NVIDIA GeForce RTX 4090	73070	1142

Для проверки алгоритма магнитное поле рассчитывалось для цилиндра длиной $L = 1$ м и радиусом $R = 0.01$ м с кольцом радиуса $R_k = 0.05$ м, расположенным на плоскости $z = 0$ (рисунок 3.1). Через цилиндр протекал электрический ток плотностью $J_z = 10^6$ А/м². Этот ток создавал МП с компонентами B_x , B_y в ДСК или с компонентой B_ϕ в ЦСК. Для проверки магнитных полей B_r и B_z , созданных компонентой электрического тока J_ϕ в ЦСК, и компонентами J_x , J_y в ДСК использовалось кольцо с током. Плотность электрического тока в кольце была равна 10^6 А/м², а площадь поперечного сечения $S = 10^{-6}$ м². Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением для бесконечного цилиндра $B_\phi = \mu_0 J_z r / 2$ и с аналитическим решением [99] для кольца с током.

На рисунке 3.2 представлены зависимости индукции МП от расстояния до оси симметрии для ДСК. Компонента B_y (рисунок 3.2а), созданная током J_z , соответствует компоненте B_ϕ в ЦСК. МП кольца с током представлено на рисунке 3.2б. Компонента B_y , которая соответствует компоненте B_ϕ в ЦСК, равна нулю, поскольку ток J_ϕ не создает азимутальное МП. На рисунке 3.2в представлен график для компоненты B_z , а на рисунке 3.2г для компоненты B_x (соответствует компоненте B_r в ЦСК).

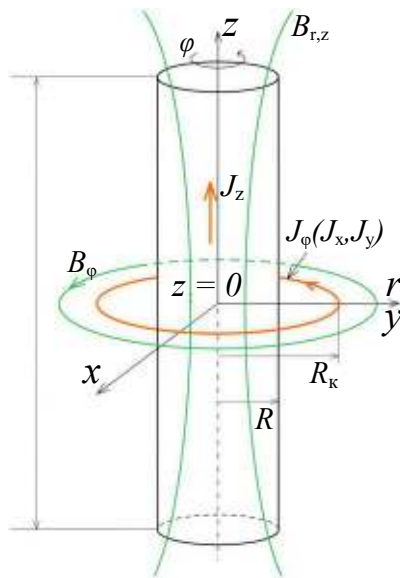


Рисунок 3.1 – Схема расчетной области к задаче о нахождении МП бесконечного цилиндра с кольцом.

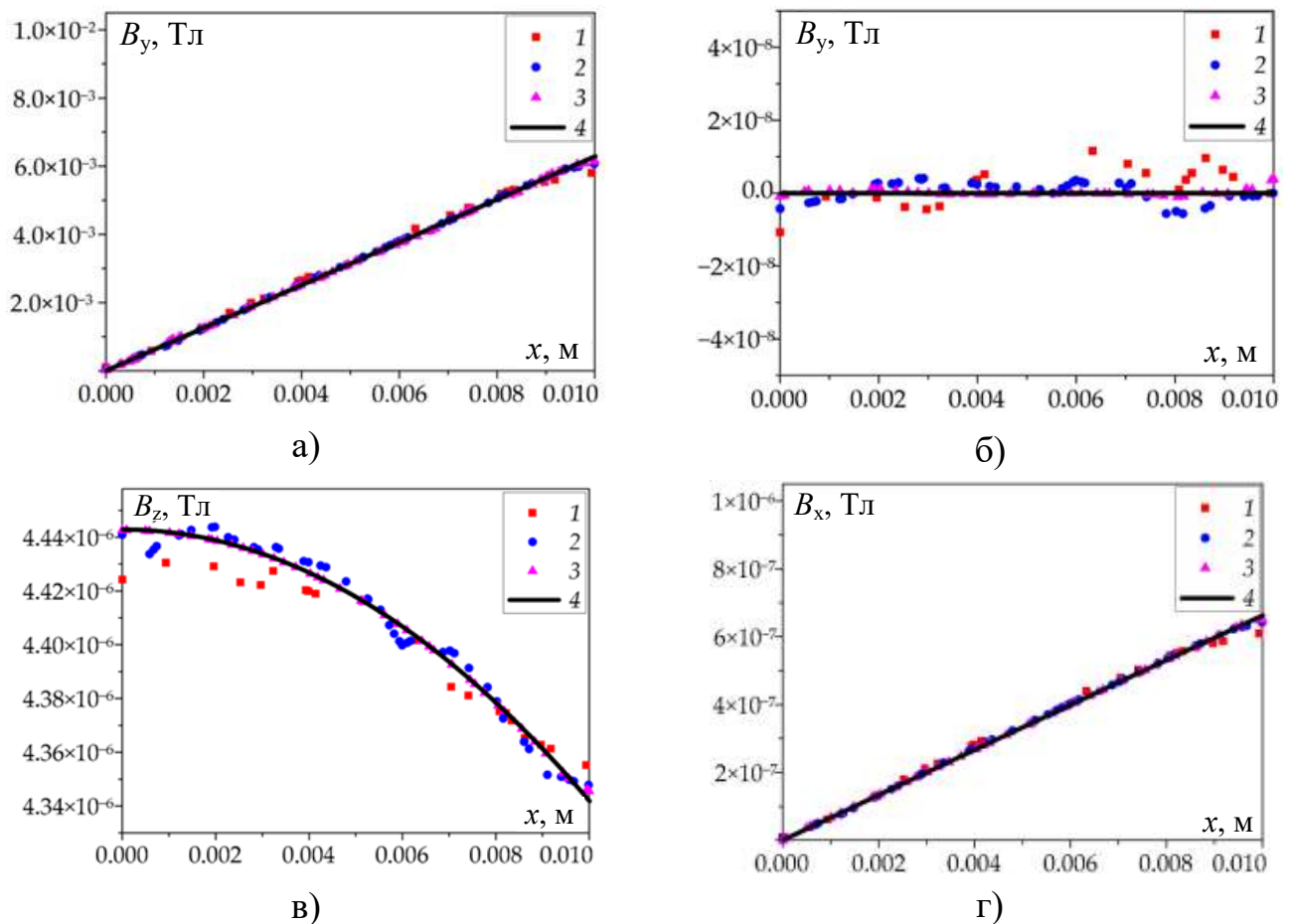


Рисунок 3.2 – Распределение различных компонент МП на высоте $z = 0.5$ м на сетках разного размера. а) компонента B_y , созданная током J_z , б) компонента B_y , созданная током J_ϕ , в) компонента B_z , г) компонента B_x . 1 – сетка 244 тыс. ячеек, 2 – 2.5 млн. ячеек, 3 – 10 млн. ячеек, 4 – аналитическое решение.

Расчеты были выполнены на сетках с различным числом ячеек (244 тыс., 2.5 млн. и 10 млн.). Увеличение числа ячеек приводит к уменьшению отклонения от аналитического решения. Вместе с тем, при большом отношении длины цилиндра к радиусу ($L/R = 100$) и ограниченном числе ячеек элементы приобретают повышенное аспектное отношение и вытягиваются вдоль оси z . На сетках 244 тыс. и 2.5 млн. ячеек размеры элементов по оси z и в поперечном сечении существенно различались, что обуславливало расхождение с аналитическим решением. На наиболее плотной сетке (10 млн. ячеек) вытянутость элементов была меньше, вследствие чего отклонение от аналитического решения заметно уменьшилось.

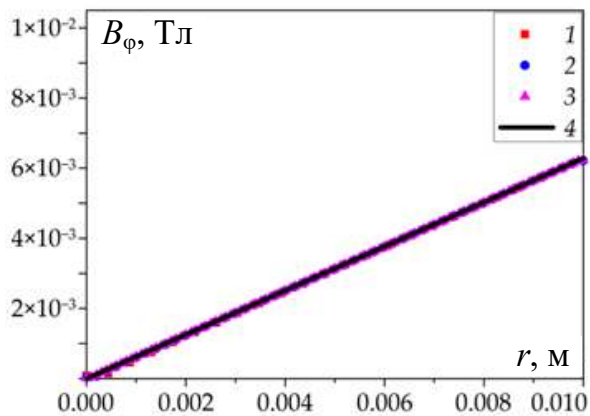
На рисунке 3.3 приведены результаты расчетов в ЦСК. По сравнению с трехмерной постановкой расхождение с аналитическим решением уменьшается. Это обусловлено тем, что в двумерной постановке проще обеспечить требуемое качество сетки (в частности, контролировать аспектное отношение и распределение размеров ячеек), что приводит к снижению дискретизационной погрешности.

Сравнение скорости расчета МП на различных устройствах представлено на рисунке 3.4. Для сравнения производительности использовались как центральные процессорные устройства (ЦПУ), так и ГПУ. При расчете на ЦПУ было задействовано максимально возможное число потоков, которое поддерживается этим ЦПУ. Для коэффициента производительности $K_n = 1$ была принята скорость расчета на ЦПУ Intel Core i5-12400f при использовании 12 потоков.

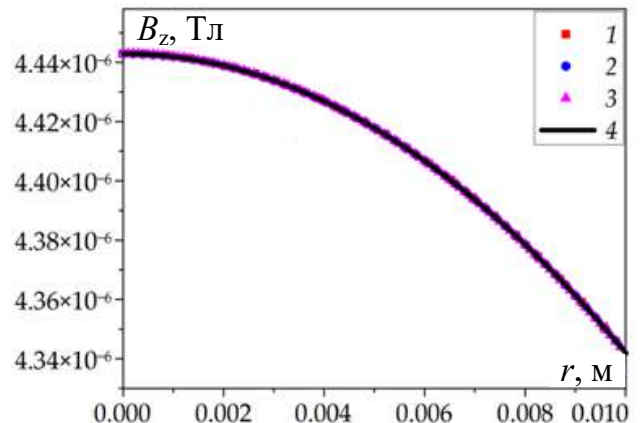
Для трехмерного случая (ДСК, рисунок 3.4а) использование процессора Intel Core i9-13900k позволяет увеличить производительность в 4 раза, а использование ГПУ RTX 3080 и RTX 4090 в 40–50 раз и 130 раз соответственно. Следует отметить, что особенность геометрии не влияет на скорость вычислений МП, важно лишь количество ячеек расчетной сетки.

Для расчета в ЦСК (рисунок 3.4б) при расчете на процессоре 13900k производительность увеличивается в 3.9 раза, а для ГПУ RTX 3080 и RTX 4090 в 176–216 и 270–530 раз соответственно. Объяснить различие коэффициентов производительности для двумерных и трехмерных случаев можно следующим образом: во-первых – различными методиками расчета МП, во-вторых – особенностями компилятора. При

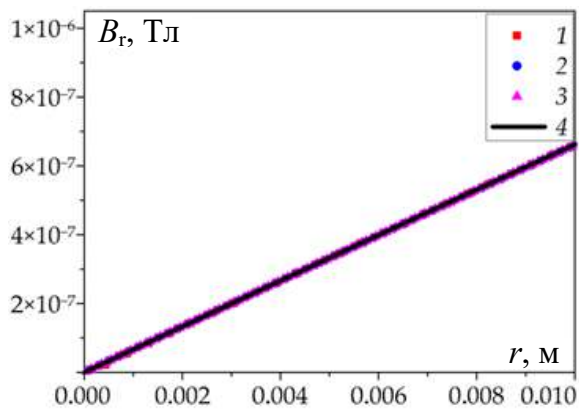
использовании различных компиляторов коэффициент производительности изменялся на 100–150 %.



а)

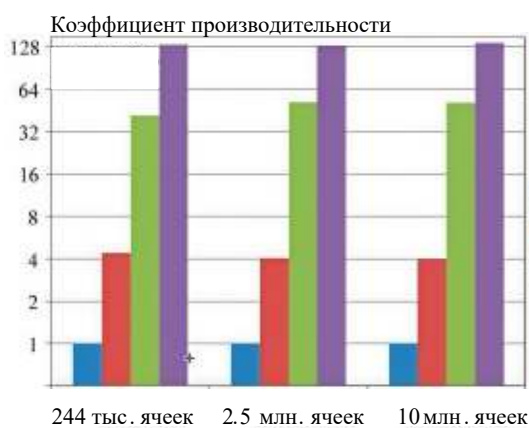


б)

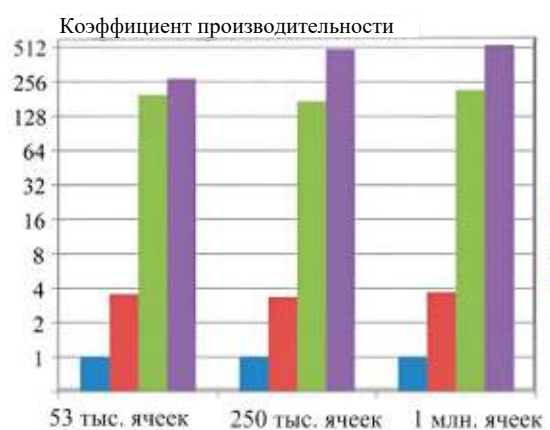


в)

Рисунок 3.3 – Распределение различных компонент МП на высоте $z = 0.5$ м на сетках различного размера. а) Распределение компоненты B_ϕ , б) B_z , в) B_r . 1 – сетка 53 тыс. ячеек, 2 – 250 тыс. ячеек, 3 – 1 млн. ячеек, 4 – аналитическое решение.



а)



б)

Рисунок 3.4 – Сравнение скорости расчета МП. а) ДСК, б) ЦСК.

1 – Intel Core i5-12400f 12 потоков, 2 – Intel Core i9-13900k 32 потока, 3 – NVIDIA GeForce RTX 3080, 4 – NVIDIA GeForce RTX 4090.

Таким образом, использование технологии NVIDIA CUDA позволяет существенно увеличить скорость расчета МП. Вычисление собственного МП требуется выполнить один раз в начале численного моделирования. Однако вычисление индуцированных МП следует выполнять на каждой итерации, в этом случае использование ГПУ является значительно более предпочтительным. Более подробно об индуцированных МП написано в подразделе 3.7.

В расчетах помимо собственного МП, также имеет место внешнее МП. Это МП создавалось либо соленоидом, либо катушкой Максвелла. Обычно внешнее МП принималось однородным и имеющим только осевую компоненту B_z . Однако в некоторых случаях учитывалось, что соленоид конечной длины генерирует неоднородное МП. В такой ситуации, МП создают токи (протекающие в соленоиде) J_x, J_y в ДСК и J_ϕ в ЦСК. Следует отметить, что когда требуется учесть неоднородное МП, созданное соленоидом, магнитное поле вычисляется из выражений (3.48) и (3.50) для ЦСК и (3.36–3.38) для ДСК.

3.5 Расчет электромагнитной силы

В исследуемой системе протекает электрический ток проводимости $\mathbf{J}$, который создает собственное МП $\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}$, а соленоид генерирует внешнее МП $\mathbf{B}_{\text{внеш.}}$, при этом электромагнитная сила вычисляется $\mathbf{F}_{\text{эл}} = \mathbf{J} \times (\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}} + \mathbf{B}_{\text{внеш.}})$. Тогда выражения для компонент электромагнитной силы в ДСК имеют вид:

$$F_x(x, y, z) = J_y(x, y, z)B_z(x, y, z) - J_z(x, y, z)B_y(x, y, z), \quad (3.56)$$

$$F_y(x, y, z) = J_z(x, y, z)B_x(x, y, z) - J_x(x, y, z)B_z(x, y, z), \quad (3.57)$$

$$F_z(x, y, z) = J_x(x, y, z)B_y(x, y, z) - J_y(x, y, z)B_x(x, y, z). \quad (3.58)$$

При этом компоненты плотности тока проводимости J_x, J_y, J_z , вычисляются при использовании выражений 3.16–3.18 (либо выражений 3.21–3.23, полученных из уравнения Лапласа), а компоненты МП B_x, B_y из (3.29) и (3.30) (или по закону Био-Савара-Лапласа – (3.36) и (3.37)). Следует отметить, что внешнее МП $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ принимается как однородное и имеет только компоненту B_z и задается как начальное усло-

вие, в иных случаях, когда требуется учитывать, что МП соленоида неоднородно и имеет компоненты B_x, B_y, B_z расчет МП $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ выполняется при использовании выражений (3.36–3.38). Если принять, что каждый виток соленоида – это кольцо с током, тогда путем суммирования МП всех витков соленоида также можно вычислить МП $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ [99].

Запишем выражения для электромагнитной силы в ЦСК:

$$F_r(r, z) = -J_z(r, z)B_\varphi(r, z), \quad (3.59)$$

$$F_\varphi(r, z) = -J_r(r, z)B_z(r, z), \quad (3.60)$$

$$F_z(r, z) = J_r(r, z)B_\varphi(r, z). \quad (3.61)$$

При этом компоненты J_r и J_z вычисляются с использованием выражений (3.19), (3.20), либо решением уравнения для потенциала, а затем из выражений (3.24), (3.25). Компонента B_φ вычисляется из выражения (3.31), либо из выражения (3.49), полученного с использованием закона Био-Савара-Лапласа. Следует отметить, что когда требуется учесть неоднородное МП, созданное соленоидом, то магнитное поле вычисляется из выражений (3.48) и (3.50).

3.6 Различные МГД приближения при моделировании ЭВТ

Обычно численное моделирование, связанное с ЭВТ, выполняется в т.н. электродинамическом приближении, в котором электромагнитная сила вычисляется на основе распределения плотности электрического тока и собственного МП. Это связано с тем, что в работе [63] показано, что ЭД приближение применимо для электрических токов $I < 30$ кА.

Если значение электрического тока превышает 30 кА, следует использовать следующий уровень приближений, т.н. безындукционное приближение, когда учитываются электрические токи $\mathbf{J}_{\text{инд}}$, индуцированные движением электропроводящего жидкого металла, но не учитывается МП $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, созданное этими токами. В том случае, если индуцированные токи достаточно велики, следует также вычислять индуцированные МП $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, и таким образом решать полную МГД задачу.

Жидкий металл с электрической проводимостью σ движется в объеме под действием МП $\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}$ и $\mathbf{B}_{\text{внеш.}}$ в результате чего возникают токи, индуцированные движением электропроводящей среды (БИ приближение):

$$\mathbf{J}_{\text{инд.}} = \sigma(\mathbf{U} \times (\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}} + \mathbf{B}_{\text{внеш.}})), \quad (3.62)$$

где $\mathbf{U}$ – скорость жидкого металла.

Индуцированные электрические токи $\mathbf{J}_{\text{инд}}$ создают МП $\mathbf{B}_{\text{инд.}}$, которое можно вычислить с помощью закона Био-Савара-Лапласа, однако для этого сначала требуется рассчитать электрические токи $\mathbf{J}_{\text{инд.}}$. Учитывая, что индуцированные токи должны замыкаться, требуется решить уравнения для потенциала с источником (в случае использования БИ приближения слагаемое $\mathbf{B}_{\text{инд.}} = 0$):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{U} \times (\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}} + \mathbf{B}_{\text{внеш.}} + \mathbf{B}_{\text{инд.}})). \quad (3.63)$$

Далее плотность электрического тока можно вычислить, используя (3.21–3.23) для ДСК и (3.24), (3.25) для ЦСК. Следует отметить, что в выражении (3.62), в случае решения полной МГД задачи, добавляется слагаемое $\mathbf{B}_{\text{инд.}}$. Таким образом, электромагнитная сила имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\text{эл.}} = (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{инд.}}) \times (\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}} + \mathbf{B}_{\text{внеш.}} + \mathbf{B}_{\text{инд.}}). \quad (3.64)$$

Далее получим формулы для электромагнитной силы для БИ приближения и полной МГД задачи в используемых нами системах координат. При этом воспользуемся сокращенным написанием выражений, учитывая, что компоненты плотности тока, магнитного поля, скорости и электромагнитной силы, являются функциями от координат x, y, z . В таком случае, для ДСК компоненты электромагнитной силы в БИ приближении имеют вид:

$$F_{x\text{БИ}} = (J_y + \sigma(B_x U_z - B_z U_x)) B_z - (J_z + \sigma(B_y U_x - B_x U_y)) B_y, \quad (3.65)$$

$$F_{y\text{БИ}} = -(J_x + \sigma(B_z U_y - B_y U_z)) B_z + (J_z + \sigma(B_x U_y - B_y U_x)) B_x, \quad (3.66)$$

$$F_{z\text{БИ}} = (J_x + \sigma(B_z U_y - B_y U_z)) B_y - (J_y + \sigma(B_x U_z - B_z U_x)) B_x. \quad (3.67)$$

В случае полной МГД задачи компоненты силы имеют вид:

$$F_{x\text{МГД}} = \left(J_y + \sigma \left(-U_x (B_z + B_{z\text{инд.}}) + U_z (B_x + B_{x\text{инд.}}) \right) \right) (B_z + B_{z\text{инд.}}) - \\ - (J_z + \sigma (U_x (B_y + B_{y\text{инд.}}) - U_y (B_x + B_{x\text{инд.}}))) (B_y + B_{y\text{инд.}}), \quad (3.68)$$

$$F_{y\text{МГД}} = - \left(J_x + \sigma \left(U_y (B_z + B_{z\text{инд.}}) - U_z (B_y + B_{y\text{инд.}}) \right) \right) (B_z + B_{z\text{инд.}}) + \\ + (J_z + \sigma (U_x (B_y + B_{y\text{инд.}}) - U_y (B_x + B_{x\text{инд.}}))) (B_x + B_{x\text{инд.}}), \quad (3.69)$$

$$F_{z\text{МГД}} = (J_x + \sigma (U_y (B_z + B_{z\text{инд.}}) - U_z (B_y + B_{y\text{инд.}}))) (B_y + B_{y\text{инд.}}) - \\ - (J_y + \sigma (-U_x (B_z + B_{z\text{инд.}}) + U_z (B_x + B_{x\text{инд.}}))) (B_x + B_{x\text{инд.}}). \quad (3.70)$$

В ЦСК для БИ приближения:

$$F_{r\text{БИ}} = (-U_r (B_\varphi^2 + B_z^2) \sigma - J_z B_\varphi), \quad (3.71)$$

$$F_{\varphi\text{БИ}} = - \left(J_r + \sigma (-B_\varphi U_z + B_z U_\varphi) \right) B_z, \quad (3.72)$$

$$F_{z\text{БИ}} = (J_r + \sigma (-B_\varphi U_z + B_z U_\varphi)) B_\varphi. \quad (3.73)$$

Для полной МГД задачи:

$$F_{r\text{МГД}} = \sigma \left(-U_r (B_z + B_{z\text{инд.}}) + U_z B_{r\text{инд.}} \right) (B_z + B_{z\text{инд.}}) - \\ - \left(J_z + \sigma \left(U_r (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}) - U_\varphi B_{r\text{инд.}} \right) \right) (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}), \quad (3.74)$$

$$F_{\varphi\text{МГД}} = - (J_r + \sigma (U_\varphi (B_z + B_{z\text{инд.}}) - U_z (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}))) (B_z + B_{z\text{инд.}}) + \\ + \left(J_z + \sigma \left(U_r (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}) - U_\varphi B_{r\text{инд.}} \right) \right) B_{r\text{инд.}}, \quad (3.75)$$

$$F_{z\text{МГД}} = \sigma B_{r\text{инд.}} \left(-U_z B_{r\text{инд.}} + U_r (B_z + B_{z\text{инд.}}) \right) + \\ + \left(J_r + \sigma \left(U_\varphi (B_z + B_{z\text{инд.}}) - U_z (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}) \right) \right) (B_\varphi + B_{\varphi\text{инд.}}). \quad (3.76)$$

Затем полученные выражения для электромагнитной силы использовались в уравнении движения при численном моделировании гидродинамики ЭВТ.

3.7 Методика численного моделирования полей скорости в объеме жидкого металла

При численном решении уравнений движения применялся метод контрольного объема [101]. Расчетная область представляется совокупностью ячеек (контрольных объемов), для каждой из которых уравнения записываются в интегральной форме. После интегрирования по объему ячейки вклад конвективных и диффузионных членов удобно выражается через потоки на гранях контрольного объема (переход от объемных интегралов к поверхностным). В дискретной постановке значения величин в объеме и на гранях аппроксимируются по значениям в характерных точках (центры ячеек и центры граней), в результате чего уравнения сводятся к балансу потоков по всем граням ячейки, а источниковые члены аппроксимируются с предположением их постоянства в пределах контрольного объема.

Метод контрольного объема широко используется в инженерной гидродинамике и реализован в большинстве CFD-пакетов. Его преимущества по сравнению с рядом конечно-разностных и спектральных подходов заключаются в естественном выполнении интегральных законов сохранения и в возможности работы с неструктурированными сетками, что упрощает расчет течений в областях со сложной геометрией.

В данной диссертации решалось уравнение движения с электромагнитной силой, вычисления производились на неструктурированной сетке с использованием $k-\omega$ SST модели турбулентности. Такая модель турбулентности обеспечивает наилучшее согласование с полученными нами экспериментальными результатами, по сравнению с RNG и $k-\varepsilon$ моделью турбулентности. При решении уравнения движения использовались схемы 3-го порядка точности MUSCL.

На рисунке 3.5а представлена расчетная сетка размером 400 тыс. ячеек, для ДСК. Сетка включала в себя только объем жидкого металла, при этом свободная поверхность совпадала с плоскостью x - y , а ось z была направлена вглубь жидкого металла. На границах объема с жидким металлом задавалось условие прилипания

($U = 0$). На поверхности жидкости также принималось либо условие $U = 0$ (поскольку на ней при контакте с воздухом образуется оксидная пленка), либо задавалось равенство нулю касательных напряжений (поверхность залита серной кислотой). Распределение плотности тока $\mathbf{J}$ вычислялось по выражениям (3.16–3.18), а МП $\mathbf{V}_{\text{ЭВТ}}$ из уравнений (3.33), (3.34). Далее, в зависимости от задачи, в выражения добавлялись слагаемые для внешнего МП $\mathbf{V}_{\text{внеш.}}$, для индуцированных токов $\mathbf{J}_{\text{инд}}$ и индуцированных МП $\mathbf{V}_{\text{инд}}$. А затем, полученные плотность тока и МП использовались для расчета электромагнитной силы $\mathbf{F}_{\text{эл.}}$.

На рисунке 3.5б приведена расчетная сетка для ЦСК, состоящая из 5 тыс. ячеек, сетка включает в себя только область с жидким металлом. Ось z совпадала с осью симметрии, а ось r была направлена вдоль свободной поверхности. При численном моделировании решалась осесимметричная задача ($\partial \dots / \partial \varphi = 0$, $U_{\varphi} \neq 0$), а на границах также задавалось условие прилипания ($U = 0$). В случае, когда свободная поверхность была залита серной кислотой, на ней принималось равенство нулю касательных напряжений. В этом случае, плотность электрического тока вычислялась с использованием выражений (3.19), (3.20), а МП с помощью (3.31). После этого, к этим выражениям также добавлялись дополнительные слагаемые в соответствии с решаемой задачей, а затем рассчитывалась электромагнитная сила.

На рисунке 3.5в приведена расчетная сетка, включающая в себя токоподводы, полусферическую медную ванну и объем с жидким металлом. Размер сетки составлял 48 тыс. ячеек. На верхней границе задавался электрический потенциал $\Phi = \Phi_1$ и $\Phi = 0$ на нижней границе. Затем решалось уравнение для потенциала (3.12), либо уравнение (3.63) с источником (для численного моделирования в БИ приближении). Потом из выражений (3.24), (3.25) находилось распределение тока проводимости, а в выражении для электромагнитной силы, при необходимости учитывалось наличие токов $\mathbf{J}_{\text{инд}}$ и МП $\mathbf{V}_{\text{инд}}$. Отметим, что в случае наличия $\mathbf{J}_{\text{инд}}$ решалась взаимозависимая задача, когда в уравнение для потенциала входит источниковый член, а распределение электрического потенциала зависит от распределения поля скорости.

Численные расчеты на всех сетках были нестационарными, а в начале численного моделирования для расчета электромагнитной силы вычислялись распределения $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}$, $\mathbf{B}_{\text{внеш.}}$. В момент времени $t = 0$, было принято условие $\mathbf{U} = 0$, а шаг по времени варьировался от 0.0001 до 0.01 с. На каждом шаге по времени решалось уравнение движения с электромагнитной силой. Вместе с тем, при необходимости, на каждой итерации рассчитывались распределения $\mathbf{J}_{\text{инд}}$ и $\mathbf{B}_{\text{инд}}$, в этом случае решалась взаимозависимая задача.

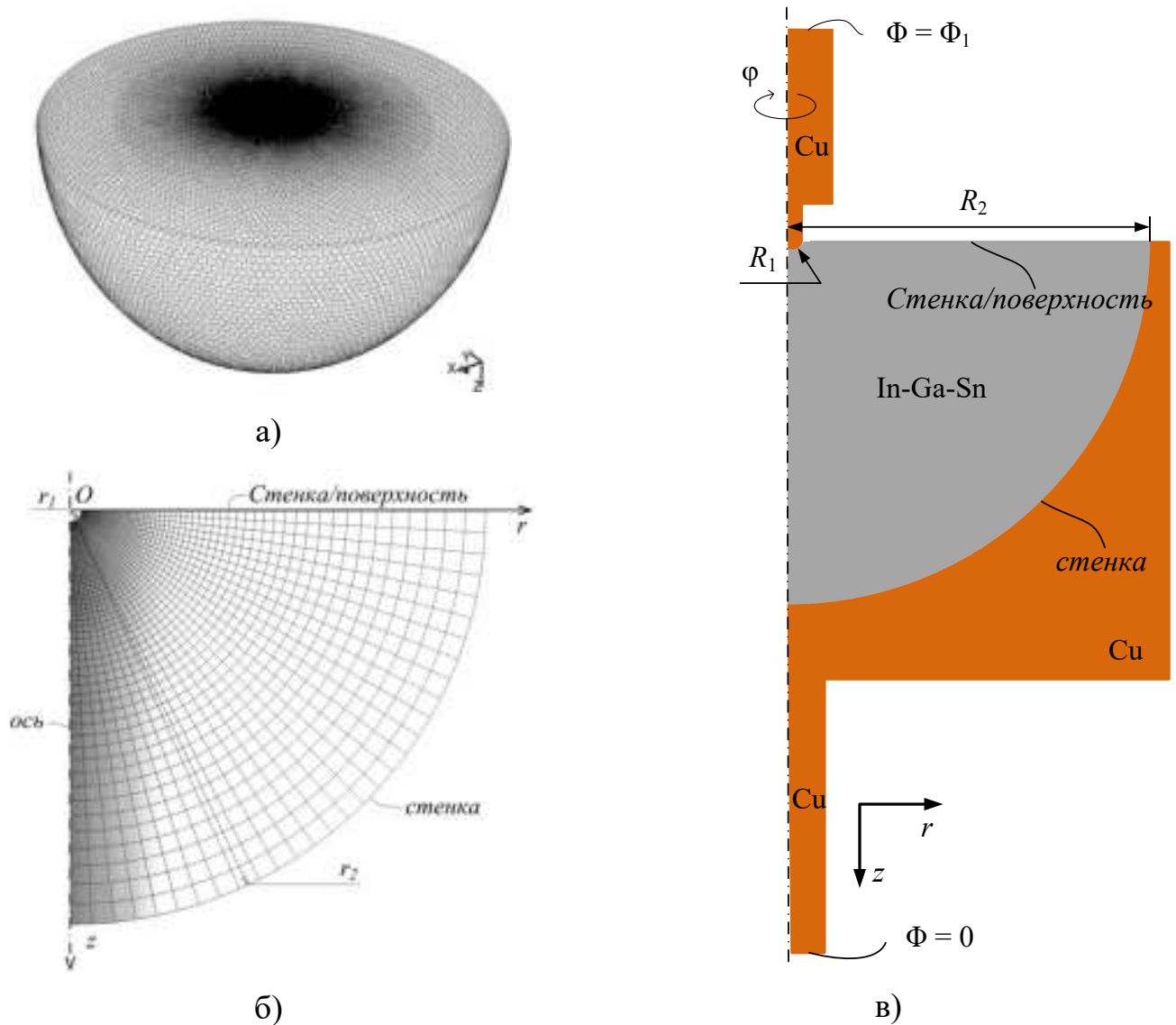


Рисунок 3.5 – а) Расчетная сетка для моделирования ЭВТ в ДСК, б) расчетная сетка в ЦСК, в) расчетная сетка с токоподводами в ЦСК.

3.8 О правомерности применения численных методик

В подразделах 3.3–3.7 приведена общая постановка задачи электровихревого течения в различных МГД приближениях как в осесимметричном, так и в трехмерном вариантах.

Численные расчеты, представленные в настоящей диссертации, в основном выполнялись в двумерной осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат. Осесимметричная расчетная область, включающая токоподводы, использовалась при исследовании автоколебательных режимов и времени формирования вторичного тороидального вихря; в остальных случаях расчеты проводились на двумерной осесимметричной сетке, охватывающей только объем жидкого металла.

Для режима $I = 10$ А, $B_z = 2 \times 10^{-2}$ Тл выполнен сопоставительный комплекс трехмерного и различных двумерных осесимметричных расчетов для оценки влияния асимметрии геометрии, неоднородности поля соленоида и замкнутости индуцированных токов на расчетные характеристики течения.

Следует отметить, что при решении полной МГД задачи в рамках настоящей работы будем понимать постановку, в которой в уравнении движения учитываются индуцированные токи и индуцированное магнитное поле. Влияние замыкания индуцированных токов анализировалось отдельно на основе расчетов осесимметричной полной МГД задачи в программном пакете COMSOL, а также безындукционных расчетов для режима $I = 10$ А, $B_z = 2 \times 10^{-2}$ Тл на двумерной осесимметричной сетке с учетом токоподводов и неоднородности магнитного поля соленоида.

Полная трехмерная МГД постановка, изложенная в подразделе 3.7, приведена для полноты изложения и удобства последующего анализа области применимости используемых приближений; ее прямое численное решение в рамках настоящей работы не выполнялось.

Сопоставление результатов расчетов на различных сетках и экспериментов показало отсутствие существенных отличий между простой двумерной осесимметричной моделью и более детализированными расчетными схемами в рассматриваемых

мых режимах. Также было получено качественное, а иногда количественное согласование расчетных и экспериментальных данных при изучении ЭВТ.

Сопоставление результатов трехмерных и двумерных расчетов показало, что в рассматриваемых режимах качественная структура течения воспроизводится осесимметричной моделью удовлетворительно. Оценочные расчеты показали, что различия носят количественный характер и проявляются в деталях эволюции течения.

В двумерной постановке при формировании вторичного вихря осевая скорость вблизи оси сначала несколько возрастает, после чего резко падает до нуля, тогда как в трехмерной задаче перед образованием вторичного вихря наблюдается небольшое убывание скорости и последующее такое же резкое ее падение.

Учет неоднородности магнитного поля соленоида приводит лишь к незначительному количественному изменению распределения скорости и электромагнитной силы.

Учет замыкания индуцированных токов в безындукционном приближении дает заметное отличие для расчетов при внешнем магнитном поле $B_z > 0.1$ Тл, при этом наблюдается более мягкое электромагнитное торможение течения и несколько менее выраженное сжатие течения в область под малым электродом. На рисунке 3.6 приведен график зависимости азимутальной скорости на поверхности жидкого металла от расстояния до оси симметрии. Данные настоящей диссертации сравнивались с расчетами полной МГД задачи в программном пакете COMSOL Multiphysics, где также было учтено замыкание индуцированных токов. Для режима $B_z = 0.1$ Тл наблюдается незначительное отличие результатов. Для режима $B_z = 1$ Тл в области под электродом отличия достигают $\sim 10\%$, при этом наблюдается более мягкое уменьшение скорости закрутки при удалении от оси симметрии.

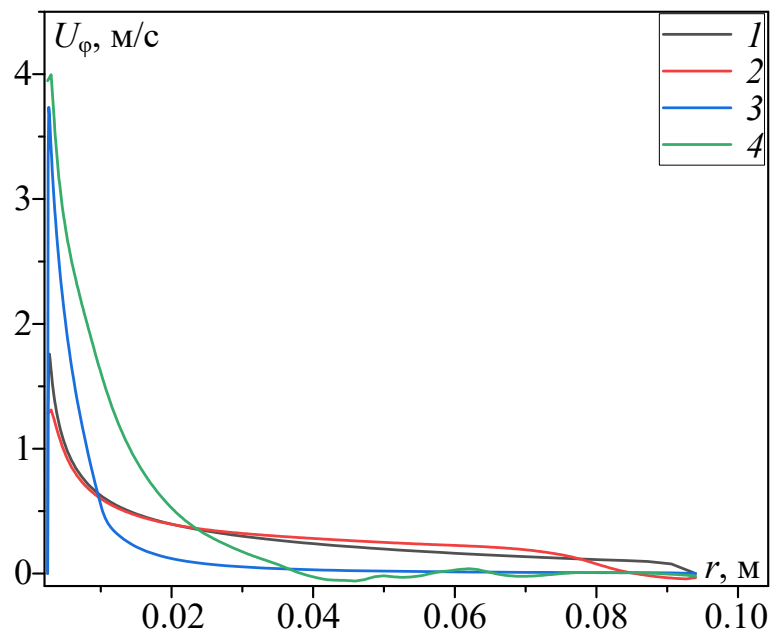


Рисунок 3.6 – Зависимость азимутальной скорости на поверхности жидкого металла от расстояния до оси симметрии, $I = 1000$ А. 1 – $B_z = 0.1$ Тл (текущая работа), 2 – $B_z = 0.1$ Тл (COMSOL Multiphysics), 3 – $B_z = 1$ Тл (текущая работа), 4 – $B_z = 1$ Тл (COMSOL Multiphysics).

3.9 Выводы по главе 3

1. Разработана методика численного моделирования гидродинамических процессов в жидком металле под воздействием внешнего магнитного поля в различных системах координат.
2. На основе закона Био-Савара-Лапласа предложен метод вычисления магнитного поля с применением графических процессоров, который показывает хорошее согласование с аналитическим решением.
3. Разработан метод расчета ЭВТ с учетом различных магнитогидродинамических приближений.
4. Показано, что в исследуемых режимах двумерная осесимметричная постановка (рисунок 3.5б) адекватно воспроизводит основные качественные особенности электровихревого течения и обеспечивает удовлетворительное количественное согласие с экспериментальными данными по ключевым характеристикам течения.

5. Учет замыкания индуцированных токов приводит к незначительному изменению структуры течения для внешнего МП $B_z < 0.1$ Тл и к количественным отличиям результатов без искажения основных закономерностей течения для МП $B_z > 0.1$ Тл.

Глава 4 Результаты численно-экспериментальных исследований и их анализ

4.1 Результаты исследования ЭВТ при отсутствии внешних МП

Эксперименты по измерению осевой скорости в ЭВТ проводились без внешних МП. Однако на установку действовало МП Земли и для компенсации его осевой компоненты использовалась катушка Максвелла, неоднородность МП которой не превышала 0.4 %. В ходе эксперимента с компенсацией МП контролировалось магнетометром LakeShore DSP475 и не превышало 3×10^{-6} Тл. Для измерения осциллограмм температуры и осевой скорости жидкого металла использовался корреляционный зонд.

Были получены графики температурных пульсаций, а также их амплитудно-частотные характеристики. Затем были измерены зависимости осевой скорости от электрического тока, пропускаемого через жидкий металл. Зонд находился на оси симметрии $r = 0$ и на глубине $z = 20$ мм. Для каждого режима было выполнено 5 измерений скорости с длительностью 120 с. После каждой серии измерений экспериментальная установка отключалась, длительность паузы была равна 600 с, затем установка включалась, и измерения проводились снова для следующего значения электрического тока.

Для каждого значения электрического тока (от 100 до 450 А) были исследованы режимы с выключенной ($B_z = B_{зем} = 5 \times 10^{-5}$ Тл) и включенной ($B_z = 3 \times 10^{-6}$ Тл) катушкой Максвелла ($S = 10^7 - 2 \times 10^8$, $N = 1.6 \times 10^4 - 1.8 \times 10^6$). Типичные графики температурных пульсаций представлены на рисунке 4.1.

Также измерены амплитудно-частотные характеристики температурных пульсаций при различных значениях тока, протекающего через расплав (рисунок 4.2). Кроме того, по экспериментальным данным построена зависимость осевой скорости от силы тока (рисунок 4.3). Из рисунка 4.1 видно, что интенсивность температурных пульсаций выше при влиянии МП Земли. Также с ростом электрического тока интенсивность температурных пульсаций возрастает, что связано с ростом тепловыделения в жидком металле и на малом электроде, а также с тем, что с ростом скорости в жидком металле, течение становится более турбулизировано.

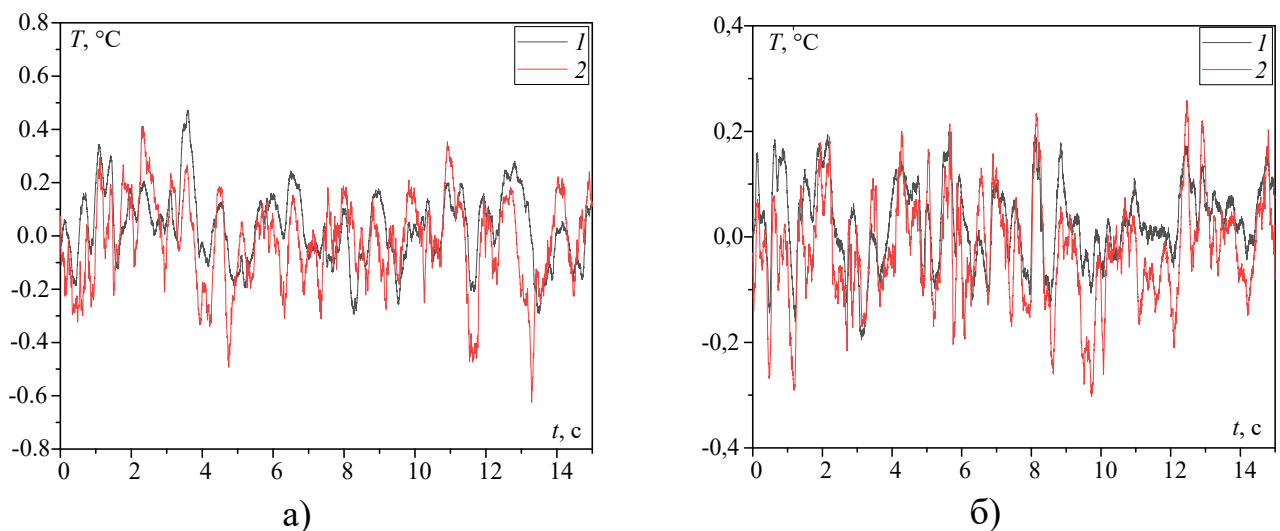


Рисунок 4.1 – Температурные пульсации в жидком металле $I = 400$ А на глубине $z = 10$ мм. а) катушка Максвелла выключена ($B_z = B_{\text{зем}} = 5 \times 10^{-5}$ Тл), б) катушка Максвелла включена ($B_z = 3 \times 10^{-6}$ Тл).

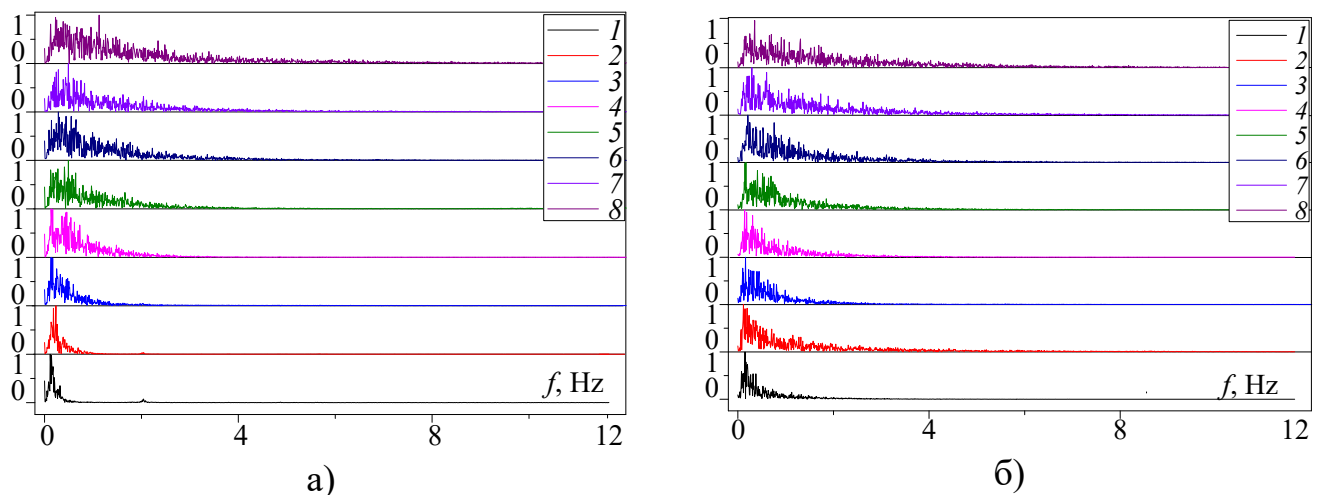


Рисунок 4.2 – АЧХ температурных пульсаций при различных электрических токах. 1 – 100 А, 2 – 150 А, 3 – 200 А, 4 – 250 А, 5 – 300 А, 6 – 350 А, 7 – 400 А, 8 – 450 А.
а) Катушка Максвелла включена, б) катушка Максвелла выключена.

Как видно из рисунка 4.2, с ростом электрического тока в АЧХ появляются более высокочастотные пульсации, при этом их частота не превышает 5 Гц. Вместе с тем, при наличии МП Земли АЧХ имеют больше гармоник, чем когда МП Земли компенсировано катушкой Максвелла.

С ростом электрического тока, пропускаемого через жидкий металл, скорость течения возрастает (рисунок 4.3). При наличии магнитного поля Земли осевая скорость жидкого металла в области струи уменьшается примерно на 30–50 % по сравнению с режимом компенсации геомагнитного поля. Это связано с появлением ази-

мутальной закрутки и перестройкой течения. Этот эффект наблюдался ранее при влиянии МП искусственного происхождения (токоподводы, соленоид), а также был выявлен при численных расчетах, однако экспериментально был получен впервые в данной постановке.

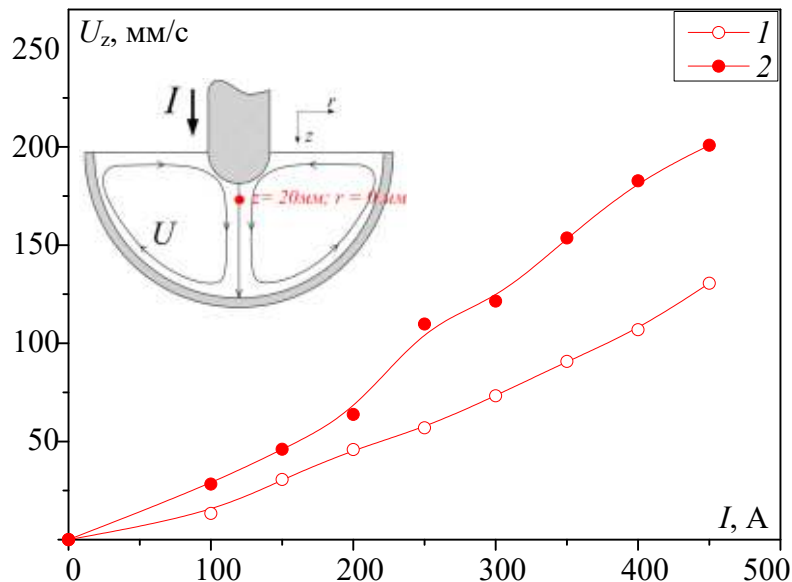


Рисунок 4.3 – Зависимость осевой скорости от электрического тока на глубине $z = 20$ мм. 1 – катушка Максвелла выключена ($B_z = B_{зем} = 5 \times 10^{-5}$ Тл), 2 – катушка Максвелла включена ($B_z = 3 \times 10^{-6}$ Тл).

4.2 Результаты исследования вихреобразования в ЭВТ

При наличии внешнего осевого МП возникает азимутальная закрутка жидкого металла, как показано в п. 4.1, малое МП, сравнимое с МП Земли, приводит к уменьшению осевой скорости. Дальнейшее увеличение осевого МП интенсифицирует азимутальную закрутку и приводит к образованию восходящего тороидального вихря.

Экспериментальные исследования параметров течения выполнялись при значении внешнего МП $B_z = 10^{-4} - 10^{-3}$ Тл, а электрический ток, пропускаемый через жидкий металл, был равен $I = 400$ А ($S = 1.7 \times 10^8$, $N = 3.2 \times 10^6 - 3.2 \times 10^7$). На первом этапе экспериментальных исследований были проведены измерения пульсаций температуры. Для увеличения температурных пульсаций использовался малый электрод, изготовленный из нержавеющей стали с диаметром $d = 5$ мм. Термопарный

зонд был помещен в точку, расположенную на оси симметрии $r = 0$ мм и на глубине $z = 10$ мм. Сначала с помощью стабилизированного источника тока через соленоид пропусклся электрический ток для генерации требуемого внешнего осевого МП, затем включалась экспериментальная установка и проводились измерения пульсаций температуры. В конце каждого эксперимента установка обесточивалась на 600 с и далее проводились исследования при других значениях внешнего МП.

Также было выполнено численное моделирование гидродинамики ЭВТ. На всех границах жидкого металла было задано условие прилипания $U = 0$, решалась осесимметричная задача ($\partial \dots / \partial \phi = 0$, $U_\phi \neq 0$). Были получены поля скорости и линии тока жидкости от времени.

На рисунке 4.4 представлены полученные линии тока жидкости при токе $I = 400$ А и значении внешнего МП $B_z = 10^{-4}$ Тл. Сначала течение имеет вид одиночного тороидального вихря, направленного вниз на оси симметрии $t = 10$ с. Затем образуется восходящий тороидальный вихрь $t = 262$ с (течение направлено вверх на оси симметрии). Далее образовавшийся вихрь разрастается ($t = 270$ с). После этого вихри начинают взаимодействовать друг с другом ($t = 279.64$ с, $t = 281.68$ с и $t = 282.8$ с), таким образом, возникают автоколебания скорости в жидком металле.

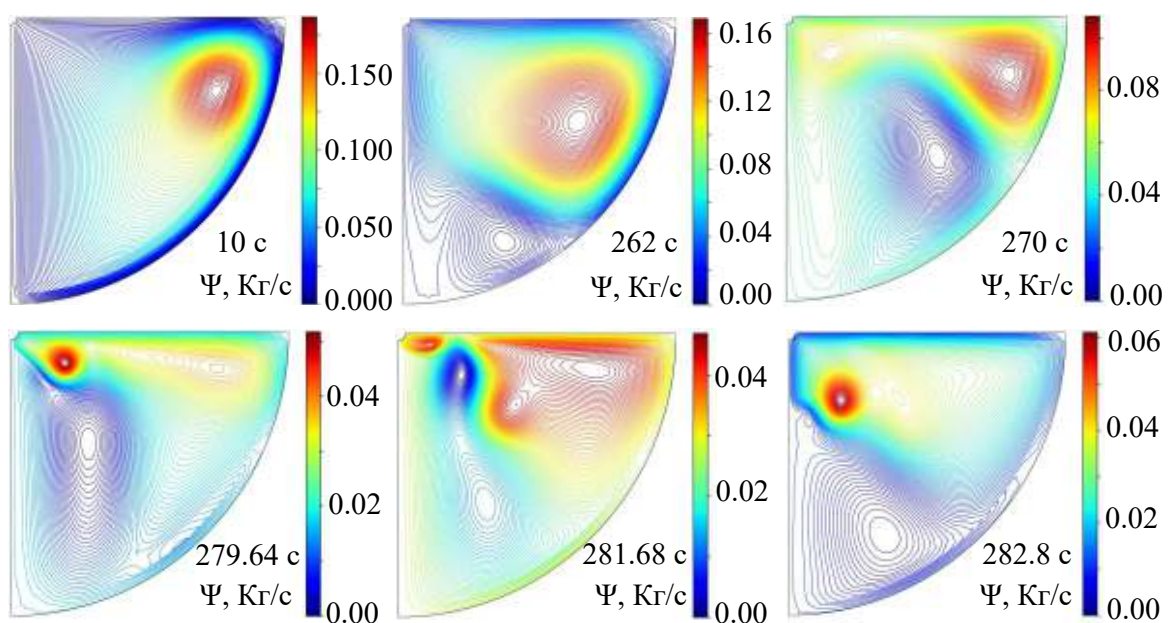


Рисунок 4.4 – Линии тока жидкого металла в различные моменты времени.

На рисунке 4.5 показаны расчетные осциллограммы осевой скорости для электрического тока $I = 400$ А при различных значениях внешнего МП. На графике выбран отрезок квазистационарного режима. При значении внешнего МП $B_z = 7 \times 10^{-5}$ Тл, восходящий тороидальный вихрь не образуется, поэтому имеет место режим с одиночным тороидальным вихрем и автоколебания не наблюдаются. При увеличении внешнего МП образуется восходящий тороидальный вихрь, и начинаются колебания скорости, вызванные взаимодействием двух вихрей, при этом с ростом величины внешнего МП уменьшается амплитуда и увеличивается частота колебаний скорости.

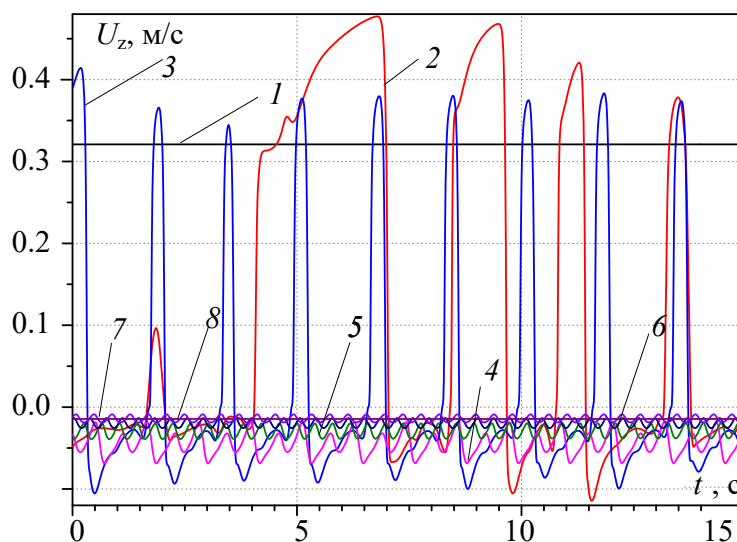


Рисунок 4.5 – Расчетные осциллограммы скорости при разных внешних МП.

$I = 400$ А, $r = 0$ мм, $z = 10$ мм. 1 – $B_z = 7 \times 10^{-5}$ Тл, 2 – 9×10^{-5} , 3 – 10^{-4} , 4 – 3×10^{-4} , 5 – 5×10^{-4} , 6 – 7×10^{-4} , 7 – 9×10^{-4} , 8 – 10^{-3} .

На рисунке 4.6 представлено изменение структуры течения в зависимости от величины внешнего МП. При $B_z = 0$ Тл имеет место одиночный тороидальный вихрь, при $B_z = 10^{-4}$ Тл образуется второй вихрь и вихри взаимодействуют друг с другом, это т.н. застойный режим, когда интенсивность течения минимальна. С дальнейшим увеличением внешнего МП восходящий вихрь отесняет первичный вихрь на периферию полусферической ванны и колебания скорости прекращаются.

Затем было проведено численно-экспериментальное исследование по определению периода автоколебаний в зависимости от величины внешнего МП. Измерены

пульсации температуры на оси симметрии и глубине $z = 10$ мм при различной величине внешнего МП. Затем были получены АЧХ этих пульсаций, типичный вид осциллограммы температуры и ее АЧХ представлены на рисунке 4.7.

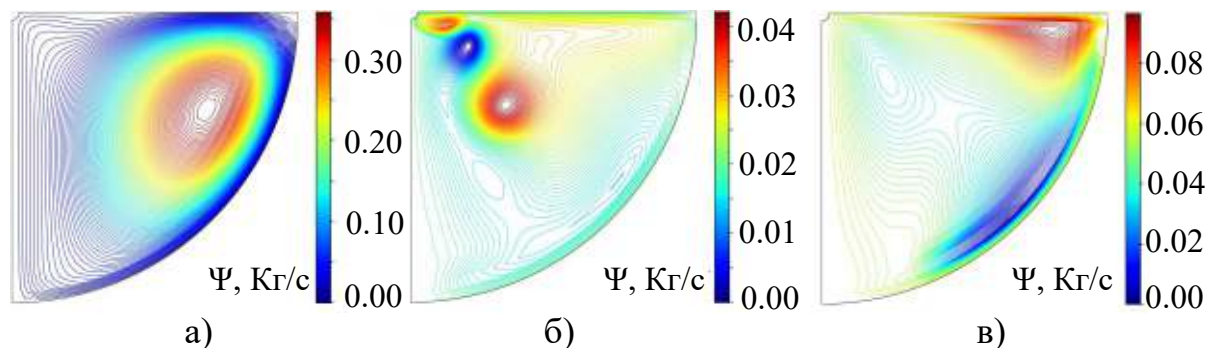


Рисунок 4.6 – Структура ЭВТ при различных внешних МП. а) $B_z = 0$ Тл, б) 10^{-4} Тл, в) 5×10^{-3} Тл

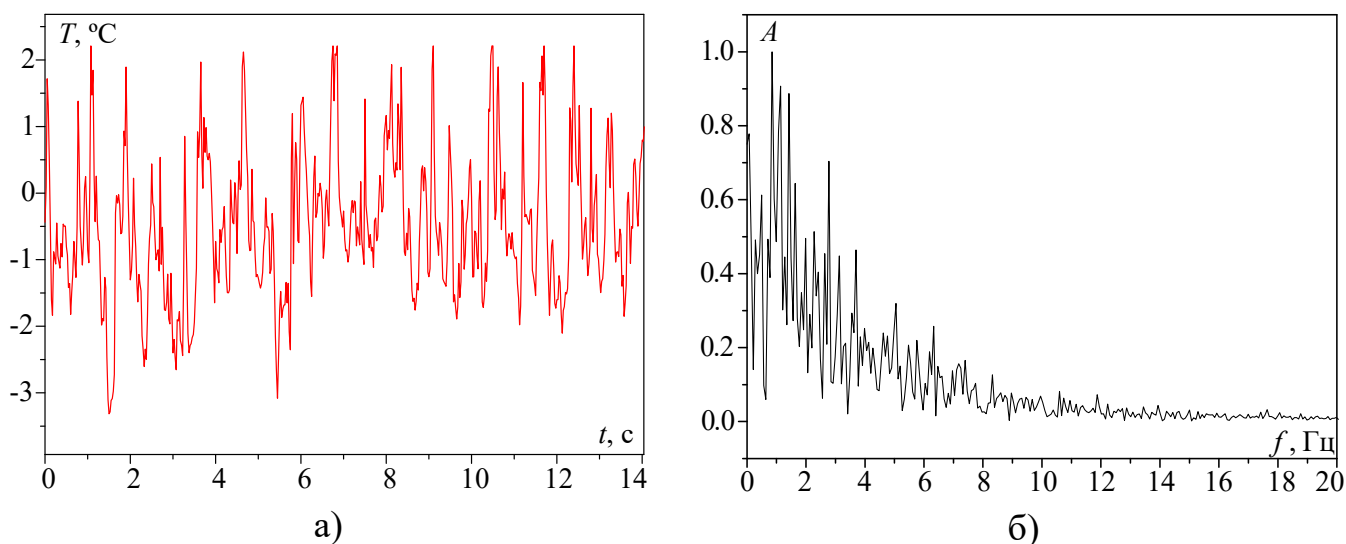


Рисунок 4.7 – Типичный вид укороченной центрированной осциллограммы температуры на глубине 10 мм по оси ванны – а) и ее амплитудный спектр – б) при токе 400 А и индукции внешнего МП 5×10^{-4} Тл.

Рисунок 4.8 иллюстрирует влияние внешнего магнитного поля на период автоколебаний (рассчитанные колебания скорости и экспериментально полученные колебания температуры). Сравнение расчета и эксперимента показывает удовлетворительное совпадение, при этом с увеличением внешнего магнитного поля наблюдается уменьшение периода колебаний.

Помимо автоколебаний интерес представляет характерный временной масштаб формирования вторичного вихря. Поэтому с использованием волоконно-оптического датчика скорости было исследовано время образования восходящего тороидального вихря в зависимости от величины внешнего МП. Датчик располагался на оси симметрии $r = 0$ мм и на глубине $z = 10$ мм. На рисунке 4.9 представлены

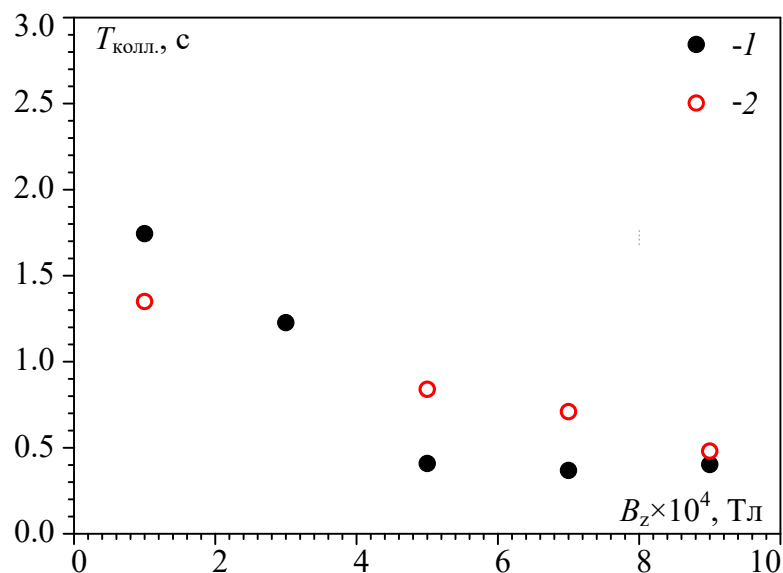


Рисунок 4.8 – Зависимость периода колебаний от внешнего МП. 1 – расчет, 2 – эксперимент.

полученные численно-экспериментальные осциллограммы осевой скорости от времени, где $t = 0$ – момент включения экспериментальной установки. Из графиков видно, что осевая скорость сначала возрастает, а затем резко падает до нуля (это свидетельствует об образовании восходящего вихря). Численные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются, а различие объясняется тем, что такая система неустойчива и любое возмущение может привести к изменению вида осциллограммы осевой скорости.

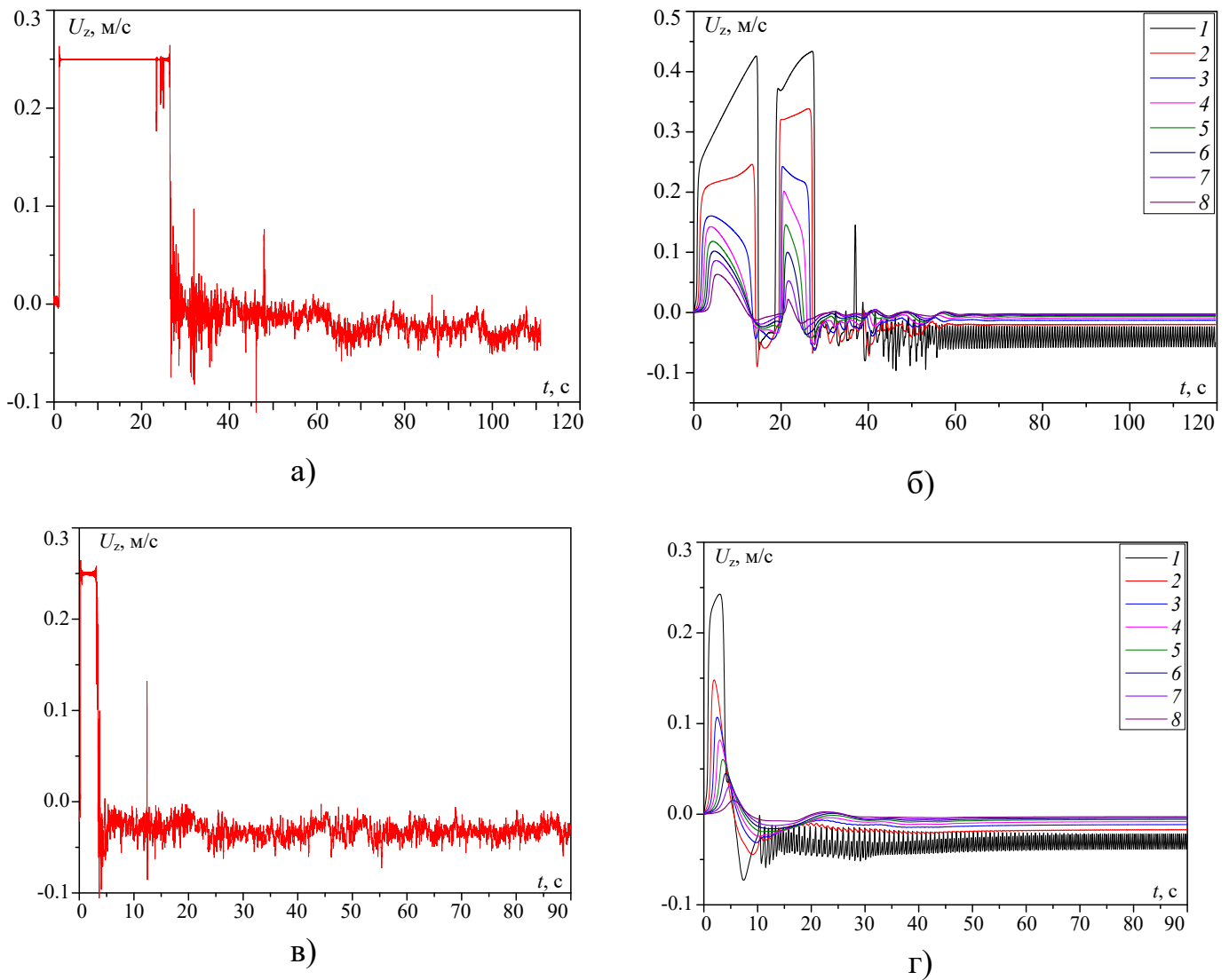


Рисунок 4.9 – Зависимость осевой скорости от времени. а) эксперимент $I = 400$ А, $B_z = 3 \times 10^{-4}$ Тл, б) Расчет $I = 400$ А, $B_z = 3 \times 10^{-4}$ Тл, в) эксперимент $I = 400$ А, $B_z = 5 \times 10^{-4}$ Тл, г) Расчет $I = 400$ А, $B_z = 5 \times 10^{-4}$ Тл. а), в): глубина $z = 10$ мм, б), г): $l - z = 10$ мм, 2 – 20 мм, 3 – 30 мм, 4 – 40 мм, 5 – 50 мм, 6 – 60 мм, 7 – 70 мм, 8 – 80 мм.

На рисунке 4.10 представлены численная и экспериментальная зависимости времени образования второго вихря от величины внешнего МП. При этом режим I^* – это расчетное время образования второго вихря, однако затем вихрь исчезает $t \approx 15$ с (рисунок 4.9б). Далее второй вихрь образуется снова при $t \approx 29$ с, после чего система приходит к квазистационарному режиму, время наступления которого показано кривой 1 на рисунке 4.10 (результат численного моделирования) и кривой 2 (экспериментальный результат). При этом полученная зависимость имеет убываю-

щий характер. Таким образом, результаты хорошо согласуются при значении внешнего МП $B_z > 5 \times 10^{-4}$ Тл и удовлетворительно согласуются при $B_z = 3 \times 10^{-4}$ Тл. Полученные зависимости времени образования вторичного вихря позволяют судить о характере перехода от одновихревого к двухвихревому режиму течения.

В целях получения информации о том, какой режим течения реализуется при текущих значениях I и B_z , было проведено численное исследование по определению границы раздела зон одновихревого и двухвихревого течений ($I = 1\text{--}1000$ А, $B_z = 10^{-5}\text{--}1.4 \times 10^{-4}$ Тл, $S = 10^3\text{--}10^9$, $N = 788\text{--}1.1 \times 10^7$). Расчеты были выполнены при различном отношении размеров малого и большого электродов (R_1/R_2). При этом выполнялся расчет при некоторых значениях электрического тока и величины внеш-

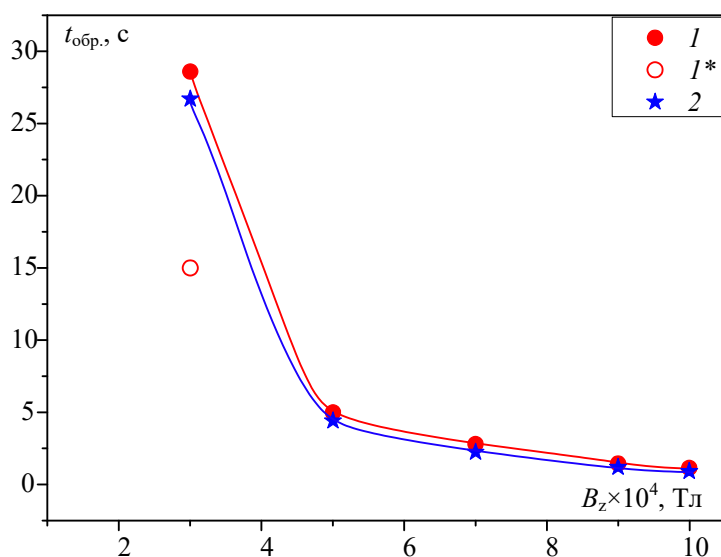


Рисунок 4.10 – Зависимость времени образования второго вихря от величины внешнего МП. I , I^* – расчет, 2 – эксперимент.

него МП, если в течение времени $t = 900$ с второй вихрь не образовывался, то величина внешнего МП увеличивалась и расчет проводился сначала, таким образом МП увеличивалось вплоть до появления второго вихря. Затем фиксировался диапазон значений внешнего МП, в котором наблюдался переход от одновихревого течения к двухвихревому. Далее, полученный диапазон сужался до 10 % от абсолютной величины внешнего МП. Таким образом, были получены границы раздела зон одновихревого и двухвихревого течения при различном отношении размеров малого и большого электродов (рисунок 4.11). Выше границы имеет место двухвихревое течение, а

ниже – одновихревое, при этом форма границ достаточно близка к зависимости типа $y \sim A\sqrt{x}$. Следует отметить, что для электрических токов < 200 А, даже малое МП Земли ($B_z = 5 \times 10^{-5}$ Тл) приводит к образованию второго вихря, однако время его образования достаточно велико и составляет порядка 700 с.

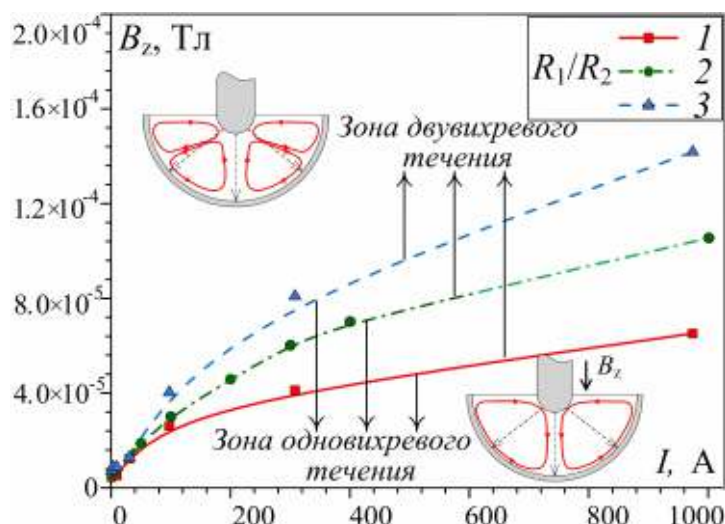


Рисунок 4.11 – Границы раздела зон одновихревого и двувихревого течения.

$$I - R_1/R_2 = 1/10, 2 - 1/37.6, 3 - 1/100.$$

4.3 Исследование применимости различных МГД приближений

Для экспериментально-численного исследования применимости электродинамического приближения были выбраны режимы, в которых сила электрического тока, пропускаемого через жидкий металл $I = 10$ А, а внешнее осевое магнитное поле менялось в диапазоне от 10^{-3} Тл до 2×10^{-2} Тл ($S = 10^5$, $N = 7.8 \times 10^5 - 1.6 \times 10^7$, $St = 4.8 \times 10^{-3} - 0.55$). Режим $I = 10$ А был выбран по причине того, что при таких токах азимутальная закрутка не приводила к прогибу поверхности под малым электродом.

На поверхность жидкого металла выливался водный раствор 40 % серной кислоты в соотношении 1:1, в результате чего образовывались метки (пузырьки водорода) по которым определялась скорость закрутки жидкого металла.

Также было выполнено численное моделирование гидродинамики ЭВТ. На всех границах было задано условие прилипания $U = 0$, а на поверхности жидкого металла принималось условие равенства нулю касательных напряжений, решалась осесимметричная задача ($\partial \dots / \partial \varphi = 0$, $U_\varphi \neq 0$). Численный расчет продолжался до вы-

хода поля скорости жидкого металла на стационарный (или квазистационарный) режим. Следует отметить, что было проведено сравнение численных расчетов для различных сеток в двумерной и трехмерной постановке, было получено, что достаточно использовать простую осесимметричную сетку, включающую в себя только область с жидким металлом (рисунок 4.12б).

На рисунке 4.12а представлена зависимость азимутальной скорости на поверхности жидкого металла от расстояния до оси симметрии при $I = 10$ А и величине внешнего МП $B_z = 10^{-3}$ Тл. Из графика видно, что результаты хорошо согласуются, а различие в расчетах для ЭД и БИ приближения минимально.

На рисунке 4.12б представлена зависимость азимутальной скорости на поверхности жидкого металла от расстояния до оси симметрии при $I = 10$ А и величине внешнего МП $B_z = 2 \times 10^{-2}$ Тл, в этом случае расчет в ЭД приближении дает существенно завышенные значения скорости. Более подробное описание численных постановок, соответствующих режимам 2–6 (рисунок 4.12б), приведено в п. 3.9.

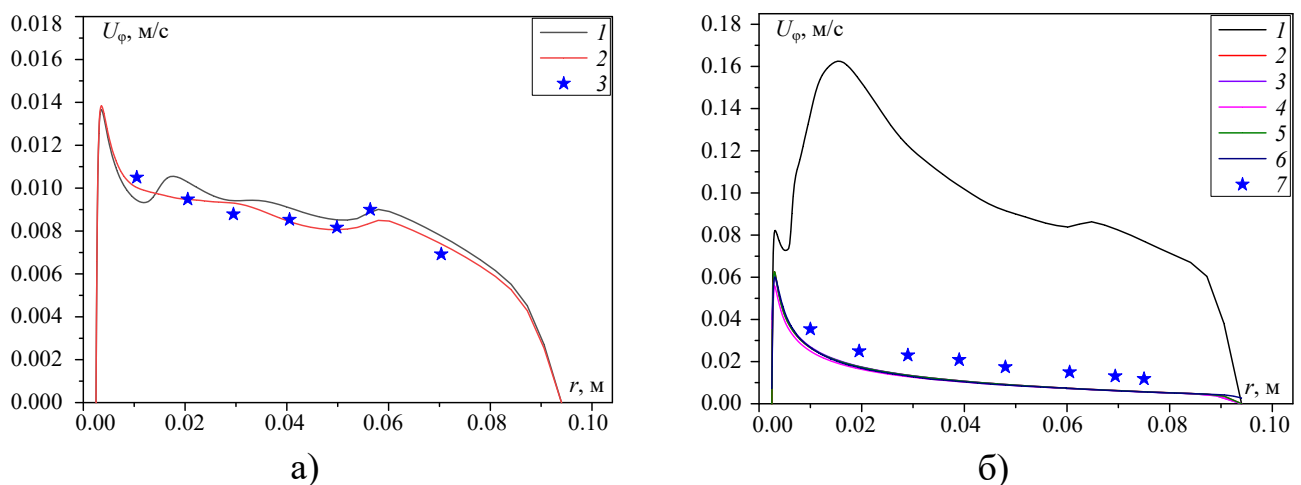


Рисунок 4.12 – Профиль азимутальной скорости на свободной поверхности

расплава от радиальной компоненты r . а) $I = 10$ А, $B_z = 10^{-3}$ Тл, 1 – ЭД приближение, 2 – БИ приближение, 3 – эксперимент, б) $I = 10$ А, $B_z = 2 \times 10^{-2}$ Тл, 1 – простая сетка (5000 ячеек) ЭД приближение, 2 – простая сетка (5000 ячеек) БИ приближение, 3 – сетка с подводными электродами (48 т. ячеек) БИ приближение, 4 – Сетка с подводными электродами (48 т. ячеек), учитывающая неоднородность МП соленоида БИ приближение, 5 – полная МГД задача (простая сетка), 6 – результат 3D моделирования (400 т. ячеек), БИ приближение, 7 – эксперимент.

На рисунке 4.13 представлен график зависимости максимальной азимутальной скорости ($r = 10$ мм) от величины внешнего осевого МП, видно, что разница между ЭД и БИ приближениями достигает 10 % при внешнем МП $B_z = 1.25 \times 10^{-3}$ Тл ($S = 10^5$, $St = 7.1 \times 10^{-3}$, $N = 9.8 \times 10^5$). Следовательно, при таком и большем значении внешнего МП, следует выполнять численные расчеты, используя БИ приближение, либо решать полную МГД задачу, поскольку использование ЭД приближения становится неприменимым для количественного, а затем и качественного описания азимутальной скорости в рассматриваемом диапазоне внешнего МП.

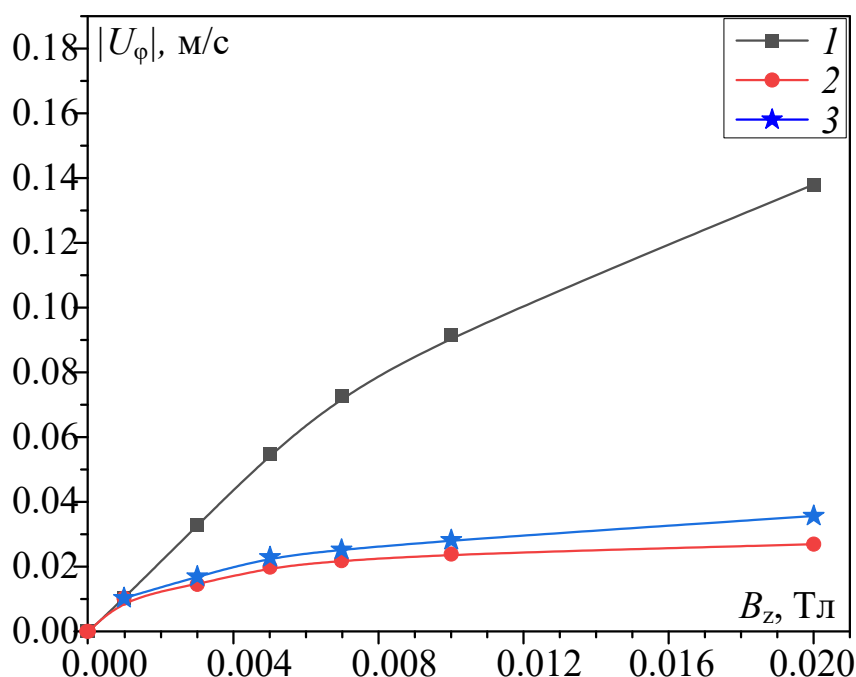


Рисунок 4.13 – Влияние внешнего магнитного поля на азимутальную скорость на поверхности жидкого металла ($I = 10$ А, $r = 10$ мм). 1 – ЭД приближение, 2 – БИ приближение, 3 – эксперимент.

Следует отметить, что в качестве локального критерия применимости ЭД приближения была выбрана контрольная точка $z = 0$ мм, $r = 10$ мм. Такой выбор обусловлен тем, что при анализе других точек на поверхности не было выявлено существенных противоречий, которые могли бы поставить под сомнение обоснованность выбора указанной точки, поскольку для режима $I = 10$ А, $B_z = 10^{-3}$ Тл результаты, полученные в ЭД и БИ приближениях, дают согласующиеся значения азимутальной скорости на всей поверхности жидкого металла. Кроме того, для поверхностной об-

ласти в данной точке имеется возможность прямого экспериментального измерения скорости, что позволяет сопоставить расчетные и экспериментальные данные и тем самым повысить достоверность оценки применимости ЭД приближения.

Чтобы объяснить эффект уменьшения скорости закрутки жидкого металла при использовании безындукционного приближения, запишем уравнение для азимутальной компоненты силы в электродинамическом (4.1) и безындукционном приближениях (4.2):

$$F_{\varphi}(r, z) = -J_r B_z, \quad (4.1)$$

$$F_{\varphi_{\text{БИ}}}(r, z) = -(J_r B_z + \sigma U_{\varphi} B_z^2) + \sigma U_z B_{\varphi} B_z. \quad (4.2)$$

Азимутальная компонента силы приводит к возникновению азимутальной скорости, а увеличение внешнего магнитного поля B_z усиливает слагаемое $\sigma U_{\varphi} B_z^2$, в которое входит квадрат магнитного поля и величина U_{φ} со знаком «минус». Поскольку азимутальная скорость направлена вдоль основной составляющей силы $J_r \cdot B_z$, указанное слагаемое уменьшает азимутальную электромагнитную силу. При этом использование ЭД приближения приводит к завышенной оценке азимутальной скорости, поскольку в выражении для электромагнитной силы в данном приближении не учитывается слагаемое $\sigma U_{\varphi} B_z^2$.

Далее было выполнено изучение границ применимости БИ приближения, предположено, что различие между БИ приближением и полной МГД задачей появится при больших значениях внешнего МП. Как следует из уравнений для электромагнитной силы влияние индуцированных токов сильнее для металла с большой электропроводностью σ , поэтому были проведены расчеты для различных лабораторных жидких металлов, свойства которых представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Физические свойства рабочих жидкостей.

Жидкость	Электропроводность σ , См/м	Плотность ρ , кг/м ³	Вязкость ν , м ² /с
Hg	1×10^6	13600	10^{-7}
In-Ga-Sn	3.3×10^6	6450	4.3×10^{-7}
Na	10^7	930	7.7×10^{-7}

Построены зависимости максимальных значений азимутальной и осевой скоростей от значения внешнего МП в диапазоне 5×10^{-2} до 1 Тл ($St = 0.729\text{--}4 \times 10^4$, $N = 4 \times 10^7\text{--}8 \times 10^8$). Результаты, представленные на рисунке 4.14, показывают немонотонный характер влияния внешнего осевого МП, при увеличении B_z скорости сначала возрастают, однако при дальнейшем увеличении МП начинают уменьшаться вследствие электромагнитного торможения, связанного с действием индуцированных токов. При этом для исследованных режимов ($I = 10$ А) и внешнем магнитном поле порядка 1 Тл, расчеты не выявили необходимости решать полную МГД задачу.

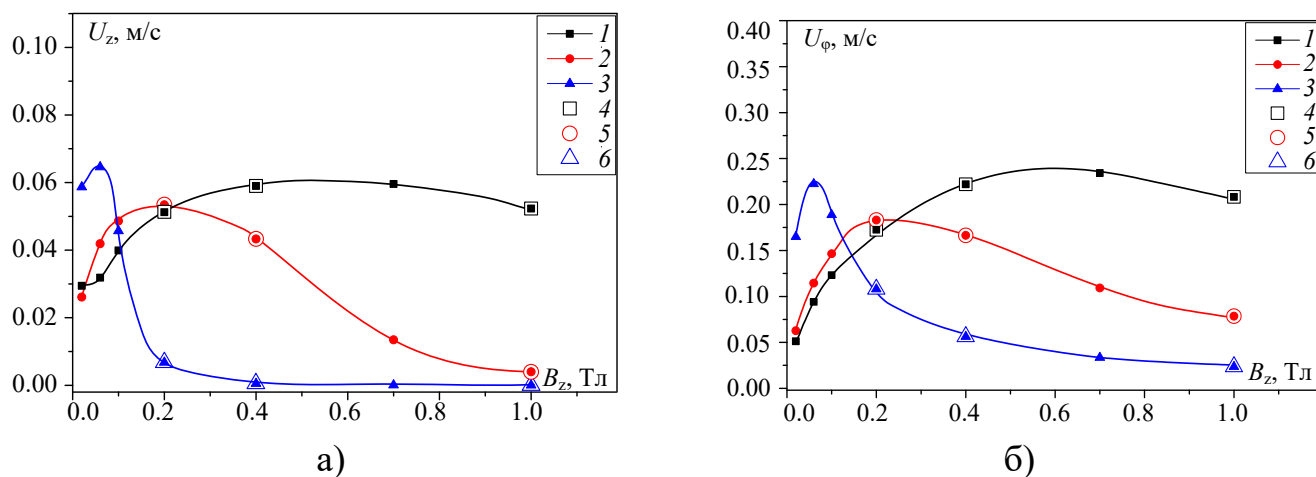


Рисунок 4.14 – Влияние внешнего магнитного поля на максимальную осевую (а) и азимутальную (б) компоненты скорости. 1–3: БИ приближение (Hg, In–Ga–Sn, Na), 4–6: Полная МГД задача (Hg, In–Ga–Sn, Na).

Тем не менее, важно определить, при каких электрических токах и внешних МП следует решать полную МГД задачу. Поэтому было проведено численное моделирование и получены зависимости азимутальной/осевой скоростей от величины электрического тока, пропускаемого через жидкий металл. Значение электрического тока составляло $I = 500\text{--}12000$ А, а внешнее осевое МП было принято $B_z = 0.1$ Тл, а в качестве рабочей жидкости использовался натрий – жидкий металл, обладающий максимальной электропроводностью ($S = 5.7 \times 10^8\text{--}3.2 \times 10^{11}$, $N = 8.5 \times 10^9\text{--}2 \times 10^{11}$, $Re_m = 0.3\text{--}3.5$). В данном случае на всех границах задано условие прилипания ($U = 0$). Из графиков видно (рисунок 4.15), что максимальные азимутальные скорости, при расчете в БИ приближении и при решении полной МГД задачи, отличаются примерно на 1.5 % при токе

12000 А, а различие между вычисленными осевыми скоростями достигает 10 % при $I = 3000$ А. Отметим, что полученные характерные скорости течения превышают типичные значения, реализуемые в промышленных металлургических агрегатах. Для большинства таких установок магнитное число Рейнольдса, как правило, остается меньше единицы, тогда как в рассматриваемых режимах оно достигает $Re_m \approx 0.3\text{--}3.5$. Следовательно, для большинства промышленных условий достаточно использовать БИ приближение при численном моделировании ЭВТ.

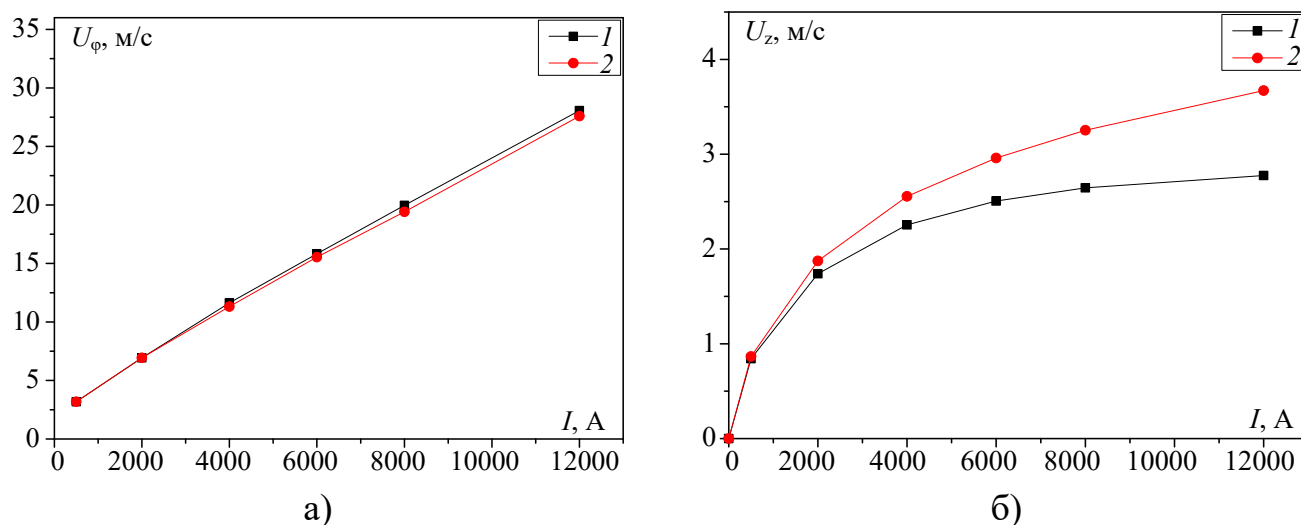


Рисунок 4.15 – Влияние электрического тока на максимальную азимутальную (а) и осевую (б) компоненты скорости при $B_z = 0.1$ Тл для натрия. 1 – расчет в БИ приближении, 2 – Полная МГД задача.

4.4 Исследование параметров и структуры ЭВТ в широком диапазоне внешних МП

Было выполнено численное моделирование гидродинамики ЭВТ в диапазоне электрических токов от 100 до 1000 А и диапазоне внешних МП $B_z = 5 \times 10^{-5}\text{--}1$ Тл ($S = 10^7\text{--}10^9$, $N = 4 \times 10^5\text{--}7.8 \times 10^{10}$, $St = 4 \times 10^{-5}\text{--}5 \times 10^4$), следует отметить, что $B_z = 5 \times 10^{-5}$ Тл соответствует МП Земли. На всех границах было задано условие прилипания ($U = 0$), а на поверхности жидкого металла принималось условие равенства нулю касательных напряжений. Решалась осесимметричная задача ($\partial \dots / \partial \varphi = 0$, $U_\varphi \neq 0$). Численное моделирование выполнялось с использованием БИ приближения. Было получено поле скорости течения жидкого металла, а также структура течения

с использованием линий тока скорости. Также были вычислены значения полной кинетической энергии системы для каждого режима:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_V |\mathbf{U}|^2 dV. \quad (4.3)$$

Зависимость полной кинетической энергии от величины внешнего МП представлена на рисунке 4.16а, при этом горизонтальная ось поделена на зоны, и каждая из них соответствует определенной структуре течения. Рассмотрим зону I, при значении электрического тока $I = 100$ А и $I = 200$ А с внешним МП $B_z = 5 \times 10^{-5}$ Тл имеет место течение с двумя тороидальными вихрями. Для режимов $I = 400$ – 600 А наблюдается система из одного тороидального вихря при $B_z < 10^{-4}$ Тл, а для режимов $I = 800$ – 1000 А – при $B_z < 2 \times 10^{-4}$ Тл. Таким образом, для электрических токов $I = 400$ – 1000 А внешнего МП $B_z = 5 \times 10^{-5}$ Тл недостаточно для образования второго вихря. Восходящий вихрь образуется при больших значениях внешнего МП, по сравнению с режимами $I = 100$ А и $I = 200$ А. Поэтому зона I соответствует структуре течения, представленной на рисунке 4.16б I (одионый тороидальный вихрь со слабой азимутальной закруткой течения).

Зоны II–III соответствуют минимуму полной кинетической энергии течения и переходу к двувихревому режиму течения, сопровождающемуся автоколебаниями в жидком металле. В зоне II вблизи малого электрода наблюдается выраженная область автоколебаний, которая с увеличением интенсивности внешнего магнитного поля уменьшается, переходя в зону III, при этом в некоторых режимах возможно образование локальных вихрей.

Зона IV соответствует подавлению первичного тороидального вихря вторичным и оттеснению его на периферию контейнера с жидким металлом (рисунок 4.16б IV). Вместе с тем, полная кинетическая энергия начинает возрастать и достигает максимума при внешнем МП $B_z \sim 10^{-2}$ Тл, при этом для больших токов характерен небольшой сдвиг максимума вправо по горизонтальной оси (рисунок 4.16а).

В зоне V кинетическая энергия течения начинает уменьшаться, что связано с электромагнитным торможением под действием индуцированных токов. Структура

течения имеет вид, представленный на рисунке 4.16б V: остается только восходящий тороидальный вихрь, полностью подавивший первичное ЭВТ.

При дальнейшем увеличении внешнего МП (зона VI) течение «сжимается» в область под малым электродом (вблизи оси симметрии, рисунок 4.16б VI). В остальном объеме формируется застойная зона с минимальной интенсивностью течения.

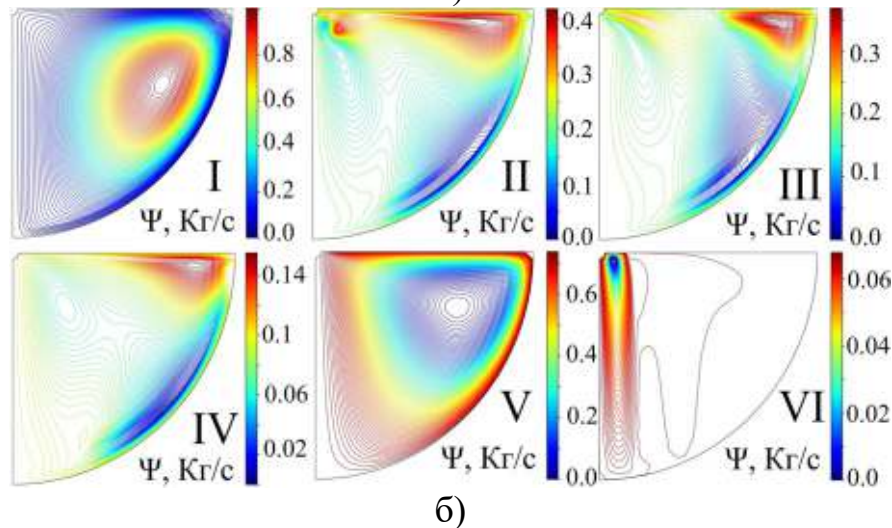
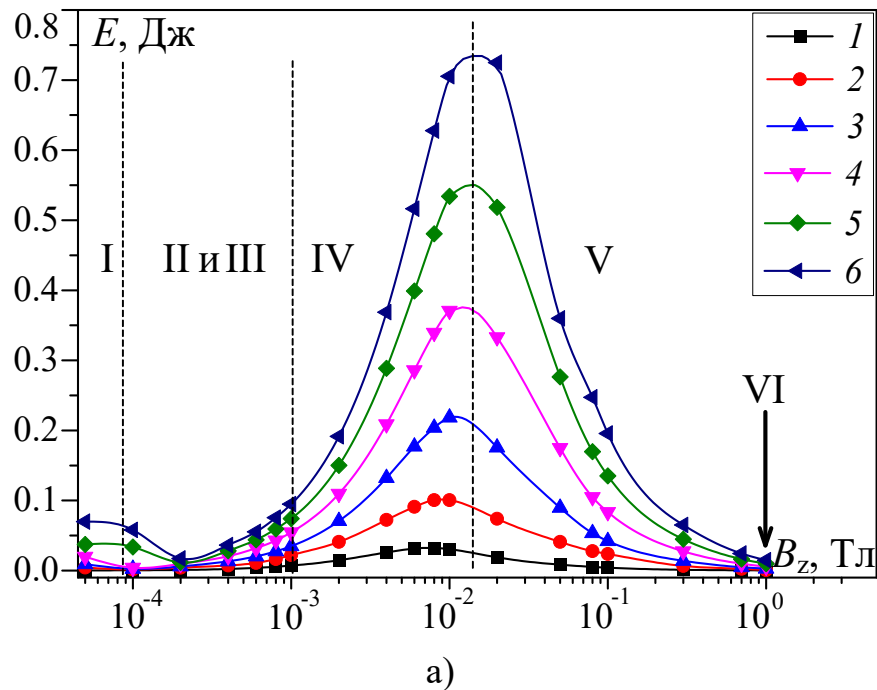


Рисунок 4.16 – а) Полная кинетическая энергия как функция внешнего осевого МП при различных электрических токах: 1 – $I = 100$ А, 2 – $I = 200$ А, 3 – $I = 400$ А, 4 – $I = 600$ А, 5 – $I = 800$ А, 6 – $I = 1000$ А, б) характерные изменения структуры течения при увеличении внешнего осевого МП.

Зависимость осевой скорости от внешнего осевого МП при различных электрических токах представлена на рисунке 4.17. Для электрических токов $I = 100$ А и $I = 200$ А наблюдается минимум осевой скорости в диапазоне внешних МП $5 \times 10^{-5} - 5 \times 10^{-3}$ Тл, для таких токов, даже малое МП Земли ($B_z = 5 \times 10^{-5}$ Тл) приводит к образованию второго вихря и уменьшению осевой скорости. Для режимов $I = 400$ А и $I = 600$ А минимум осевой скорости наблюдается при внешних МП $10^{-4} - 5 \times 10^{-3}$ Тл, а для токов $I = 800$ А и $I = 1000$ А при $2 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-3}$ Тл. При дальнейшем росте величины внешнего МП доминирует восходящий тороидальный вихрь. При этом осевая скорость возрастает (по модулю) и достигает максимума при $B_z \sim 4 \times 10^{-1}$ Тл, затем наблюдается снижение осевой скорости при $B_z > 4 \times 10^{-1}$ Тл. Следует отметить, что поскольку зона вблизи оси симметрии имеет небольшой объем, то осевая скорость вносит малый вклад в полную кинетическую энергию течения.

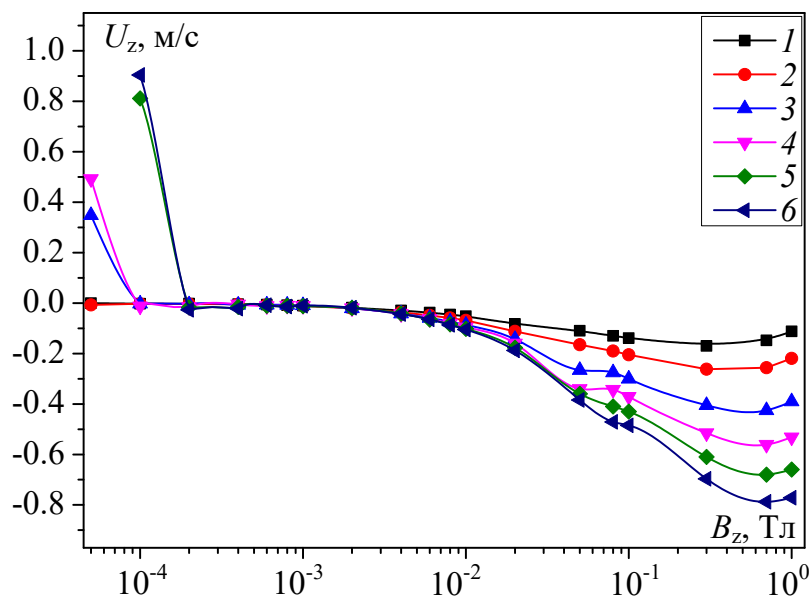


Рисунок 4.17 – Влияние внешнего МП на осевую компоненту скорости в точке

$r = 0$ мм, $z = 10$ мм: 1 – $I = 100$ А, 2 – $I = 200$ А, 3 – $I = 400$ А, 4 – $I = 600$ А,

5 – $I = 800$ А, 6 – $I = 1000$ А.

Зависимость азимутальной скорости от внешнего магнитного поля представлена на рисунке 4.18. Для случая $r = 10$ мм – азимутальная скорость увеличивается до максимума (диапазон внешнего МП $B_z \sim 2 \times 10^{-1} - 7 \times 10^{-1}$ Тл) и затем уменьшается. Такая же ситуация и для случая $r = 80$ мм, но диапазоны максимума азимутальной

скорости составляют $B_z \sim 8 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-2}$ Тл. При сильном внешнем магнитном поле (~ 0.2 Тл) имеется зона течения вблизи малого электрода (где течение достаточно интенсивно) и зона течения вблизи большого электрода (течение подавлено внешним магнитным полем).

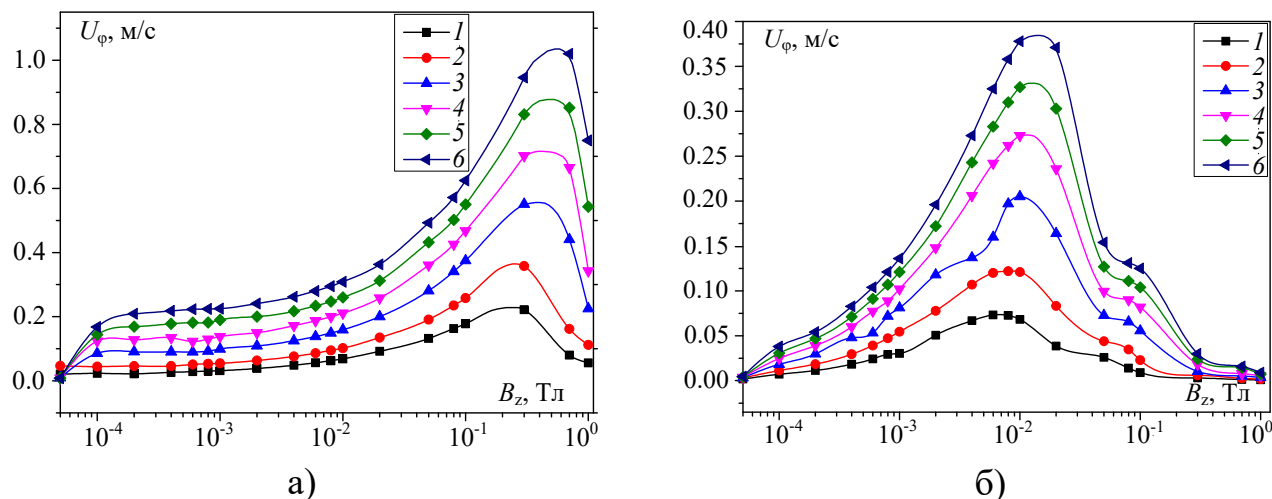


Рисунок 4.18 – Влияние внешнего МП на азимутальную скорость на свободной поверхности жидкого металла ($z = 0$ мм). а) Расстояние от оси симметрии $r = 10$ мм,

б) $r = 80$ мм. 1 – $I = 100$ А, 2 – $I = 200$ А, 3 – $I = 400$ А,

4 – $I = 600$ А, 5 – $I = 800$ А, 6 – $I = 1000$ А.

Для апробации численной модели был проведен эксперимент и получена зависимость азимутальной скорости от величины внешнего МП при электрическом токе $I = 100$ А ($S = 10^7$, $St = 0.067$, $N = 7.8 \times 10^7$). Измерения проводились с использованием водородных меток в точке $z = 0$ (поверхность жидкого металла) и $r = 80$ мм. Результаты, представленные на рисунке 4.19, показывают, что как численно, так и экспериментально наблюдается максимум азимутальной скорости при внешнем МП $\sim 10^{-2}$ Тл, а затем скорость начинает уменьшаться вследствие электромагнитного торможения течения.

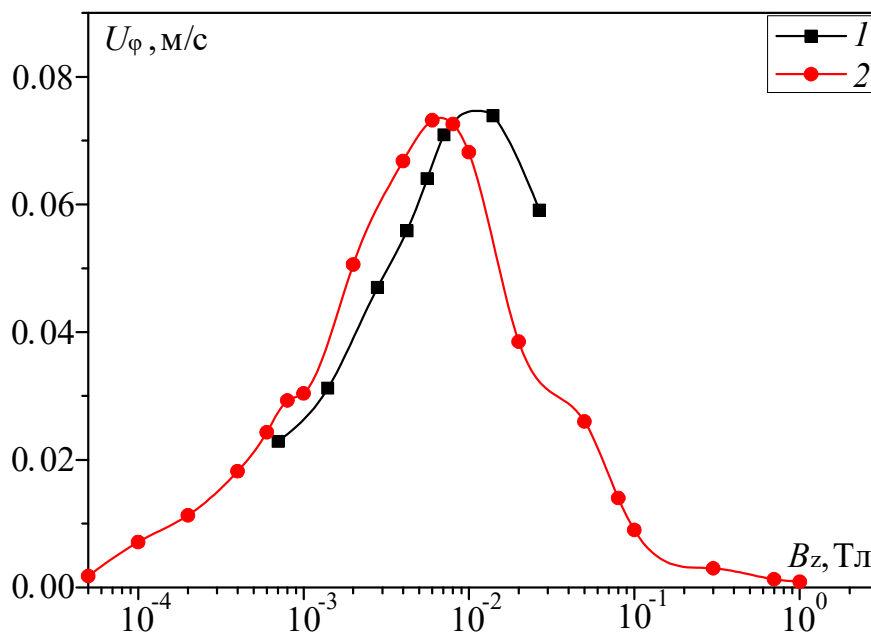


Рисунок 4.19 – Сравнение численных и экспериментальных данных для азимутальной скорости течения при $I = 100$ А, $r = 80$ мм. 1 – Эксперимент, 2 – расчет.

4.5 Место результатов диссертационной работы среди существующих экспериментальных и численных исследований

В настоящей диссертации выполнены измерения осевой скорости с помощью корреляционного датчика (рисунок 4.3). Экспериментальные исследования проводились в двух режимах: при воздействии естественного магнитного поля Земли и при его компенсации с использованием катушки Максвелла. Таким образом, корреляционный метод измерения скорости был адаптирован для измерений в среде с протекающим электрическим током. Следует отметить, что ранее этот метод использовался для измерения скорости жидкого металла в трубах различного сечения.

Эффект уменьшения осевой скорости в магнитном поле косвенно обнаружен в работе [82] по результатам измерения придонного давления струи, воздействующей на дно контейнера. Внешнее магнитное поле создавалось соленоидом (ток в обмотке ≤ 1000 А). Также этот эффект получен при численном моделировании ЭВТ в цилиндрическом контейнере [89]. На рисунке 4.20 представлено распределение скорости вдоль луча УДА при различной величине МП, данные показывают уменьшение ско-

рости течения при возрастании внешнего МП. На рисунке 4.21 приведены расчетные контуры скорости в объеме жидкого металла и положение луча УДА. С ростом величины МП интенсивность и длина струи уменьшаются.

В отличие от работы [82], где было измерено только давление трубкой Пито-Прандтля, в данной диссертации величина осевой скорости была измерена экспериментально. А в отличие от работы [89], в которой эксперимент приведен только для МП $B_z = 2.5 \times 10^{-5}$ Тл, в настоящей работе представлены экспериментальные данные при различных электрических токах и значениях МП $B_z = 3 \times 10^{-6}$ и 5×10^{-5} Тл. Таким образом, впервые получены экспериментальные результаты, когда геомагнитное поле (МП Земли) было компенсировано. При этом работы [82; 89] и текущая диссертация взаимодополняют друг друга и подтверждают эффект уменьшения осевой скорости при влиянии МП Земли.

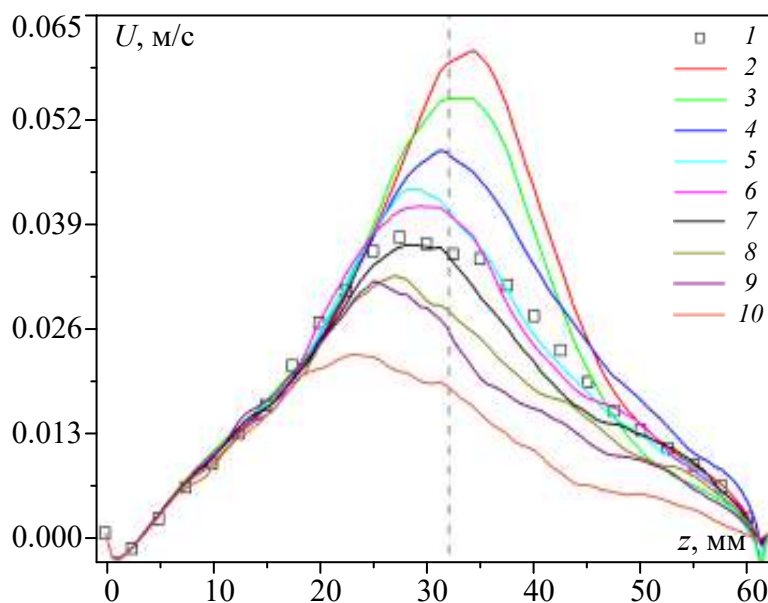


Рисунок 4.20 – Распределение скорости вдоль луча УДА (эксперимент (1), расчет (2 – 10)), 1 – $B_z = 2.5 \times 10^{-5}$ Тл, 2 – 0 Тл, 3 – 10^{-5} Тл, 4 – 1.75×10^{-5} Тл, 5 – 2×10^{-5} Тл, 6 – 2.25×10^{-5} Тл, 7 – 2.5×10^{-5} Тл, 8 – 2.75×10^{-5} Тл, 9 – 3×10^{-5} Тл, 10 – 4×10^{-5} Тл

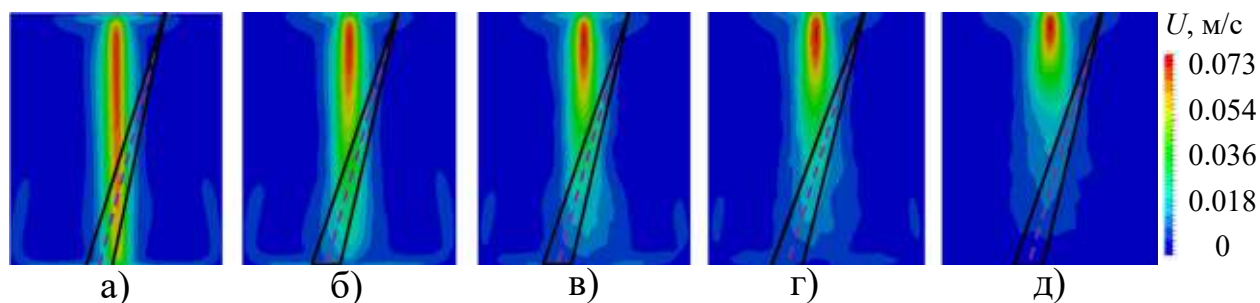


Рисунок 4.21 – Контур скорости при различной величине внешнего МП. а) $B_z = 0$ Тл, б) 2×10^{-5} Тл, в) 2.55×10^{-5} Тл, г) 3×10^{-5} Тл, д) 4×10^{-5} Тл.

Помимо осевой структуры течения, важной особенностью ЭВТ при влиянии внешнего МП являются автоколебания скорости. Существование автоколебаний в жидком металле упоминается в работе [102], однако более подробного исследования характеристик автоколебаний приведено не было. Таким образом, в данной диссертации, впервые изучены характеристики автоколебаний в жидком металле и получена зависимость периода колебаний от величины внешнего МП.

Также, с использованием волоконно-оптического датчика скорости, получена зависимость времени образования вторичного восходящего течения в зависимости от величины внешнего МП. В работе [90] авторы приводят сравнение своих резуль-

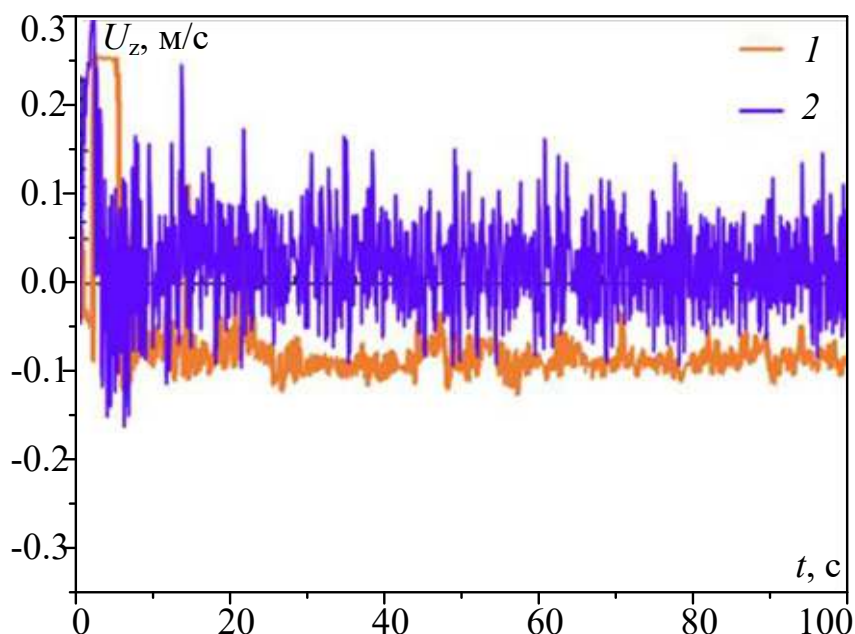


Рисунок 4.22 – Осциллограммы осевой скорости $I = 400$ А, $B_z = 5 \times 10^{-4}$ Тл, $r = 0$ мм, $z = 10$ мм 1 – эксперимент (текущая работа) 2 – расчет [90].

татов численного моделирования с экспериментальными данными, полученными в настоящей диссертации. На рисунке 4.22 приведено сравнение для режима $I = 400$ А и $B_z = 5 \times 10^{-4}$ Тл, при этом результаты качественно согласуются. Следует отметить, что в тексте диссертации также приводится сравнение численной и экспериментальной осциллограмм осевой скорости, при этом данные согласуются значительно лучше (рисунок 4.9).

Анализ публикаций других авторов не выявил обсуждения применимости различных МГД приближений применительно к численному моделированию ЭВТ при наличии внешнего МП. В то же время результаты настоящей работы показывают, что для сплава In-Ga-Sn, при влиянии внешнего магнитного поля свыше 1.25×10^{-3} Тл, применение электродинамического приближения приводит к существенно завышенным расчетным полям скорости жидкого металла.

Для сопоставления полученных результатов с данными работы [86] (рисунок 4.23а), были дополнительно вычислены азимутальная и полоидальная энергии течения для расчетного режима $I = 1000$ А, при различной величине внешнего МП (рисунок 4.23б).

Вычислим соотношение сил для построения графика зависимости, для этого запишем уравнение Максвелла, выразим плотность электрического тока и подставим в выражение для электромагнитной силы:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \mathbf{F} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Поскольку вычисления производятся в осесимметричной ЦСК, введем следующие допущения: $B_r = 0$, $B_\phi = B_\phi(r, z)$, $B_z = \text{const}$. Тогда компоненты электромагнитной силы будут иметь вид:

$$F_r = -\frac{B_\phi^2}{\mu_0 r} - \frac{1}{\mu_0} \left(B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right), \quad F_\phi = \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z}, \quad F_z = -\frac{1}{\mu_0} \left(B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right). \quad (4.5)$$

Запишем градиент магнитного давления:

$$\frac{\partial p_m}{\partial r} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial p_m}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right). \quad (4.6)$$

Градиент магнитного давления – это потенциальная часть силы, поэтому его можно перенести под знак градиента давления, тогда электромагнитная сила будет иметь вид:

$$F_r = -\frac{B_\varphi^2}{\mu_0 r}, \quad F_\varphi = \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad F_z = 0. \quad (4.7)$$

При этом из уравнения Максвелла:

$$-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = \mu_0 J_r. \quad (4.8)$$

Тогда, если вычислять среднееобъемное соотношение сил:

$$\frac{|F_\varphi|}{|F_{rz}|} = \mu_0 |B_z| \frac{\int_V |J_r| dV}{\int_V (B_\varphi^2/r) dV}. \quad (4.9)$$

Сравнение с результатами работы [86] (рисунок 4.23а) показывает хорошее согласование данных. Отличия обусловлены использованием иной модели турбулентности (k - ω SST вместо k - ϵ) и различным подводом электрического тока. При этом образование вторичного течения и уменьшение полоидальной энергии на несколько порядков происходит при отношении азимутальной и полоидальной сил ~ 0.01 .

Таким образом, особенностями настоящей диссертации являются данные, полученные в более широком диапазоне внешнего МП (до 1 Тл), и учет влияния индуцированных токов, что позволило обнаружить эффект электромагнитного торможения течения при влиянии сильного внешнего МП (более 0.01 Тл).

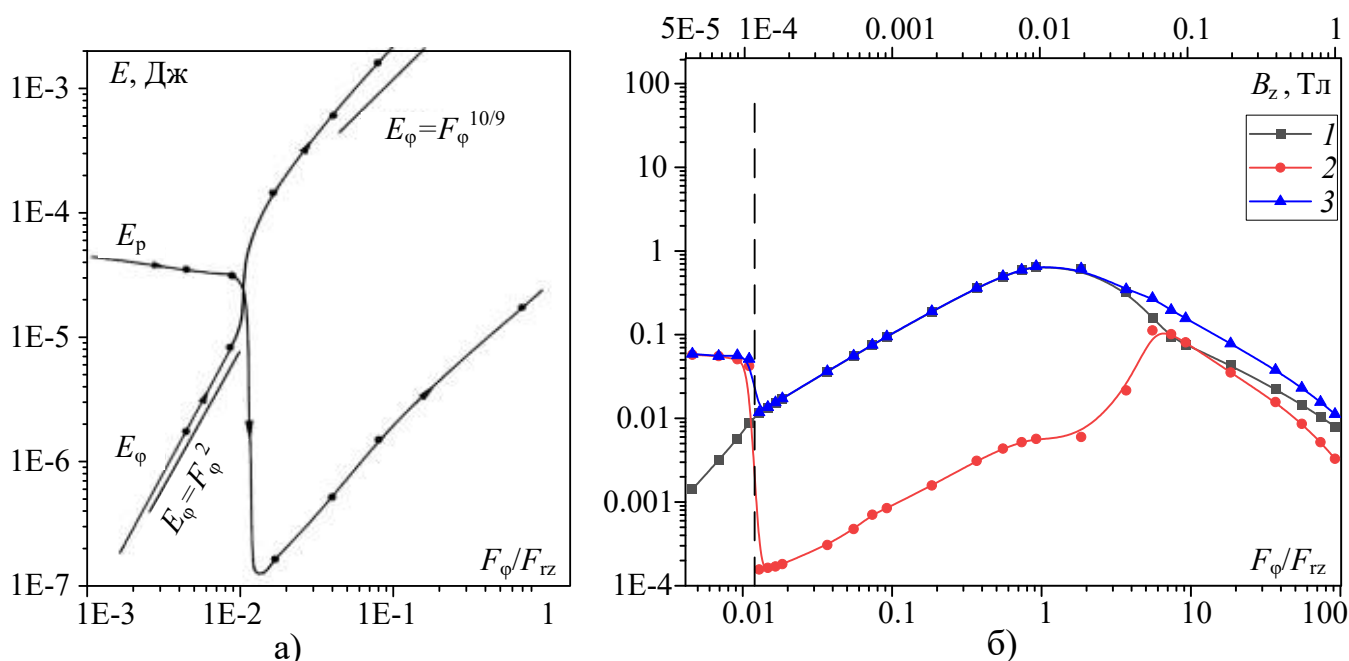


Рисунок 4.23 – Зависимости кинетической энергии от величины внешнего МП.

а) [86], б) текущая работа. I – азимутальная кинетическая энергия,
 2 – полоидальная, 3 – полная.

4.6 Выводы к главе 4

С использованием корреляционного датчика скорости получена зависимость осевой скорости от значения электрического тока. Исследования проведены с компенсацией МП Земли.

Исследована структура ЭВТ при наличии внешнего МП до $B_z = 10^{-3}$ Тл. Показано, что в диапазоне $B_z = 10^{-4} - 10^{-3}$ Тл при электрическом токе $I = 400$ А, течение может иметь двухвихревую структуру, сопровождающуюся автоколебаниями скорости, вызванными взаимодействием двух вихрей. При этом при увеличении внешнего МП период и амплитуда автоколебаний уменьшаются. При малых B_z (сопоставимых с МП Земли) сохраняется одновихревая структура.

С использованием численного моделирования и волоконно-оптического датчика скорости исследовано образование восходящего тороидального вихря, показано, что с увеличением внешнего МП время образования уменьшается.

Расчетным методом получена граница раздела зон с одновихревой и двухвихревой структурой течения. Численное моделирование было выполнено для разных

размеров малого электрода. Выявлено, что при некоторых достаточно малых внешних МП восходящий вихрь не образуется. При этом показано, что при малых электрических токах ($I < 200$ А), МП Земли приводит к образованию восходящего вихря.

Исследована применимость различных МГД приближений при расчете ЭВТ. Показано, что при внешних МП $> 1.25 \times 10^{-3}$ Тл, следует использовать БИ приближение, либо решать полную МГД задачу. Также получено, что использование БИ приближения достаточно при численном моделировании большинства лабораторных и промышленных задач.

Получена структура ЭВТ в широком диапазоне внешних МП ($5 \times 10^{-5} - 1$ Тл). Выявлено, что имеется два минимума кинетической энергии, первый связан с азимутальной закруткой течения и связанной с ней экмановской подкачкой, а второй с влиянием электрических токов, индуцированных движением электропроводящей среды (электромагнитное торможение течения).

Заключение

Экспериментально исследовано ЭВТ с компенсацией и без МП Земли, измерения проведены для электрических токов 100–450 А ($S = 10^7$ – 2×10^8 , $N = 1.6 \times 10^4$ – 1.8×10^6). Получены зависимости осевой скорости от электрического тока. Экспериментально показано, что при наличии магнитного поля Земли осевая скорость жидкого металла в области струи для исследованных режимов уменьшается примерно на 30–50 %. Таким образом, уменьшение осевой скорости может быть вызвано не только МП искусственного происхождения, но и МП Земли (соответствует положению 1).

Исследованы характеристики автоколебаний в жидком металле, которые вызваны взаимодействием первичного и противонаправленного вторичного торoidalного вихря. Расчеты и эксперименты проводились для электрического тока 400 А и МП 10^{-4} – 10^{-3} Тл ($S = 1.7 \times 10^8$, $N = 3.2 \times 10^6$ – 3.2×10^7). Показано, что с увеличением внешнего осевого магнитного поля B_z период и амплитуда автоколебаний уменьшаются. Также установлено, что при $B_z \approx 7 \times 10^{-5}$ Тл вторичный вихрь не формируется и автоколебания отсутствуют, а при МП $B_z \gtrsim 5 \times 10^{-3}$ Тл вторичный вихрь вытесняет первичный к периферии, вследствие чего автоколебания прекращаются. С помощью волоконно-оптического датчика скорости исследовано время образования восходящего вихря в зависимости от величины внешнего МП. Показано, что время образования вторичного вихря уменьшается с ростом значения внешнего МП (соответствует положению 2).

Методом численного моделирования получена граница раздела зон одновихревого и двухвихревого течения для электрических токов 1–1000 А ($B_z = 10^{-5}$ – 1.4×10^{-4} Тл, $S = 10^3$ – 10^9 , $N = 788$ – 1.1×10^7). Выявлено, что при электрических токах порядка 100–200 А, МП Земли приводит к образованию вторичного вихря. Таким образом, показано, что причиной образования вторичного вихря может быть как МП Земли, так и МП искусственного происхождения (созданное соленоидом).

Разработана методика расчета ЭВТ в безындукционном приближении и решения полной МГД задачи. Выявлено, что при внешнем МП 1.25×10^{-3} Тл ($S = 10^5$, $St = 7.1 \times 10^{-3}$, $N = 9.8 \times 10^5$) и более требуется использовать БИ приближение, либо решать полную МГД задачу, поскольку электродинамическое приближение дает существенно завышенные расчетные значения азимутальной скорости (соответствует положению 3).

Также показано, что для большинства промышленных и лабораторных задач достаточно использовать безындукционное приближение, поскольку необходимость решения полной МГД задачи возникает при $Re_m \approx 1$. Вместе с тем, для большинства металлургических и лабораторных установок магнитное число Рейнольдса, как правило, остается меньше единицы, что делает применение безындукционного приближения обоснованным.

Исследована структура и характеристики ЭВТ в широком диапазоне внешних МП от 5×10^{-5} до 1 Тл ($S = 10^7 - 10^9$, $N = 4 \times 10^5 - 7.8 \times 10^{10}$, $St = 4 \times 10^{-5} - 5 \times 10^4$). Выявлено, что при слабых МП, ниже границы перехода, зависящей от величины электрического тока, имеет место одновихревая структура течения, при достижении этой границы формируется двухвихревая структура течения. В диапазоне внешних МП от $\sim 10^{-4}$ Тл до $\sim 10^{-3}$ Тл течение имеет двухвихревую структуру, при этом возможно образование небольших локальных вихрей. Также в этом диапазоне внешних МП наблюдается минимум полной кинетической энергии, и, следовательно, слабая интенсивность течения. При дальнейшем увеличении МП вплоть до $\sim 10^{-2}$ Тл интенсивность течения возрастает в связи с увеличением азимутальной скорости течения. При этом восходящий вихрь оттесняет первичный на периферию контейнера с жидким металлом.

Внешнее МП $B_z \approx 10^{-2}$ Тл ($St \approx 0.067$, $N \approx 7.8 \times 10^7$) соответствует максимуму полной кинетической энергии течения. При дальнейшем возрастании МП начинается электромагнитное торможение течения (соответствует положению 4). При этом восходящий вихрь радиально сжимается, а в остальном объеме формируется застойная зона с минимальной интенсивностью течения.

Благодарности

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю к.т.н. Теплякову И.О. за профессиональное руководство, помощь при проведении численного и физического моделирования ЭВТ и поддержку во время подготовки диссертации.

Автор особо благодарен д.т.н. Ивочкину Ю.П. за постоянную поддержку и помощь на всех этапах выполнения диссертации.

Автор благодарит коллег за помощь в работе на различных этапах: Кубрикова К.Г., Разуванова Н.Г., Клементьеву И.Б., Игумнова В.С., Глазкова В.В., Синкевича О.А., Жидкова А.В., Шихова К.А., Домачука А., Полякова П.И.

Список обозначений и сокращений

Сокращения

АЦП – аналогово-цифровой преобразователь
 ВОПС – волоконно-оптический преобразователь скорости
 ГПУ – графическое процессорное устройство
 ДСК – декартова система координат
 ЖМБ – жидкометаллическая батарея
 КУ – коэффициент усиления
 ЛАТР – лабораторный автотрансформатор
 МГД – магнитогидродинамический
 МП – магнитное поле
 ССК – сферическая система координат
 ФВЧ – фильтр высокой частоты
 ФНЧ – фильтр низкой частоты
 ЦПУ – центральное процессорное устройство
 ЦСК – цилиндрическая система координат
 ЭВМ – электронно-вычислительная машина
 ЭВТ – электровихревое течение
 ЭДП – электродуговой переплав
 ЭДППТ – электродуговая печь постоянного тока
 ЭШП – электрошлаковый переплав
 ЭШС – электрошлаковая сварка

Обозначения

A – коэффициент
 a_3, b_3 – полуоси эллипса, м
 B_z – внешнее осевое магнитное поле, Тл
 $B_{зем}$ – магнитное поле Земли, Тл
 $B_{эвт}$ – магнитное поле, созданное током I , Тл
 d – диаметр, м

E – напряженность электрического поля, В/м

E_k – полная кинетическая энергия, Дж

F – сила, Н

f – частота, Гц

$F_{эл}$ – электромагнитная сила, Н

g – ускорение свободного падения, м/с²

H – высота, м

I – электрический ток, А

J – плотность электрического тока, А/м²

k – коэффициент

$l_{дг}$ – длина дуги, м

L – расстояние, м

n – число измерений

M – количество ячеек сетки

p – давление, Па

p_d – доверительная вероятность (двусторонний интервал)

r – радиус в цилиндрических координатах, м

R – радиус (общее обозначение), м

Re – число Рейнольдса

T – температура, К и °С

t, τ – время, с

$t_{ст}(p_d, \nu)$ – коэффициент Стьюдента

$T_{колл}$ – период колебаний, с

U – скорость, м/с

V – объем, м³

V_n – напряжение, мВ и В

x, y, z – координаты в декартовой системе, м

α – угол, рад

θ – угол, рад

μ – магнитная проницаемость, Гн/м

μ_0 – магнитная постоянная, Гн/м

ν – кинематическая вязкость, м²/с

ρ – плотность, кг/м³

σ – электропроводность, См/м

$\tau_{\text{макс.}}$ – среднее время задержки сигналов между термопарами, с

Φ – электрический потенциал, В

φ – азимутальный угол в ЦСК

ψ – разность азимутальных углов

ω – циклическая частота пульсаций

Индексы

i, j – номера

Z – осевая компонента

φ – азимутальная компонента

V – воздух

$дг$ – дуга

$и$ – инструментальная

$к$ – кинетическая

$м$ – жидкий металл

$мн$ – манометр

пульс – пульсация

сл – случайный

ср – средний

тр – трапеция

усил – усилитель

ε – эллипс

эл – электромагнитный

Список литературы

1. Бояревич, В. В. Электровихревые течения. / Под ред. Щербинина Э.В. / В. В. Бояревич, Я. Ж. Фрейберг, Е. И. Шилова, Э. В. Щербинин.– Рига: Зинатне, 1985.– 315 с.
2. Herreman, W. Efficient mixing by swirling electrovortex flows in liquid metal batteries / W. Herreman, C. Nore, L. Cappanera, J.-L. Guermond // J. Fluid Mech. – 2021. – Vol. 915. – P. A17.
3. Davidson, P. A. Magnetically driven flow in a liquid-metal battery / P. A. Davidson, O. Wong, J. W. Atkinson, A. Ranjan // Physical Review Fluids. – 2022. – Vol. 7, no. 7. – P. 074701.
4. Zhou, X. Enhancing capacity utilization of Li|LiCl-KCl-CsCl|Bi (300 °C) liquid metal batteries through the application of external magnetic fields / X. Zhou, L. Fan, S. Yan et al.// Journal of Power Sources. – 2024. – Vol. 624. – P. 235516.
5. Zhou, X. Regulating the discharge performance and electrode interface of liquid metal batteries through external magnetic fields / X. Zhou, L. Fan, J. Ning et al. // Applied Energy. – 2025. – Vol. 383. – P. 125408.
6. Abdelshafy, M. Y. Current-driven flow transitions in laboratory liquid metal battery models / M. Y. Abdelshafy, B. Wang, I. Mohammad, J. S. Cheng, D. H. Kelley // Journal of Fluid Mechanics. – 2025. – Vol. 1007. – P. A42.
7. Компан, Я. Ю. Электрошлаковые сварка и плавка с управляемыми МГД-процессами / Я. Ю. Компан, Э. В. Щербинин. – М.: Машиностроение, 1989. – 272 с.
8. Zi, S. Electrosag Welding / S. Zi, X. Kuangdi // The ECPH Encyclopedia of Mining and Metallurgy / ed. by K. Xu. – Singapore: Springer, 2023.
9. Qi, L. Influencing mechanism of an external magnetic field on fluid flow, heat transfer and microstructure in aluminum resistance spot welding / L. Qi, Q. Zhang, S. Niu, R. Chen, Y. Li // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2021. – Vol. 15, no. 1. – P. 985–1001.

10. Ueno, R. Numerical study of heat transfer process during electrosag welding by two-dimensional particle method / R. Ueno, M. Shigeta, M. Tanaka et al. // Quarterly Journal of the Japan Welding Society. – 2021. – Vol. 39, no. 4. – P. 363–370.
11. Yamazaki, K. Observation of phenomena in the slag bath during electrosag welding / K. Yamazaki, R. Asano, R. Toda et al. // Quarterly Journal of the Japan Welding Society. – 2021. – Vol. 39, no. 4. – P. 347–362.
12. Medovar, B. I. Electrosag Technology / B. I. Medovar, G. A. Boyko. – New York: Springer, 1991. – 270 c.
13. Huang, X. A three-dimensional multiphysics coupled model of melting and rotation of the electrode during electrosag remelting process / X. Huang, Z. Liu, B. Li, F. Wang, C. Liu // Metallurgical and Materials Transactions B. – 2024. – Vol. 55. – P. 667–681.
14. Xia, Z. Numerical investigation about the effect of axial static magnetic field on improvement of metal pool profile during electrosag remelting process / Z. Xia, Z. Sun, M. Zhang et al. // Metallurgical and Materials Transactions B. – 2023. – Vol. 54. – P. 3101–3114.
15. Karimi-Sibaki, E. Investigation of effect of electrode polarity on electrochemistry and magnetohydrodynamics using tertiary current distribution in electrosag remelting process / E. Karimi-Sibaki, A. Kharicha, A. Vakhrushev et al // Journal of Iron and Steel Research International. – 2021. – Vol. 28, no. 12. – P. 1551–1561.
16. Shi, C. Electrosag Remelting Towards Clean Steel / C. Shi, J. Li, S. Yang. – Singapore: Springer, 2023. – 256 p.
17. Herrera-Ortega, M. Numerical simulation of electromagnetically driven flow and temperature distribution inside an electric arc furnace with two non-parallel electrodes / M. Herrera-Ortega, J. A. Ramos-Banderas, C. A. Hernández-Bocanegra, A. Beltrán // Revista Mexicana de Física. – 2025. – Vol. 71, no. 1. – P. 010603.
18. Pavlovs, S. Electro-vortex flow and melt homogenization in the industrial direct current electrical arc furnace / S. Pavlovs, A. Jakovics, A. Chudnovsky // Magnetohydrodynamics. – 2022. – Vol. 58. – P. 305–326.

19. Pavlovs, S. Melt azimuthal rotation in direct current electric arc furnace without external axial magnetic field / S. Pavlovs, A. Jakovics, A. Chudnovsky // *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. – 2024. – Vol. 75, no. 2. – P. 145–157.
20. Yao, C. L. Numerical analysis of fluid flow and heat transfer by means of a unified model in a direct current electric arc furnace / C. L. Yao, H. C. Zhu, Z. H. Jiang, T. Pan // *Steel Research International*. – 2021. – Vol. 92, no. 6. – P. 2000664.
21. Branover, G. The application of Pitot and Prandtl tubes in magnetohydrodynamic experiments / G. Branover, Yu. Gelfgat, A. Tsinober, A. Shtern, E. Sherbinin // *Magnetohydrodynamics*. – 1966. – Vol. 2. – P. 55–58.
22. Mates, S. A flow visualization study of the gas dynamics of liquid metal atomization nozzles / S. Mates, G. Settles // *Advances in Powder Metallurgy and Particulate Materials*. – 1995. – P. 1–15.
23. Platnieks, I. Hot-wire sensor for liquid sodium / I. Platnieks, G. Uhlmann // *Phys. E Sci. Instrum.* – 1984. – Vol. 17. – P. 862–864.
24. Sajben, M. Hot wire anemometer in liquid mercury / M. Sajben // *Rev. Sci. Instrum.* – 1965. – Vol. 36. – P. 945–953.
25. Trakas, C. Low-velocity calibration of hot-film sensors in mercury / C. Trakas, P. Tabeling, J. Chabrierie // *J. Phys. E: Sci. Instrum.* – 1983. – Vol. 16. – P. 568–570.
26. Thess, A. Lorentz Force Velocimetry / A. Thess, E. Votyakov, Y. Kolesnikov // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96. – P. 164501.
27. Weissenfluh, T. Probes for local velocity and temperature measurements in liquid metal flow / T. Weissenfluh // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1985. – Vol. 28. – P. 1563–1574.
28. Tsinober, A. On the relevance of the potential-difference method for turbulence measurements / A. Tsinober, E. Kit, M. Teitel // *J. Fluid Mech.* – 1987. – Vol. 175. – P. 447–461.
29. Gelfgat, Y. Experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios / Y. Gelfgat, A. Gelfgat // *Magnetohydrodynamics*. – 2004. – Vol. 40. – P. 147–160.

30. Takeda, Y. Measurement of velocity profile of mercury flow by ultrasound Doppler shift method / Y. Takeda // Nucl. Technol. – 1987. – Vol. 79. – P. 120–124.
31. Brito, D. Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium / D. Brito, H.-C. Nataf, P. Cardin, J. Aubert, J. Masson // Exp. Fluids. – 2001. – Vol. 31. – P. 653–663.
32. Eckert, S. Velocity measurements in liquid sodium by means of ultrasound Doppler velocimetry / S. Eckert, G. Gerbeth // Exp. Fluids. – 2002. – Vol. 32. – P. 542–546.
33. Zhilin, V. An experimental investigation of the velocity field in an axisymmetric electrovortical flow in a cylindrical container / V. Zhilin, Yu. Ivochkin, A. Oksman et al. // Magnetohydrodynamics. – 1986. – Vol. 22. – P. 323–328.
34. Zhilin, V. G. Diagnostics of liquid metal flows using fibre-optic velocity sensor / V. G. Zhilin, K. V. Zvyagin, Yu. P. Ivochkin, A. A. Oksman // In: J. Lielpeteris, R. Moreau (eds.) Liquid Metal Magnetohydrodynamics. – Dordrecht: Springer Netherlands, 1989. – P. 373–379.
35. Жилин, В. Г. Волоконно-оптические измерительные преобразователи скорости и давления / В. Г. Жилин. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 112 с.
36. Termaat, K. Fluid flow measurements inside the reactor vessel of the 50 MWe Dodewaard nuclear power plant by cross correlation of thermocouple signals / K. Termaat // J. Phys. E: Sci. Instrum. – 1970. – Vol. 3. – P. 589–593.
37. Belyaev, I. Temperature correlation velocimetry technique in liquid metals / I. Belyaev, N. Razuvanov, V. Sviridov, V. Zagorsky // Flow Meas. Instrum. – 2017. – Vol. 55. – P. 37–43.
38. Keadze, B. Analysis of the statistical error and optimization of correlation flow meters / B. Keadze // At. Energy. – 1984. – Vol. 56. – P. 13–18.
39. Beck, M. Correlation in instruments: cross correlation flowmeters / M. Beck // J. Phys. E. – 1981. – Vol. 14. – P. 7–19.
40. Coulthard, J. Cross-correlation flow measurement—a history and the state of the art / J. Coulthard // Meas. Control. – 1983. – Vol. 16. – P. 214–218.
41. Motevalli, V. Cross-correlation velocimetry for measurement of velocity and temperature profiles in low-speed, turbulent, non-isothermal flows / V. Motevalli, C. Marks, B. McCaffrey // J. Heat Transf. – 1992. – Vol. 114. – P. 331–337.

42. Филатова, Н. К. Научное обоснование оптимальных параметров промышленной технологии выплавки слитков гафния для атомной промышленности : дис. канд. техн. наук : 05.16.02 / Филатова Надежда Константиновна. – Москва, 2016. – 157 с.
43. Ивочкин, Ю. П. Экспериментальное и численное исследование автоколебаний в электровихревом течении жидкого металла / Ю. П. Ивочкин, И. О. Тепляков, Д. А. Виноградов // Тепловые процессы в технике. – 2015. – №12. – С. 539–545.
44. Ивочкин, Ю. П. Численный расчет магнитного поля с использованием технологии CUDA применительно к моделированию электровихревых течений / Ю. П. Ивочкин, Д. А. Виноградов, И. О. Тепляков // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2015. – № 2. – С. 13–18.
45. Ivochkin, Yu. Investigation of self-oscillations in electrovortex flow of liquid metal / Yu. Ivochkin, I. Teplyakov, D. Vinogradov // Magnetohydrodynamics. – 2016. – Vol. 52. – P. 277–286.
46. Vinogradov, D. Investigation of the Taylor vortices in electrovortex flow / D. Vinogradov, Yu. Ivochkin, I. Teplyakov // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 891. – P. 012059.
47. Vinogradov, D. Influence of the external magnetic field on hydrodynamic structure of the electrovortex flow in hemispherical container / D. Vinogradov, I. Teplyakov, Yu. Ivochkin, I. Klementyeva // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 899. – P. 082006.
48. Ивочкин, Ю. П. О различных магнитогидродинамических приближениях при моделировании электровихревых течений / Ю. П. Ивочкин, И. О. Тепляков, Д. А. Виноградов // Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. – 2019. – Т. 7. – С. 18–23.
49. Vinogradov, D. On the applicability of the electrodynamic approximation in the simulation of the electrovortex flow in the presence of an external magnetic field /

- D. Vinogradov, I. Teplyakov, Yu. Ivochkin, A. Kharicha // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1128. – P. 012112.
50. Teplyakov, I. Experimental and numerical investigation of the instability of the electrovortex flow in hemispherical container / I. Teplyakov, D. Vinogradov, Yu. Ivochkin, I. Klementyeva // Fluid Dyn. Res. – 2018. – Vol. 50. – P. 051415.
 51. Vinogradov, D. Numerical simulation of the electrovortex flow in the non-inductive approximation under the influence of an external magnetic field / D. Vinogradov, I. Teplyakov, Yu. Ivochkin // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1359. – P. 012021.
 52. Teplyakov, I. Applicability of the different MHD approximations in the simulation of the electrovortex flow / I. Teplyakov, D. Vinogradov, Yu. Ivochkin, A. Kharicha, P. Serbin // Magnetohydrodynamics. – 2018. – Vol. 54. – P. 403–416.
 53. Vinogradov, D. Study of modes of electrovortex flow in a wide range of external magnetic field magnitudes / D. Vinogradov, I. Teplyakov, Yu. Ivochkin // Magnetohydrodynamics. – 2019. – Vol. 55. – P. 455–464.
 54. Teplyakov, I. Experimental Study of the Velocity of the Electrovortex Flow of In-Ga-Sn in Hemispherical Geometry / I. Teplyakov, D. Vinogradov, Yu. Ivochkin // Metals-Basel. – 2021. – Vol. 11. – P. 1806.
 55. Vinogradov, D. Calculation of the Magnetic Field of a Current-Carrying System / D. Vinogradov, I. Teplyakov, Yu. Ivochkin // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – P. 3623.
 56. Ивочкин, Ю. П. Исследование механизмов термогидродинамических и МГД процессов с жидкометаллическими рабочими телами : дис. д-ра техн. наук : 01.04.14 / Ивочкин Юрий Петрович. – Москва, 2015. – 407 с.
 57. Lundquist, S. Hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current / S. Lundquist // Ark. Fys. – 1969. – Vol. 40. – P. 89–95.
 58. Sozou, C. On some similarity solution in magnetohydrodynamics / C. Sozou // J. Plasma Phys. – 1971. – Vol. 6. – P. 331–341
 59. Sozou, C. On fluid motions induced by electric current source / C. Sozou // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 46. – P. 25–32.

60. Sozou, C., Pickering, W. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in hemispherical container / C. Sozou, W. Pickering // J. Fluid Mech. – 1976. – Vol. 73, no. 4. – P. 641–650.
61. Бояревич, В. В. Усиление азимутального вращения в меридиональном электровихревом течении в полусфере / В. В. Бояревич, Р. П. Миллере // Магнитная гидродинамика. – 1982. – №4. – С. 51–56.
62. Atthey, D. A mathematical model for fluid flow in a weld pool at high currents / D. Atthey // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 98, no. 4. – P. 787–801.
63. Щербинин, Э. В. О безындукционном приближении в теории электровихревых течений / Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1991. – №3. – С. 82–86.
64. Щербинин, Э. В. Электровихревое течение в сфероидальном контейнере / Э. В. Щербинин, Е. Е. Яковлева // Магнитная гидродинамика. – 1986. – №4. – С. 64–69.
65. Власюк, В. Х. О влиянии радиуса переплавляемого электрода на электровихревое течение в цилиндрической емкости / В. Х. Власюк // Магнитная гидродинамика. – 1987. – №4. – С. 101–106.
66. Власюк, В. Х. Электровихревые течения в емкостях различной глубины / В. Х. Власюк // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 2. – С. 63–68.
67. Власюк, В. Х. Турбулентные электровихревые течения в цилиндрической емкости / В. Х. Власюк // Магнитная гидродинамика. – 1988. – № 3. – С. 76–82.
68. Dilavari, A. A mathematical model of slag and metal flow in the ESD process / A. Dilavari, J. Szekely // Metallurgical Transactions B. – 1977. – Vol. 8. – P. 227–236.
69. Власюк, В. Х. Соотношение электровихревой и гравитационной конвекций / В. Х. Власюк // Магнитная гидродинамика. – 1988. – № 4. – С. 75–80.
70. Власюк, В. Х., Щербинин, Э. В. Электровихревые течения в двухслойной жидкости / В. Х. Власюк, Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 17–27.

71. Vlasiuk, V. Kh. On the vorticity transfer by electrically induced vortical flow in two-layer fluid / V. Kh. Vlasiuk, E. V. Shcherbinin // *Magnetohydrodynamics*. – 2000. – Vol. 36, no. 3. – P. 219–232.
72. Vlasiuk, V. Kh. Critical values of electrovortex flow parameters in two-layer fluids / V. Kh. Vlasiuk // *Magnetohydrodynamics*. – 2004. – Vol. 40, no. 3. – P. 237–249.
73. Shatrov, V. Stability of the flow between two hemispherical electrodes / V. Shatrov, G. Gerbeth // 8-th PAMIR International Conference on Fundamental and Applied MHD. – Borgo-Corsica, France, September 5–9, 2011. – P. A3–14.
74. Буцениекс, И. Э. Экспериментальное изучение МГД процессов при электрошлаковой сварке / И. Э. Буцениекс, Я. Ю. Компан, В. И. Шарамкин и др. // *Магнитная гидродинамика*. – 1975. – № 3. – С. 143–148.
75. Дементьев, С. Б. Интенсификация процесса перемешивания в электродуговых печах постоянного тока / С. Б. Дементьев, О. М. Скопис, Э. В. Щербинин // *Магнитная гидродинамика*. – 1992. – № 1. – С. 101–105.
76. Жилин, В. Г. Экспериментальное исследование поля скоростей в осесимметричном течении в цилиндрическом контейнере / В. Г. Жилин, Ю. П. Ивочкин, А. А. Оксман // *Магнитная гидродинамика*. – 1986. – № 3. – С. 110–116.
77. Тепляков, И. О. Исследование структуры электровихревого течения жидкого металла в полусферической полости : дис. канд. техн. наук : 01.04.14 / Тепляков Игорь Олегович. – Москва, 2013. – 148 с.
78. Миллере, Р. П. Действие продольного магнитного поля на электровихревое течение в цилиндрической ванне / Р. П. Миллере, В. И. Шарамкин, Э. В. Щербинин // *Магнитная гидродинамика*. – 1980. – № 1. – С. 81–85.
79. Власюк, В. Х. Численное исследование теплообмена при электровихревом течении в продольном магнитном поле / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // *Магнитная гидродинамика*. – 1986. – № 3. – С. 78–84.
80. Власюк, В. Х. О влиянии вертикального магнитного поля на тепло- и массообмен в параболоидной жидкометаллической ванне с током / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // *Магнитная гидродинамика*. – 1987. – № 2. – С. 112–118.

81. Власюк, В. Х. Нестационарный массообмен в цилиндрической емкости при электровихревом течении в продольном магнитном поле / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1987. – № 3. – С. 97–100.
82. Бояревич, В. В. Влияние продольного магнитного поля на движение среды при электродуговом и электрошлаковом процессах / В. В. Бояревич, В. И. Шарамкин, Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 1. – С. 115–120.
83. Мошняга, В. Н. Экспериментальное исследование электровихревого течения в цилиндрической емкости / В. Н. Мошняга, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 1. – С. 77–80.
84. Ласис, У. А. Влияние схемы подачи электрического тока на МГД-течение в жидкой ванне при вакуумно-дуговой плавке / У. А. Ласис, В. Н. Мошняга, Ю. В. Чернов, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 2. – С. 127–130.
85. Vinogradov, D. A. Effect of the Earth's Magnetic Field on the Electric-Vortex-Flow Structure / D. A. Vinogradov, Y. P. Ivochkin, I. O. Teplyakov // Doklady Physics. – 2018. – Vol. 63, no. 11. – P. 447–450.
86. Davidson, P. A. The role of Ekman pumping and the dominance of swirl in confined flows driven by Lorentz forces / P. A. Davidson, D. Kinnear, R. J. Lingwood et al. // European Journal of Mechanics – B/Fluids. – 1999. – Vol. 18, no. 4. – P. 693–711.
87. Bojarevics, V. Investigation of the azimuthal perturbation growth in the flow due to an electric current point source / V. Bojarevics, R. Millere, A. I. Chaikovsky // Proc. 10th Riga Conference on MHD. – Salaspils, 1981. – Vol. 1. – P. 147–148.
88. Yachikov, I. M. Behavior of Conducting Liquid within an Arc Furnace in a Vertical Magnetic Field / I. M. Yachikov, I. V. Portnova, T. P. Larina // Steel in Translation. – 2018. – Vol. 48, no. 1. – P. 1–6.
89. Liu, K. Numerical and experimental investigation of electro-vortex flow in a cylindrical container / K. Liu, F. Stefani, N. Weber et al. // Magnetohydrodynamics. – 2020. – Vol. 56, no. 1. – P. 27–42.

90. Abdi, M. Mapping electro-vortex flow patterns from tornado to inverted tornado in a hemispherical container / M. Abdi, E. Karimi-Sibaki, C. Sommitsch et al. // *International Journal of Thermofluids*. – 2024. – Vol. 23. – P. 100721.
91. Kolesnichenko, I. Evolution of a strong electrovortex flow in a closed cell / I. Kolesnichenko, P. Frick, V. Eltishchev et al. // *Physical Review Fluids*. – 2020. – Vol. 5, no. 12. – P. 123703.
92. Frick, P. Electro-vortex flows in a cylindrical cell under axial magnetic field / P. Frick, S. Mandrykin, V. Eltischev, I. Kolesnichenko // *J. Fluid Mech.* – 2022. – Vol. 949. – P. A20.
93. Kolesnichenko, I. Spin-up of electro-vortex flows under external magnetic field / I. Kolesnichenko, S. Mandrykin // *The European Physical Journal Plus*. – 2022. – Vol. 137, no. 8. – P. 988.
94. Mandrykin, S. Electro-vortex flow of liquid metal in a cylindrical cell with localized current supply and variable aspect ratio / S. Mandrykin, V. Ozernykh, I. Kolesnichenko // *Magnetohydrodynamics*. – 2020. – Vol. 56, no. 2/3. – P. 215–224.
95. Eltishchev, V. The influence of a cylindrical cathode on the electro-vortex flow of liquid metal: Numerical simulations and laboratory experiments / V. Eltishchev, S. Mandrykin, I. Kolesnichenko // *Europhysics Letters*. – 2022. – Vol. 137, no. 1. – P. 13001.
96. Колесниченко, И. В. Фундаментальные аспекты магнитной гидродинамики жидких металлов в области значений параметров, характерных для технологических приложений : дис. д-ра физ.-мат. наук : 1.1.9 / Колесниченко Илья Владимирович. – Пермь, 2024. – 345 с.
97. Прохоренко, В. Я. Физические свойства термометрического сплава In–Ga–Sn / В. Я. Прохоренко, Е. А. Ратушняк, Б. И. Стадник // *Теплофизика высоких температур*. – 1970. – Т. 8, № 2. – С. 957.
98. Мелехов, А. П. Криволинейные координаты / А. П. Мелехов. – Рязань: ГОУВПО РГУ, 2008 – 20 с.
99. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media* / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – Oxford: Pergamon Press, 1992. – 460 p.

100. Cody W.J. Chebyshev Approximations for the complete elliptic integrals K and E / W. J. Cody // Mathematics of Computation. – 1965. – No. 19. – P. 105–112.
101. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
102. Чудновский, А. Ю. Моделирование гидродинамических процессов в токоне-
сущих расплавах электроагрегатов : дис. канд. техн. наук: 01.02.05 / Чуднов-
ский Александр Юрьевич. – Рига, 1988. – 213 с.