

На правах рукописи

Вихров Евгений Владимирович

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РАСШИРЕНИИ
УЛЬТРАХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ**

1.3.9 – Физика плазмы

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Объединенном институте высоких температур Российской академии наук.

Научный руководитель:

Зеленер Борис Вигдорович,

к.ф.-м.н., в.н.с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, г. Москва.

Официальные оппоненты:

Думин Юрий Викторович,

к.ф.-м.н., доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», г. Москва.

Жидков Алексей Георгиевич,

д.ф.-м.н., доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва.

Ведущая организация:

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», г. Москва.

Защита состоится «__» _____ 2026г. в «__» ч. «__» мин. на заседании диссертационного совета 24.1.193.01 (Д 002.110.02), созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Объединенного института высоких температур Российской академии наук, по адресу 125412, г. Москва, Ижорская ул., д. 13, стр. 2., конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИВТ РАН.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные гербовой печатью, просьба направлять по адресу: 125412, г. Москва, Ижорская ул., д. 13, стр. 2, на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Автореферат разослан

«__» _____ 2026г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.193.01 (Д 002.110.02)

к.ф.-м.н. А.В.Тимофеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Часто различные виды плазмы, например, такие как плазма газовых разрядов, плазма солнечной короны или плазма термоядерного синтеза, являются относительно горячими. Экстремальные значения параметров, при которых существуют многие виды горячей плазмы обуславливают сравнительно быструю динамику физических процессов, протекающих в ней, а так же приводят к различным экспериментальным трудностям при их изучении.

С помощью методов лазерного охлаждения и фотоионизации ультрахолодного газа, находящегося в магнитооптической ловушке, возможно создание однократно ионизованной ультрахолодной плазмы. Начальная температура электронов в такой плазме находится в диапазоне от 1 до 1000 К, а начальная температура ионов составляет величину порядка 1 мК. При этом, начальная пиковая концентрация частиц обоих знаков достигает значения порядка 10^{10} см^{-3} . Активно ведется экспериментальная работа при воздействии на ультрахолодную плазму внешних электрических и магнитных полей.

Ультрахолодная плазма обладает рядом значительных преимуществ. Во-первых, относительная простота эксперимента, который может быть выполнен усилиями небольшой лаборатории. Причем, оптические методы, используемые при получении ультрахолодной плазмы обеспечивают очень хорошо контролируемые начальные условия. Во-вторых, экстремально низкие значения начальных температур компонентов плазмы обуславливают сравнительно медленную динамику различных плазменных процессов. Кроме того, возможно создание плазмы с достаточно высоким значением параметра неидеальности $\Gamma \approx 1$, которую, как правило, достаточно трудно получить в лаборатории. В-третьих, при воздействии на ультрахолодную плазму внешним магнитным полем, при постоянной генерации новых порций плазмы, возможно получение динамического стационара плотности.

Таким образом, актуальность тематики обусловлена тем, что специфика ультрахолодной плазмы позволяет как проверить рамки применимости уже существующих теорий, так и использовать её для более детального изучения физических процессов, протекающих в плазме. Необходимо отметить, что ультрахолодная плазма находит и прикладные применения. Одним из таких является электронная микроскопия, где ультрахолодная плазма выступает в качестве источника холодных электронов.

Особенности эксперимента обладают так же и недостатками. Так, для измерения параметров ультрахолодной плазмы невозможно использование различных твёрдых зондов. В связи с этим, в основу измерений положены методы лазерной спектроскопии и методы детектирования заряженных частиц. Это приводит к существенно ограниченным возможностям диагностики электронов.

Недостающие сведения можно попытаться получить с помощью числен-

ного моделирования, что является достаточно распространенным подходом в плазме. Методы магнитной гидродинамики, часто используемые при моделировании плотной, горячей плазмы, в данном случае могут иметь ограниченную применимость. Детальные сведения о частицах плазмы можно получить с помощью метода молекулярной динамики. Однако вычислительная сложность этого метода квадратично зависит от числа частиц, а реализация методов её понижения для нулевых (открытых) граничных условий сопряжена с известными трудностями. Это приводит к тому, что для моделирования доступно значительно меньшее число частиц, чем в реальном эксперименте. Таким образом, ещё одной актуальной задачей является выработка критериев подобия, которые бы позволили сравнивать результаты молекулярно-динамического моделирования с экспериментальными.

Целью работы является верификация модели ультрахолодной плазмы, как системы точечных частиц, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона и изучение физических процессов, протекающих в такой плазме. Для её достижения в работе решались следующие задачи:

1. Разработка программ для моделирования ультрахолодной плазмы и программ обработки получаемых данных.
2. Определение критериев подобия для сопоставления результатов моделирования с экспериментальными.
3. Экстраполяция полученных результатов для определения влияния как начальных параметров самой плазмы, так и параметров внешних полей на её динамику.

Научная новизна работы состоит в том, что:

1. Разработана масштабируемая параллельная программа моделирования ультрахолодной плазмы, учитывающая различные экспериментальные условия.
2. Предложена и проверена методика определения критериев подобия для сравнения результатов моделирования с экспериментальными.
3. Исследовано влияние величины градиента внешнего квадрупольного магнитного поля на удержание плазмы.
4. Исследованы различные механизмы потери электронов ультрахолодной плазмой, находящейся во внешних однородных скрещенных электрическом и магнитном полях.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанные программы адекватно воспроизводят динамику ультрахолодной плазмы.

Кроме того, в совокупности с предложенными критериями подобия, становится возможным не только сравнение результатов моделирования с уже существующими экспериментальными, но и предсказание поведения ультрахолодной плазмы в зависимости от её параметров и параметров внешних полей. Наконец, предсказываемые механизмы потери электронов ультрахолодной плазмой могут представлять интерес для электронной микроскопии.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Формирование ионного фронта, при расширении ультрахолодной плазмы в вакуум, происходит в результате нарушения её электронейтральности, в диапазоне начальных пиковых плотностей от $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ до $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, и начальных температур электронов от $T_{e0} = 25 \text{ К}$ до $T_{e0} = 100 \text{ К}$. Получены аналитические выражения, которые позволяют оценить время формирования и скорость движения ионного фронта в зависимости от начальных параметров плазмы.
2. Безразмерная величина электрического поля, возникающего в области ионного фронта одинакова в диапазоне плотностей от $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ до $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, и начальных температур электронов от $T_{e0} = 25 \text{ К}$ до $T_{e0} = 100 \text{ К}$.
3. Время удержания ультрахолодной плазмы внешним квадрупольным магнитным полем, с увеличением градиента этого поля, стремится к пределу и практически не зависит от начальной температуры электронов.
4. Обнаружены два различных механизма потери электронов ультрахолодной плазмой, находящейся во внешних постоянных однородных скрещенных электрическом и магнитном полях. При этом, проекции координат электронов на плоскость, перпендикулярную силовым линиям магнитного поля имеют вид облака при напряженности электрического поля не более $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$ и начальной температуре электронов более $T_{e0} = 100 \text{ К}$, либо имеют вид пучка при напряженности электрического поля более $E = 5 \cdot 10^{-5} \text{ статВ/см}$ и начальной температуре электронов до $T_{e0} = 100 \text{ К}$. В обоих случаях магнитное поле лежит в диапазоне от $B = 10 \text{ Гс}$ до $B = 60 \text{ Гс}$.
5. В электронной плазме пучка, сформированного электронами, покинувшими ультрахолодную плазму, при воздействии на нее скрещенных постоянных однородных электрического и магнитного полей, возникает диокотронная неустойчивость в диапазоне магнитных полей от $B = 10 \text{ Гс}$ до $B = 60 \text{ Гс}$.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 5 научных конференциях: 15-я Всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных

атомов” (Новосибирск, 2021), 18-е Международное совещание “Сложные системы заряженных частиц и их взаимодействие с электромагнитным излучением” (Москва, 2022), XXI Международное Совещание по Магнитоплазменной Аэродинамике (Москва, 2022), 17 Всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных атомов” (Новосибирск, 2023), 22-е Международное совещание “Сложные системы заряженных частиц и их взаимодействие с электромагнитным излучением” (Москва, 2026).

По материалам диссертации опубликовано 5 [1–5] работ в зарубежных журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science, 4 из которых в журналах первого квартиля (Q1).

Достоверность полученных результатов подтверждается, прежде всего, их хорошим согласием с экспериментом, а так же наличием публикаций в высокорейтинговых рецензируемых научных изданиях.

Личный вклад. В основу диссертационной работы легли результаты исследований, проведенных автором в 2020-2025 гг. в ОИВТ РАН. Им создан комплекс программ для моделирования ультрахолодной плазмы. Все результаты, представленные в данной работе, проводились автором лично или при его непосредственном участии. Автор сформулированы положения, выносимые на защиту.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 81 ссылку. Работа изложена на 117 страницах, содержит 2 алгоритма, 57 рисунков и 94 формулы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обоснование актуальности темы работы, научной новизны и практической значимости полученных результатов. Сформулирована цель работы, приведены положения, выносимые на защиту. Содержатся сведения о публикациях, апробации и достоверности результатов и о личном вкладе автора.

Первая глава представляет собой обзор литературы. Вначале кратко излагаются сведения о технике эксперимента и диагностики ультрахолодной плазмы. Затем даётся обзор различных экспериментальных результатов, полученных при исследовании процесса расширения ультрахолодной плазмы как в вакуум, так и при воздействии на неё внешних электромагнитных полей. Приводятся основные теоретические результаты, описывающие процесс расширения ультрахолодной плазмы, рассматриваются различные методики численного моделирования.

Ультрахолодная плазма полностью ионизована (путем фотоионизации), с $Z = 1$. Типичные значения характерных физических величин следующие [6]:

- процесс расширения плазмы происходит в вакуумной камере;

- при необходимости к системе прикладываются внешние электрические и магнитные поля;
- в качестве исходных атомов обычно выступают такие элементы, как Li, Rb, Ca, Sr, Xe;
- начальная температура электронов T_{e0} лежит в диапазоне от 1 до 1000 K;
- начальная температура ионов T_{i0} составляет величину порядка 1 мК;
- начальное распределение частиц плазмы нормальное;
- начальная концентрация плазмы n_0 варьируется от 10^6 до 10^{11} см $^{-3}$;
- начальный размер плазмы σ_0 величина порядка 10^{-2} см;
- число частиц в эксперименте N лежит в диапазоне 10^6 до 10^9 .

Вторая глава посвящена вопросам численного моделирования ультрахолодной плазмы и программированию вычислений.

Для моделирования используется метод классической молекулярной динамики. При этом решаются классические уравнения движения для точечных частиц, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона:

$$U_{jk} = \frac{q_j \cdot q_k}{r_{jk}}, \quad (1)$$

где q - заряд соответствующей частицы, равный по величине заряду электрона и $r_{jk} = |r_j - r_k|$ - расстояние между частицами j и k .

Во избежании численных трудностей, возникающих при вычислении взаимодействия двух зарядов противоположных знаков, к r_{jk} добавляется малая величина $r_0 = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}}$ ($\alpha \ll 1$), пропорциональная начальной пиковой концентрации n_0 . Это допустимо, поскольку даже в начальный момент времени, концентрации частиц сравнительно малы, а в последующие моменты времени только убывают. При этом производная от потенциала непрерывна.

Для интегрирования уравнений движения, в случае расширения ультрахолодной плазмы в вакуум, используется схема Верле [7] в скоростной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j^{(n+1)} &= \mathbf{r}_j^{(n)} + \mathbf{v}_j^{(n)}\tau + \mathbf{a}_{jk}^{(n)}\frac{\tau^2}{2} \\ \mathbf{v}_j^{(n+1)} &= \mathbf{v}_j^{(n)} + \left(\mathbf{a}_{jk}^{(n)} + \mathbf{a}_{jk}^{(n+1)}\right)\frac{\tau}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $\mathbf{r}_j^{(n)}$, $\mathbf{v}_j^{(n)}$ и $\mathbf{a}_j^{(n)}$ это радиус-вектор, скорость и ускорение частицы соответственно, (n) номер итерации, а τ величина шага сетки по времени.

В том случае, когда к плазме приложено внешнее магнитное поле, во втором уравнении системы (2) возникает неявная зависимость между левой и

правой частями. Она устраняется путем приведения схемы к следующему виду [3]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_j^{(n+1)} &= \mathbf{r}_j^{(n+1)} + \mathbf{v}_j^{(n)} \tau + \mathbf{a}_j^{(n)} \frac{\tau^2}{2} \\
\mathbf{v}_j^{(n+1)} &= \frac{\mathbf{u} + [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] + \mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})}{1 + b^2} \\
\mathbf{b} &= \frac{\tau q_j}{2m_j c} \cdot \mathbf{B}^{(n)} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{v}_j^n + \frac{q_j \tau}{2cm_j} \left(\mathbf{E}_j^{(n)} + \mathbf{E}_j^{(n+1)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_j^{(n)} \times \mathbf{B}_j^{(n)}] \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Эта схема используется для моделирования ультрахолодной плазмы, находящейся во внешнем квадрупольном магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, компоненты которого вычисляются в каждой точке и при наличии внешних постоянных однородных электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей.

Генерация начальных распределений координат частиц обоих знаков и начальных скоростей ионов, поскольку они распределены по Максвеллу, сводится к получению нормально распределенных случайных величин путем преобразования Бокса-Мюллера [8]. Начальные скорости электронов равны по величине и равномерно распределены по всем направлениям. В том случае, когда начальное распределение частиц плазмы экспоненциальное, поскольку функция распределения известна, используется метод, позволяющий получить требуемое распределение из равномерного [9]. Граничные условия нулевые.

Для программирования вычислений используется язык С. Программирование частей, связанных с использованием графических процессоров, осуществляется при помощи CUDA C.

Ускорение вычислений достигается путем использования различных сеток по времени для электронов и ионов соответственно, поскольку их массы существенно различаются. Дальнейшее ускорение достигается благодаря возможности параллелизма данных. При этом, имеющиеся данные равномерно распределяются между вычислительными ресурсами. В качестве библиотеки параллельного программирования используется Message Passing Interface.

На Рис. 1(a) приведены зависимости ускорения вычислений, определяемого как отношение времени работы последовательной программы ко времени работы параллельной программы $s = \frac{t_s}{t_p}$, от числа процессов M_p для вычислительных ресурсов в различных конфигурациях. На первой (конфигурация А) было задействовано 4 узла с 2 процессорами Intel Xeon E5-2697 на каждом. На второй (конфигурация Б) задействован 1 процессор AMD EPYC 7742. В обоих случаях суммарное число частиц $N = 10^4$.

На Рис. 1(b) изображено относительное время работы t/t_b в зависимости от общего числа частиц, при вычислениях на NVIDIA TESLA V100 (16Gb, PCI). Здесь в качестве опорного времени t_b взято время работы при числе

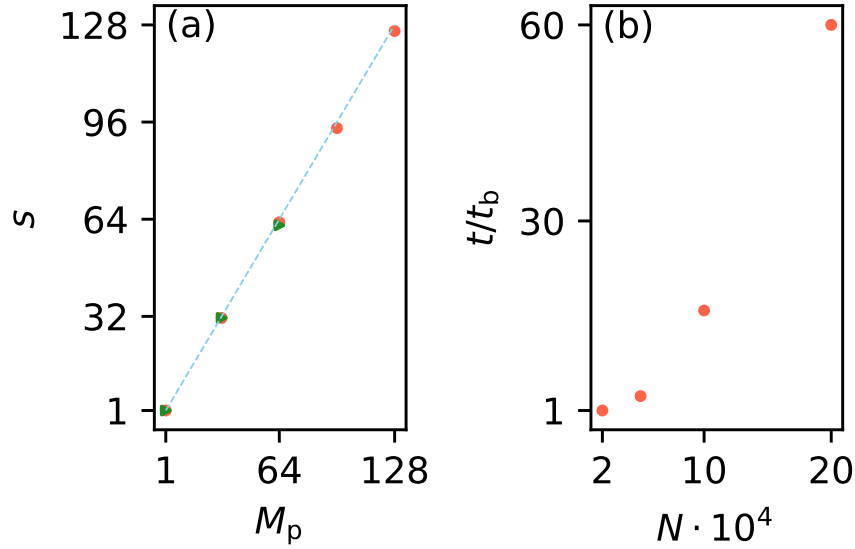


Рис. 1: Зависимости: (a) $s(M_p)$ для конфигурации А (кружки) и конфигурация В (треугольники) в сравнении с идеальным случаем (пунктир); (b) относительного времени от общего числа частиц при вычислениях на графическом процессоре.

частиц $N = 2 \cdot 10^4$.

В **третьей главе** приводятся результаты моделирования процесса расширения ультрахолодной плазмы в вакуум. Моделируется двухкомпонентная ультрахолодная плазма. Масса иона m_i равняется массе ^{88}Sr . Масса электрона m_e соответствует своему реальному значению. Число частиц одного типа $N = N_i = N_e$ варьируется в диапазоне от 10^3 до 10^5 . Начальное пиковое значение концентрации лежит в диапазоне от 10^9 см^{-3} до 10^{10} см^{-3} . Начальная температура ионов составляет $T_{i0} = 10^{-3} \text{ K}$, а начальная температура электронов T_{e0} лежит в диапазоне от 20 K до 100 K.

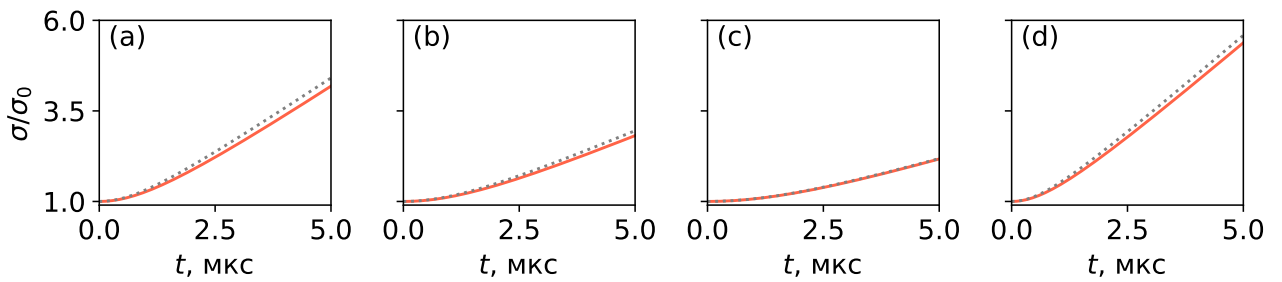


Рис. 2: Зависимости $\sigma(t)$ (сплошная) в сравнении с выражением (4) (пунктир) нормированные на свои начальные значения для: (a) ^{88}Sr , $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$; (b) ^{88}Sr , $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$; (c) ^{40}Ca , $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$; (d) ^{40}Ca , $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$. Везде $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Одной из основных характеристик, измеряемых в эксперименте, является зависимость $\sigma(t)$, для которой известно аналитическое выражение [6]:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau_{\text{exp}}} \right)^2}, \quad (4)$$

где $\tau_{\text{exp}} = \sqrt{m_i \sigma_0 / k_b T_{e0}}$.

На Рис. 2 изображены графики $\sigma(t)$, полученные для различных параметров моделирования, в сравнении с выражением (4). Поскольку (4) хорошо согласуется с экспериментальными данными [6], то можно говорить и о согласии модели с экспериментом.

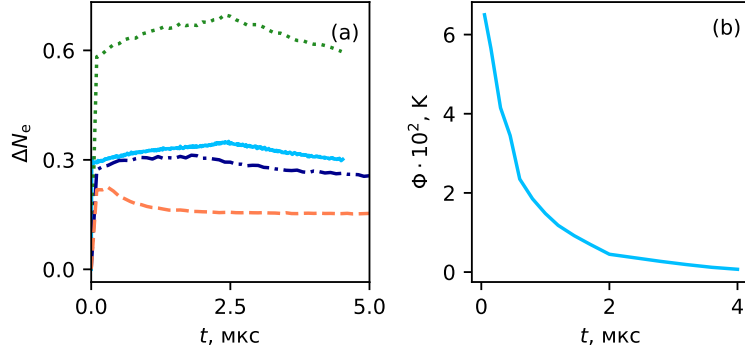


Рис. 3: Зависимости от времени (a) ΔN для ^{88}Sr и: $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (сплошная); $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$ (пунктир); $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих-пунктир); $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих); (b) глубины потенциальной ямы Φ от времени для $N = 10000$, $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$.

Процесс расширения ультрахолодной плазмы в вакуум, начинается с того, что часть электронов быстро покидает плазму. Это происходит на временах порядка 10^{-8} с. При этом возникает дисбаланс зарядов $\Delta N = 1 - N_e/N_i$, величина которого зависит от параметров плазмы и согласуется с теоретическими оценками [6]. На Рис. 3(a) изображена зависимость дисбаланса зарядов $\Delta N(t)$ для различных режимов.

Нарушение электронейтральности плазмы приводит к формированию потенциальной ямы, в которой запираются оставшиеся электроны [6]. Глубина этой ямы убывает по мере расширения плазмы, что продемонстрировано на Рис. 3(b) [1].

Моделирование показывает, что по мере расширения плазмы, функция распределения электронов в пространстве сохраняет свой изначальный вид. Однако, это оказывается несправедливым для ионов. На Рис. 4 изображена функция распределения ионов в моменты времени $t = 1 \text{ мкс}$ и $t = 10 \text{ мкс}$ в сравнении с начальной, вычисленной для тех же времен. На границе плазмы возникает искажение распределения ионов с резким спадом, характерное для волнового фронта [1; 2].

Радиальное распределение электрического поля плазмы достигает своего максимума в области фронта. Более того, безразмерное электрическое $\mathcal{E}(\hat{r})$, где $\hat{r} = r/\sigma_0$, оказывается одинаковым для различных наборов параметров плазмы [2], что изображено на Рис. 5. Это говорит о подобии процесса.

Поскольку тепловые скорости ионов малы, пренебрегая трением об элек-

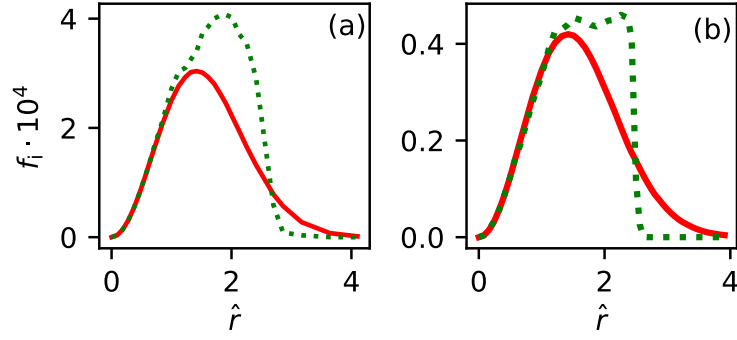


Рис. 4: Функция распределения ионов (штрих) в сравнении с исходной (сплошная) для ^{88}Sr и $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 5000$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ в различные моменты времени: (a) $t = 1 \text{ мкс}$ и (b) $t = 10 \text{ мкс}$.

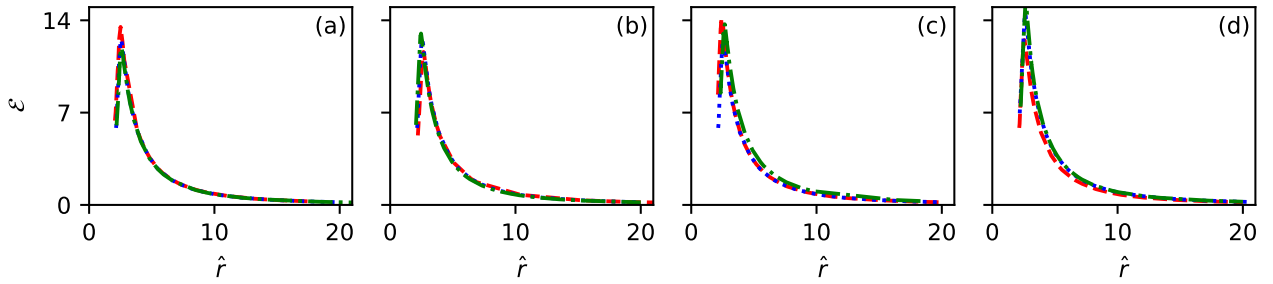


Рис. 5: Зависимость безразмерного электрического поля от безразмерного расстояния $\mathcal{E}(\hat{r})$ для различных режимов: (a) $N = 5000$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ и трёх различных моментов времени: $t = 10, 15$, и 20 мкс ; (b) $N = 5000$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $t = 15 \text{ мкс}$ и трёх значений начальных температур электронов: $T_{e0} = 25, 50$, и 100 K ; (c) $N = 5000$, $t = 15 \text{ мкс}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$ и трёх значений начальной пиковой концентрации: $n_0 = 10^9, 3 \cdot 10^9$, и 10^{10} см^{-3} ; (d) $t = 15 \text{ мкс}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ и трёх различных чисел частиц: $N = 5000, 12500$, и 25000 .

троны, в силу его малости, для ионов можно написать [1]:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} = e \frac{eN^{2/3}}{e} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathcal{E}. \quad (5)$$

При соответствующем выборе безразмерных величин, из последнего следуют выражения [1]:

$$t_0 = \sqrt{\frac{m_i}{e^2 n_0}} N^{1/6} \quad (6)$$

$$v_0 = \frac{e(Nn_0)^{1/6}}{\sqrt{m_i}},$$

которые позволяют получить оценки для времени формирования фронта и скорости его движения.

Скорость движения сформировавшегося ионного фронта постоянна и превышает скорость ионного звука. Её можно оценить с помощью второго из выражений (6):

$$v_f = p \cdot v_0, \quad (7)$$

где p некоторый поправочный коэффициент. На Рис. 6 изображена зависи-

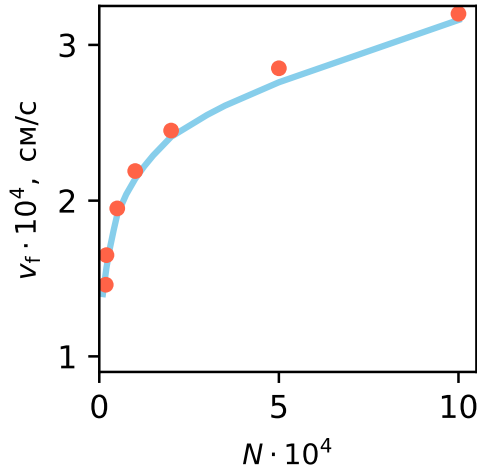


Рис. 6: Зависимость скорости ионного фронта v_f от числа частиц N результаты моделирования (точки) в сравнении с оценкой (7) (сплошная).

мость скорости ионного фронта v_f от числа ионов N , при значении параметра $p = 2.5$ [1], в сравнении с результатами моделирования.

Четвертая глава посвящена моделированию процесса расширения ультрахолодной плазмы, находящейся во внешнем квадрупольном магнитном поле.

Поскольку число частиц, доступное для моделирования, существенно меньше числа частиц в эксперименте, то для выбора параметров моделирования используется безразмерное кинетическое уравнение Больцмана [3]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\mathbf{r}}} + \beta [\hat{\mathbf{u}} \mathbf{b}] \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = 0, \quad (8)$$

где $\hat{r} = r/\sigma_0$, $\hat{t} = t/\tau_{\text{exp}}$, $\hat{u} = v_i/c_s$, и $\mathbf{b} = \mathbf{b}/B'\sigma_0$, $\beta = eB'\sigma_0^2/(c\sqrt{m_i k_b T_{e0}})$. Здесь c_s это скорость ионного звука.

При моделировании величина B' должна выбираться таким образом, что бы безразмерный параметр β совпадал со своим экспериментальным значением. Отметим, что соотношение Ларморовского радиуса электрона и характерного размера плазмы определено тем же параметром: $\sqrt{m_e/m_i}/\beta$ [3].

Аналогично эксперименту [10], моделируется ультрахолодная плазма ^{88}Sr . При этом, массы электрона и иона соответствуют своим реальным значениями, а число частиц составляет $N_i = N_e = 10000$. Начальная пиковая концентрация лежит в диапазоне от $1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ до $3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, температура электронов T_{e0} изменяется в диапазоне от 20 К до 200 К.

Плазма находится во внешнем постоянном квадрупольном магнитном поле, ось симметрии которого совпадает с направлением оси Z декартовой системы координат. Магнитное поле характеризуется величиной своего градиента вдоль этой оси. Параметр β изменяется как $0.1\beta_e < \beta < 2\beta_e$, где β_e соответствует экспериментальному значению для $B_e = 150 \text{ Гс/см}$.

Влияние внешнего магнитного поля приводит к тому, что распределение частиц обоих знаков существенно меняет свой вид и приобретает цилиндрическую симметрию, характерную для силовых линий поля. Это изображено

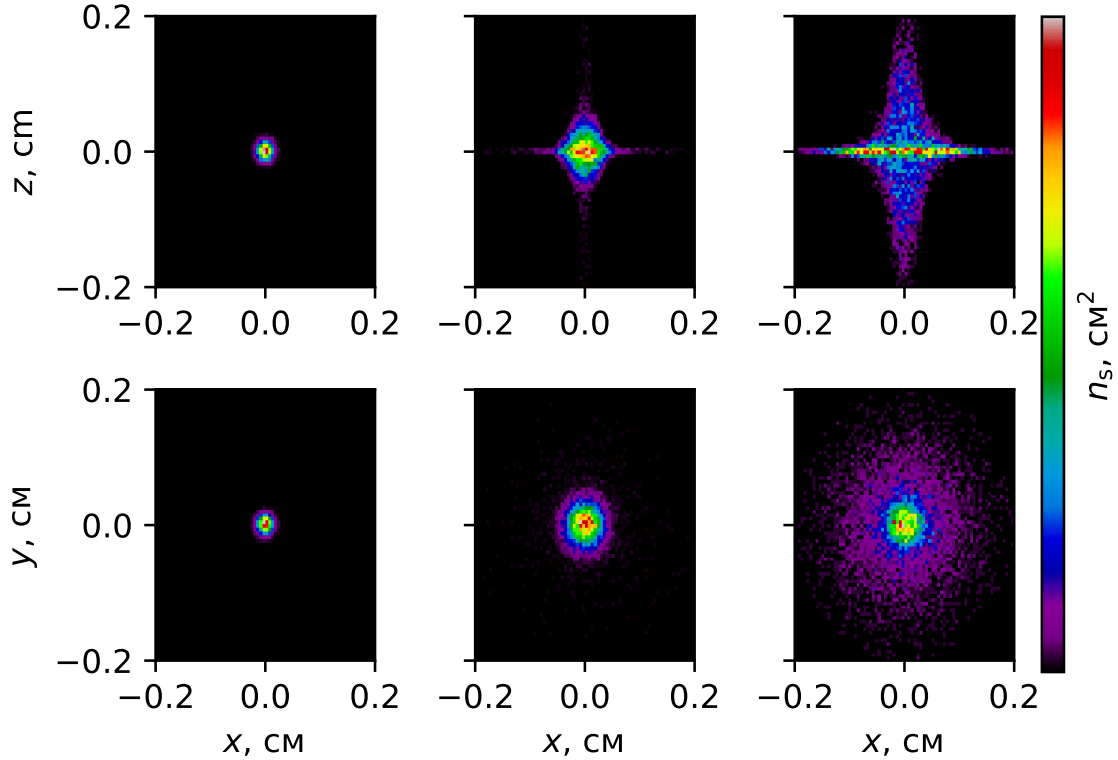


Рис. 7: Проекции электронов на плоскости XZ (верх) и XY (низ) в различные моменты времени: $t = 0$ мкс, $t = 5$ мкс и $t = 15$ мкс, для $T_{e0} = 20$ К, $N = 10^4$, $n = 10^9$ см $^{-3}$, $B' = 1.5 \cdot 10^3$ Гс/см. Цветная шкала представляет собой нормированную плотность n_s см 2 на единицу площади.

на Рис. 7, где представлены проекции электронов на различные плоскости. Проекции ионов выглядят аналогично.

Магнитное поле влияет на дисбаланс зарядов и его пространственную структуру [4]. Так ΔN демонстрирует медленный рост. Это хорошо видно из Рис. 8(а), где изображены зависимости $\Delta N(\hat{t})$ для различных величин B' . Моделирование дает одинаковую зависимость $\Delta N(\hat{t})$ в рассматриваемом диапазоне величин B' .

Помимо этого, в одних областях плазмы преобладают ионы, а в других электроны, причем эти области существуют одновременно. На Рис. 8(б) показаны зависимости $\Delta N(\hat{r})$ в различные моменты времени. Видно, что величина $\Delta N(\hat{r})$ знакопеременная.

Такое распределение зарядов в плазме приводит к формированию сложного потенциального рельефа, который оказывает влияние на движение ионов. В центре плазмы возникает электрическая потенциальная яма для ионов. На Рис. 9(а) показана зависимость потенциальной энергии иона, отнесенной к начальной температуре электронов, от расстояния в различные моменты времени. Величина потенциальной энергии усреднена по угловым координатам.

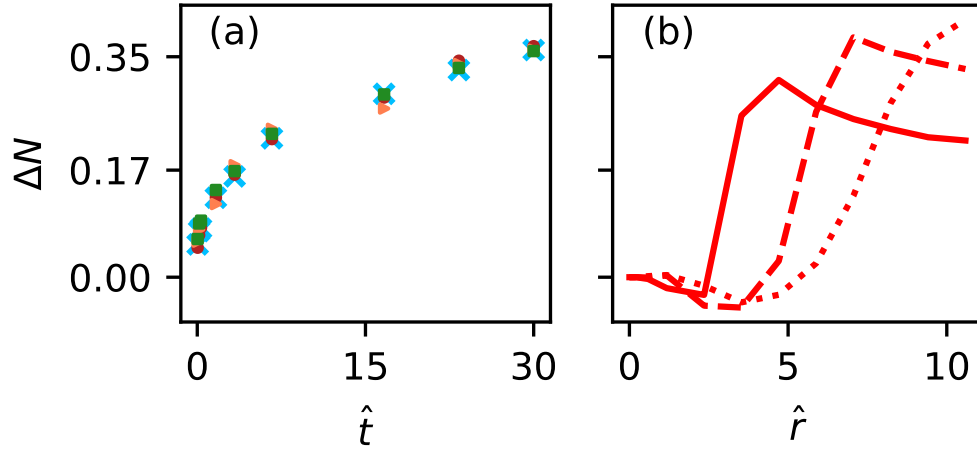


Рис. 8: Зависимости: (a) $\Delta N(\hat{t})$ для различных градиентов магнитного поля $B' = 10^3$ Гс/см (иксы), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см (круги), $B' = 6 \cdot 10^3$ Гс/см (квадраты); $B' = 1.5 \cdot 10^4$ Гс/см (треугольники); (b) $\Delta N(\hat{r})$ в различные моменты времени $\hat{t} = 2.5$ (сплошная), $\hat{t} = 5$ (штрих) и $\hat{t} = 7.5$ (пунктир) при $\beta = 38$; для $N = 10000$, $T_{e0} = 20$ К, $n = 10^9$ см $^{-3}$.

Видно, что с течением времени формируется потенциальная яма, ширина которой растёт [4].

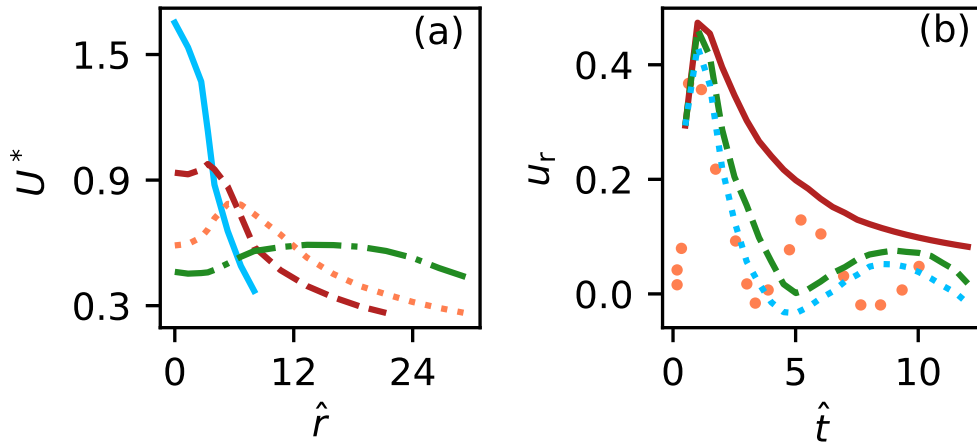


Рис. 9: Зависимости (a) энергии иона $U^*(\hat{r})$ отнесенная к T_{e0} при $\beta = 38$ в различные моменты времени – $\hat{t} = 0.5$ (сплошная), $\hat{t} = 1.5$ (штрих), $\hat{t} = 2.5$ (пунктир), $\hat{t} = 5$ (штрих-пунктир); (b) нормированной радиальной скорости u_r при $\beta = 0$ (сплошная), $\beta = 38$ (штрих, плоскость $x = 0$), $\beta = 38$ (вдоль оси симметрии поля, пунктир),

По-видимому, потенциальная яма приводит к колебаниям радиальной скорости ионов [4]. На Рис. 9(b) изображена зависимость нормированной радиальной скорости иона $u_r = \tau_{\text{exp}} v_{ir} / r$ от времени в присутствии магнитного поля и без него. Величина u_r не испытывает колебаний без магнитного поля, в то время как при $B' \neq 0$ наблюдаются её колебания.

Точки, изображенные на Рис. 9(b) соответствуют данным, представленным в эксперименте [11]. Хотя вначале колебания совпадают, с течением вре-

мени возникает расхождение. Это обусловлено тем, что в эксперименте [11] другие параметры плазмы. Прежде всего, плазма эксперимента [11] получена из ^{40}Ca .

Воздействие внешнего квадрупольного магнитного поля влияет на временную зависимость концентрации плазмы $n(t)$ в её центре. Это влияние проявляется в сравнительно медленной её убыли, т.е. возникает удержание плазмы. На Рис. 10 (а) изображены зависимости $\log_{10}(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ для различных величин градиента магнитного поля. Символами изображены результаты моделирования, сплошной линией результат эксперимента [10]. Моделирование показывает, что с увеличением B' удерживающий эффект насыщается [3]. Эффект насыщения времени удержания был подтвержден позднее в эксперименте [11], путем удвоения величины градиента внешнего магнитного поля.

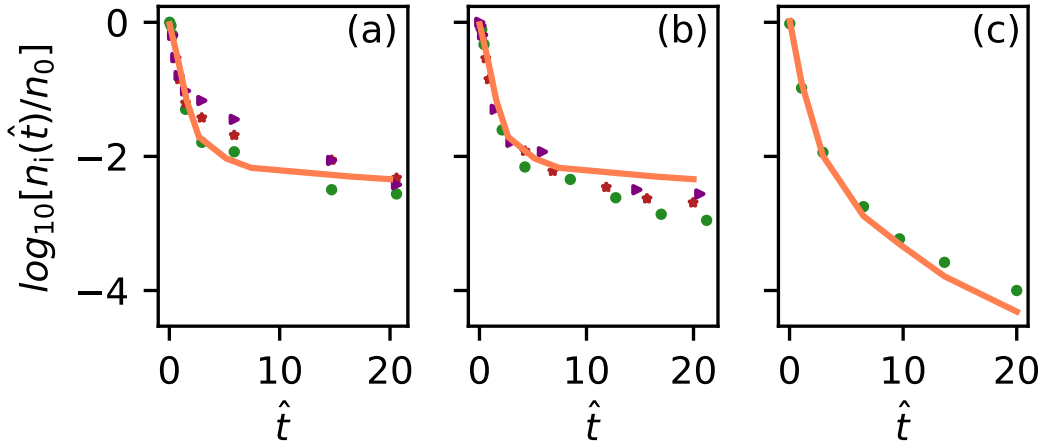


Рис. 10: Зависимости $\log_{10}(n_i(\hat{t})/n_{i0})$: (а) $B = 150$ Гс/см (эксперимент [10], сплошная), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см (круги), $B' = 10^4$ Гс/см (звезды), $B' = 3 \cdot 10^4$ Гс/см (треугольники) при $T_{e0} = 20$ К; (б) $T_{e0} = 40$ К (эксперимент [10], сплошная), $T_{e0} = 20$ К (круги), $T_{e0} = 40$ К (звезды), $T_{e0} = 200$ К (треугольники), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см; (с) $B = 0$ Гс/см (эксперимент [10], сплошная), $B' = 0$ Гс/см (круги), $T_{e0} = 20$ К. Всюду символами обозначены результаты моделирования при $n_{i0} = 3 \cdot 10^9$ см $^{-3}$ и $N = 10^4$.

В то же время, начальная температура электронов влияет на удержание плазмы слабее [3]. Это видно из Рис. 10 (б), где для различных T_{e0} изображены зависимости $\log_{10}(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ при фиксированном значении B' . Сплошная линия представляет собой результат эксперимента [10], в то время как символами представлены результаты моделирования.

Для сравнения на Рис. 10 (с) изображены зависимости $\log_{10}(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ для случая расширения плазмы в вакуум. Видно, что за то же время концентрация ионов убывает быстрее в отсутствии магнитного поля.

В **пятой главе** рассматриваются результаты моделирования ультрахолодной плазмы, находящейся во внешних однородных постоянных скрещенных электрическим и магнитным полях.

Параметры моделирования выбраны с ориентиром на эксперимент [12], поскольку в нём реализованы схожие условия. Тем не менее, число частиц в эксперименте превышает число частиц, доступных для моделирования на несколько порядков, поэтому абсолютные значения как параметров плазмы, так и величин внешних полей различаются.

Массы частиц m_i и m_e соответствуют своим реальным значениям для ^{131}Xe и электрона соответственно. При этом $N = N_i = N_e = 5000$. Начальное пиковое значение концентрации варьируется от $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ до $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Начальная температура электронов лежит в диапазоне от $T_{e0} = 10 \text{ К}$ до $T_{e0} = 250 \text{ К}$. К плазме приложены внешние однородные постоянные скрещенные электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{B}$ поля. Причем, электрическое поле направлено вдоль оси X , $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, а магнитное вдоль оси Z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ декартовой системы координат. Напряженность электрического поля изменяется в диапазоне $E = 10^{-5} - 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$, а индукция магнитного поля в диапазоне $B = 5 - 60 \text{ Гс}$.

Основной особенностью воздействия внешних полей в такой конфигурации заключается в существенном изменении динамики электронов, покидающих плазму. А именно, электроны могут покидать её в либо в виде облака, либо в виде пучка [5].

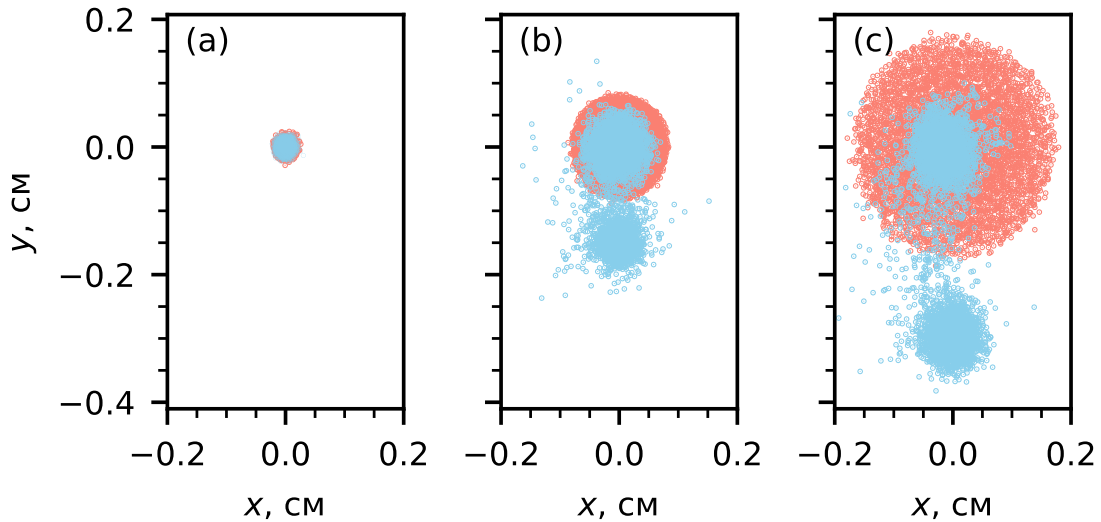


Рис. 11: Проекция координат электронов (синий) и ионов (красный) на плоскость XY для $N = 5000$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ К}$, $E = 1 \cdot 10^{-5} \text{ статВ/см}$, $B = 10 \text{ Гс}$ в различные моменты времени: (a) $t = 0 \text{ мкс}$, (b) $t = 5 \text{ мкс}$, (c) $t = 10 \text{ мкс}$.

На Рис.11, где изображены проекции электронов и ионов на плоскость XY для $N = 5000$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ К}$, $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$, $B = 10 \text{ Гс}$ в различные моменты времени, продемонстрировано разделение исходного электронного облака на две доли.

Верхнее пятно, сгруппированное вблизи начала координат представляет собой электроны плазмы. Электроны, покинувшие плазму сформировали на

проекция второе пятно, дрейфующее в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ с постоянной скоростью $V_d = -cE/B$ [5]. Отделившееся облако свободно расширяется вдоль направления Z поскольку вдоль данного направления действуют лишь силы отталкивания.

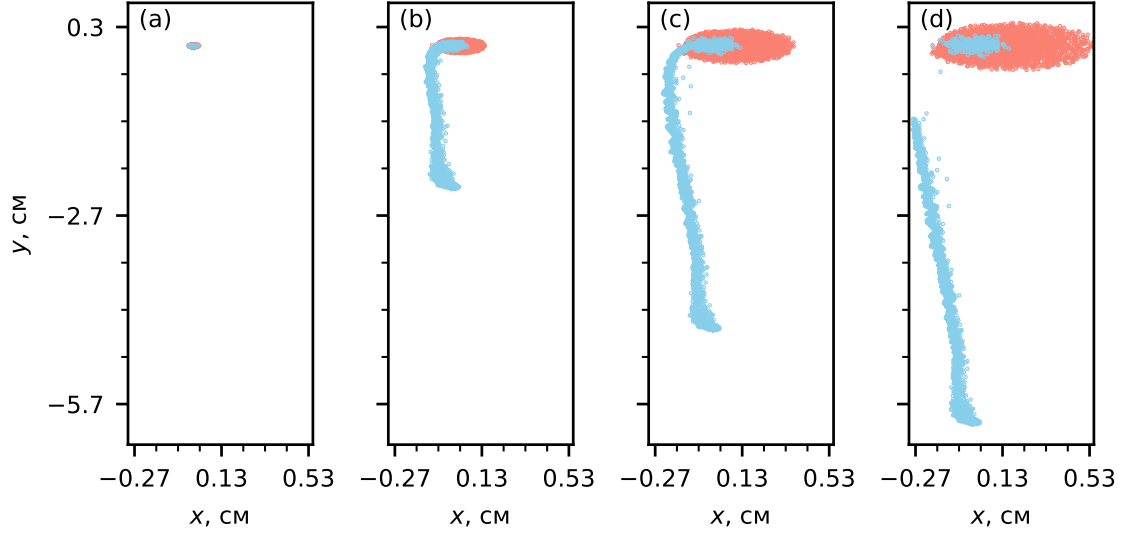


Рис. 12: Проекция координат электронов (синий) на ионов (красный) плоскость XY при $B = 20$ Гс, $E = 10^{-4}$ статВ/см, $N = 5000$, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 10$ К, в различные моменты времени: (a) $t = 10$ мкс, (b) $t = 20$ мкс, (c) $t = 30$ мкс, (d) $t = 40$ мкс.

На Рис. 12 изображены проекции электронов и ионов на плоскость XY в различные моменты времени для $N = 5000$, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 10$ К, $B = 20$ Гс и $E = 10^{-4}$ статВ/см. Рис. 12(a) – Рис. 12(c) демонстрируют процесс формирования пучка. Пучок дрейфует со скоростью V_d вдоль направления Y аналогично представленному выше случаю. На Рис. 12(d) показано, как уже сформировавшийся пучок отделился от плазмы, который свободно расширяется вдоль направления Z . Кроме того, видно смещение в сторону оставшийся электронной плотности внутри плазмы.

Моделирование показывает, что параметры пучка зависят от внешних полей. Оказывается, что увеличение индукции магнитного поля ведет к сокращению длины пучка. Если же изменять величину E , при прочих фиксированных параметрах, то наблюдается обратное. А именно, увеличение напряженности электрического поля ведёт к увеличению длины пучка [5].

Отметим, что электронный пучок может представлять интерес в электронной микроскопии, поскольку ультрахолодная плазма уже активно используется в качестве источника холодных электронов [13].

Характерной особенностью электронной плазмы пучка является его деформация. Это хорошо видно из Рис. 13, где детально изображены проекции пучка на плоскости XY и YZ .

Волнообразная форма пучка обусловлена тем, что в сформировавшейся электронной плазме развивается диокотронная (известная как slip-stream) неустойчивость. Деформация происходит в процессе формирования пучка,

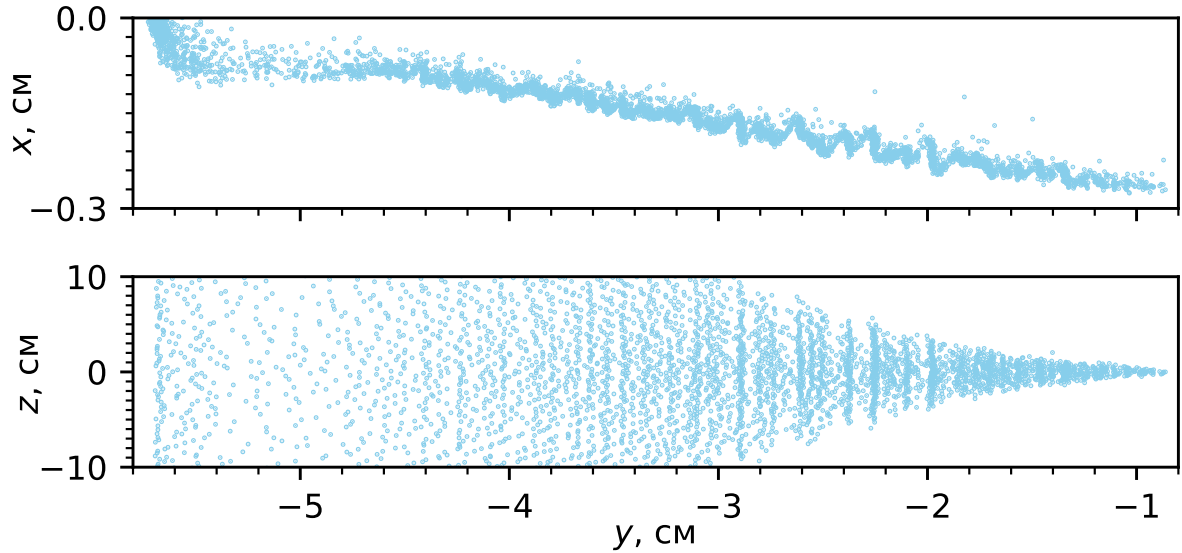


Рис. 13: Проекция электронов пучка на плоскость XY (верх) и ZY (низ) для $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и $B = 25 \text{ Гс}$.

когда границы электронной плазмы движутся поперек линий магнитного поля с различными скоростями [5]. Это показано на Рис. 14 где изображены

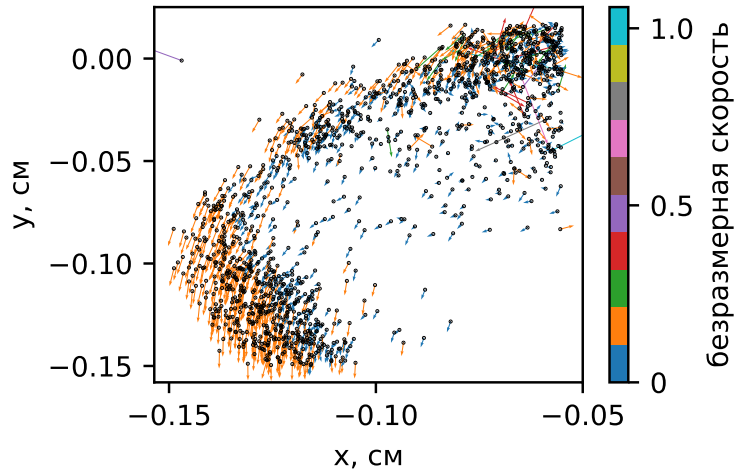


Рис. 14: Проекция электронов на плоскость XY и их усредненные скорости в процессе формирования пучка для $N = 10000$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и $B = 25 \text{ Гс}$.

проекция координат электронов на плоскость XY вместе с их средними (по набору данных) скоростями (стрелки), рядом с границей исходной плазмы. Величина скоростей (длина стрелок) нормирована на некоторое максимальное значение, встречающееся в наборе изображённых данных. Видно, что когда электроны покидают плазму они изменяют направление своего движение на дрейфовое. Это приводит к тому, что в потоке электронов возникает два слоя, средние скорости движения в которых различны. Таким образом, описанный механизм деформации соответствует представленному в работе

[14].

Качественно, причины, приводящие к реализации того или иного механизма, в соответствии с которым электроны покидают плазму представляется следующими.

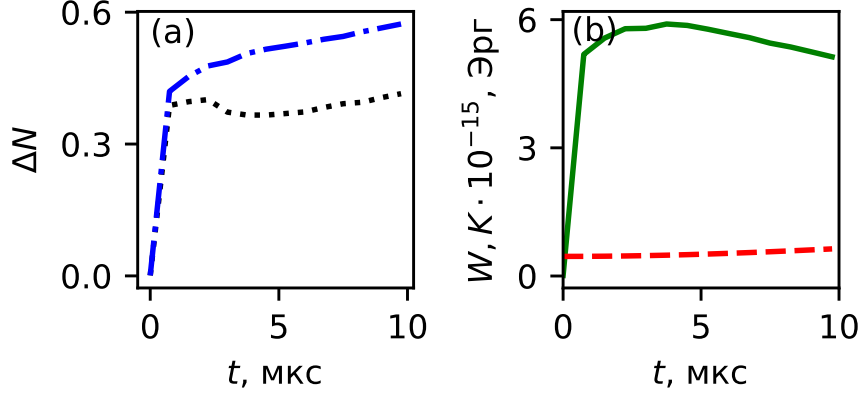


Рис. 15: Зависимости для $N = 5000$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $B = 10 \text{ Гс}$ и $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$. (a) $\Delta N(t)$ при $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ (пунктир) и $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ (штрих-пунктир); (b) $K(t)$ (штрих) и $W(t)$ (сплошная) для $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Формирование подобного облака происходит тогда, когда электроны покидают плазму преимущественно за счет своей начальной кинетической энергии [5]. Внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$ при этом оказывает слабое влияние на их извлечение. На Рис. 15(a) показана зависимость дисбаланса зарядов ΔN от времени для двух различных начальных пиковых концентраций.

На Рис. 15(b) изображены глубина потенциальной ямы $W(t)$ в сравнении с кинетической энергией электрона $K(t)$, сообщаемой ему внешним электрическим полем $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$ для $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ и $B = 10 \text{ Гс}$. В данных условиях $K(t) < W(t)$ для каждого момента времени.

Формирование электронного пучка происходит в том случае, если E достаточно велико [5]. При этом часть электронов, по-прежнему, покидает плазму за счет своей начальной кинетической энергии. Однако затем продолжается постепенное извлечение электронов из плазмы за счет внешнего электрического поля. На Рис. 16(a) изображены зависимости $W(t)$ и $K(t)$ где видно, что внешнее электрическое поле быстро сообщает электронам дополнительную кинетическую энергию, причём существенную. Ясно, что при прочих фиксированных параметрах величина E влияет на скорость извлечения электронов из плазмы. Так, на Рис. 16(b) изображены зависимости $\Delta N(t)$ для трёх различных значений E . Большим E соответствует большая скорость извлечения электронов из плазмы $d\Delta N/dt$. Извлечение электронов приводит к формированию потенциальной ямы. Если внешнее электрическое поле оказывается меньше внутреннего электрического поля плазмы, обусловленного дисбалансом зарядов, то $\Delta N(t)$ насыщается, что тоже видно из Рис. 16(b).

Таким образом, для экспериментального обнаружения пучка необходимо понижать T_{e0} и увеличивать E , а для обнаружения подобных долей наоборот.

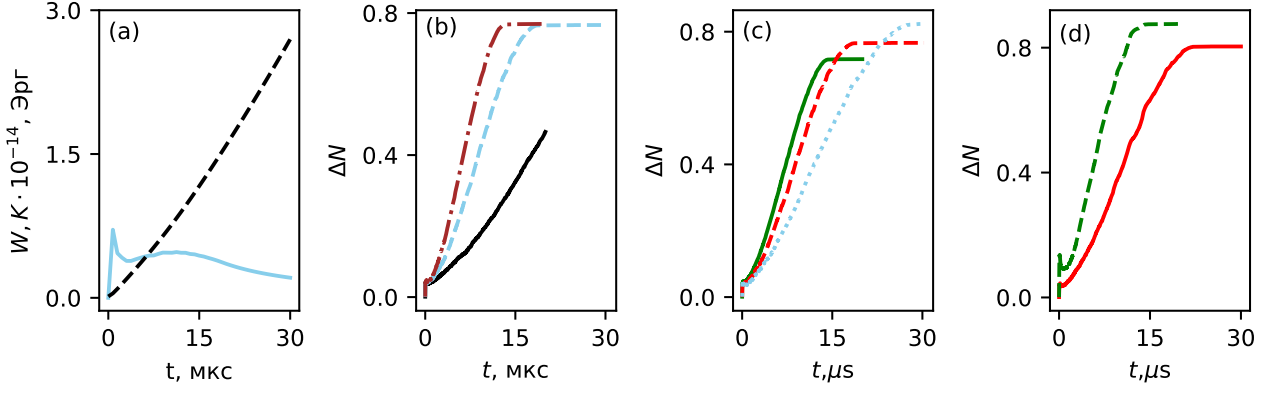


Рис. 16: Зависимость $\Delta N(t)$ при $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{11} \text{ см}^3$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, для различных значений (a) $K(t)$ (штрих) и $W(t)$ (сплошная) при $B = 25 \text{ Гс}$ (штрих), $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$; (b) $E = 5 \cdot 10^{-5} \text{ статВ/см}$ (сплошная), $1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ (пунктир) и $2.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ (штрих-пунктир) при фиксированном $B = 25 \text{ Гс}$; (c) $B = 10 \text{ Гс}$ (сплошная), $B = 25 \text{ Гс}$ (штрих), $B = 60 \text{ Гс}$ (пунктир) при фиксированном $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$; (d) $T_{e0} = 10 \text{ K}$ (сплошная), $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих) при $E = 1.3 \text{ статВ/см}$ и $B = 40 \text{ Гс}$.

В **заклучении** представлены основные результаты, полученные в работе. Классическая модель ультрахолодной плазмы, в которой её частицы представляются точечными и взаимодействуют друг с другом по закону Кулона не только демонстрирует согласие с экспериментом в широком диапазоне параметров, но и предсказывает ряд новых явлений.

Показано, что в процессе расширения плазмы на её границе возникает ионный фронт. При этом существенную роль играет, возникающий в начале процесса, дисбаланс зарядов ΔN . Процесс формирования фронта оказывается подобным для различных режимов. Получены оценки для времени формирования фронта $t_f \propto \sqrt{\frac{m_i}{e^2 n_0}} N^{1/6}$ и скорости его движения $V_f \propto e(N n_0)^{1/6} / \sqrt{m_i}$ в зависимости от параметров плазмы.

При расширении ультрахолодной плазмы во внешнем постоянном квадрупольном магнитном поле структура дисбаланса зарядов существенно меняется. При этом, ΔN не только зависит от времени и расстояния, но так же является знакопеременным. В связи с этим, внутри плазмы возникает сложный потенциальный рельеф, который приводит к колебаниям радиальной скорости ионов. Так же показано, что эффект удержания плазмы магнитным полем насыщается по мере роста величины градиента магнитного поля.

Показано, что при расширении ультрахолодной плазмы во внешних постоянных однородных скрещенных электрическом и магнитном полях возможно существование двух различных механизмов потери электронов плазмой. Один из них состоит в том, что покинувшие плазму электроны формируют второе облако, которое дрейфует вдоль направления $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ с постоянной по величине скоростью $V_d = cE/B$. Другой заключается в том, что электроны покидают плазму формируя при этом протяженный пучок, который, аналогично первому случаю, дрейфует в том же направлении с такой же ско-

ростью. При этом в пучке развивается диокотронная неустойчивость, которая приводит к его деформации. Характеристики пучка, в основном, зависят от внешних полей. Наконец, ионы плазмы расширяются несколько быстрее, поскольку дисбаланс зарядов достигает существенных значений.

Список литературы

1. Simulated expansion and ion front formation of ultracold plasma / E. Vikhrov, S. Bronin, [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2020. — Vol. 27, no. 12. — P. 120702.
2. Ion wave formation during ultracold plasma expansion / E. Vikhrov, S. Bronin, [et al.] // *Physical Review E*. — 2021. — Vol. 104, no. 1. — P. 015212.
3. Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field / S. Bronin, E. Vikhrov, [et al.] // *Physical Review E*. — 2023. — Vol. 108, no. 4. — P. 045209.
4. Reply to “Comment on ‘Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field’” / S. Bronin, E. Vikhrov, [et al.] // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 2. — P. 027202.
5. *Vikhrov E., Zelener B.*, [et al.]. Diocotron instability in ultracold plasma // *Physical Review E*. — 2025. — Vol. 112, no. 6. — P. 065206.
6. Ultracold neutral plasmas / T. Killian, T. Pattard, [et al.] // *Physics Reports*. — 2007. — Vol. 449, no. 4/5. — P. 77–130.
7. *Verlet L.* Computer “experiments” on classical fluids. II. Equilibrium correlation functions // *Physical Review*. — 1968. — Vol. 165, no. 1. — P. 201.
8. *Muller M.* A comparison of methods for generating normal deviates on digital computers // *Journal of the ACM*. — 1959. — Vol. 6, no. 3. — P. 376–383.
9. *Кашульников В., Красавин А.* Численные методы квантовой статистики. — Физматлит, 2010. — С. 217–219.
10. Magnetic confinement of an ultracold neutral plasma / G. Gorman, M. Warrens, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2021. — Vol. 126, no. 8. — P. 085002.
11. *Schlitters M., Miller M. Farley B.*, [et al.]. Comment on Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 2. — P. 027201.
12. *Zhang X., Fletcher R.*, [et al.]. Observation of an ultracold plasma instability // *Physical review letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 19. — P. 195002.
13. *Huijts J., Luiten J.* The Coming of Age of the Ultracold Electron Source: A Review // *arXiv preprint arXiv:2510.09889*. — 2025.
14. *Knauer W.* Diocotron instability in plasmas and gas discharges // *Journal of Applied Physics*. — 1966. — Vol. 37, no. 2. — P. 602–611.